Digitized by Google

FONDO PIZZOFALCONE

23784
BIBLIOTECA PROVINCIALE
Armadio XIX
Palchetto
Num.° d'ordine

NAZIONALE
B. Prov.
VITT EM III
396
NAPOLI

Digitized by Google

B. Prov. 396-397

Digitized by Google

Digitized by Google

ARITHMETICA
UNIVERSALIS.

Digitized by Google

Digitized by Google

50N
C09.438

ARITHMETICA
UNIVERSALIS;
SIVE DE
COMPOSITIONE
ET
RESOLUTIONE
ARITHMETICA.

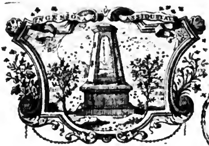
Auctore IS. NEWTON, Eq. Aur.

Cum Commentario

JOHANNIS CASTILLIONEI,

in almo Lycæo Trajectino Philoſophiæ, Matheſeos & Aſtronomiæ Profeſſoris Ordinarii &c.

TOMUS PRIMUS.



NAPOLI

AMSTELODAMI,

Apud MARCUM MICHAELEM REY.

MDCCLXI.

Digitized by Google

Digitized by Google

ILLUSTRIBUS AC PRÆPOTENTIBUS
POPULI TRAJECTINI ORDINIBUS
ELECTIS
EQUITIBUS
MAGISTRATIBUS

PATRIÆ PATRIBUS

ATQUE AMPLISSIMIS
CONSULIBUS
ET
SENATORIBUS
ACADEMIÆ

CURATORIBUS

QUOD BONIS LITTERIS ENIXE FAVEANT
ET PRÆSERTIM
QUOD MATHEMATICAS DISCIPLINAS COLENDI
OTIUM SIBI FECERINT
ET PUBLICE DOCENDI CURAM DEMANDAVERINT

D. D. D.

JO. CASTILLIONEUS.

Digitized by Google

Digitized by Google

MONITUM
PRIMÆ EDITIONI PRÆMISSUM.

AD

LECTOREM.

CUM, poſt haud paucos doctorum Virorum in Arte analytica tradenda labores, liber aliquis, materia plenus, mole parvus, in regulis neceſſariis brevis, in exemplis certo conſilio electis longus, & primis tyronum conatibus accommodatus, etiamnum deſiderari videretur; interque κειμήλια noſtra academica hujuſmodi tractatus M. S. publicas Profeſſoris mathematici tunc temporis celeberrimi prælectiones, triginta fere abhinc annis in ſcholis habitas, continens, mihi ſtatim occurreret; dedi operam ut libellus iſte, imperfectus licet, & currente calamo pro officii urgentis ratione compoſitus, nec prælo ullatenus deſtinatus, tamen in uſum ſtudioſæ juventutis nunc in publicum prodiret. In quo quidem quæſtiones haud paucæ e variis Scientiis adductæ multiplicem Arithmeticæ uſum ſatis oſtendunt. Animadvertendum tamen, conſtructio-

ctiones illas (ſive geometricas, ſive mechanicas, prope finem adpoſitas,) inveniendis ſolum duabus tribuſve radicum figuris prioribus, uti ſuo loco dicitur, inſervire: opus enim Cl. Autor ad umbilicum nunquam perduxit; cubicarum Æquationum conſtructionem hic loci tradidiſſe contentus; dum interea in animo habuerit biquadraticarum aliarumque ſuperiorum poteſtatum conſtructionem methodo generali exponendam adjicere, & qua ratione reliquæ radicum figuræ eſſent extrahendæ ſigillatim docere. Cum autem ſummo Viro hiſce minutiis poſtmodo vacare minime placuerit, defectum hunc aliunde ſupplere volui; atque eum in finem generalem planeque egregiam Cl. Halleii æquationum radices extrahendi methodum ex Actis noſtris Philoſophicis, exorata prius utrobique venia, huc transferendam judicavi. Vale Lector, & conatibus noſtris fave.

G. W.

Dabam Cantabrigiæ III. Kal. Mai
An. D. MDCCVII.

PREFA-

PRÆFATIO

A

G. J. s'GRAVESANDE

Præmiſſa editioni quæ Lugduni Batavorum prodiit Anno 1732.

Liber hicce prima vice, inſcio Auctore, & ipſo hoc ægre ferente, editus fuit Cantabrigiæ anno 1707.

Secunda vice in lucem prodiit Londini 1722.; *ſed in ſtatu perfectiore, ut quis facile percipiat, non omnino fœtum abdicaſſe virum celeberrimum; ordo propoſitionum non tantum mutatus eſt, ſed in ipſis ſolutionibus & demonſtrationibus correctiones multæ reperiuntur, non niſi ipſi Auctori tribuendæ.*

Secundam hanc editionem ſecuti fuimus, adjecto tamen monito primæ editioni præpoſito, & in ſecunda ſuppreſſo. Singulasque ſcedas totius operis, ab alio jam correctas, ipſi, antequam prælo ſubjicerentur, examinavimus & legimus.

Nihil in laudem operis dicam, nomen Auctoris in titulo legitur, & hoc quidem ſatis eſt. Non ego editionem dirigere ſuſcepiſſem, niſi librum

magni facerem. Jam etiam quid de ipſo ſentiam explicavi ſatis in præfatione ad ſpecimen commentarii in hunc ipſum; quod ſpecimen habetur ad calcem libelli noſtri, cui titulus Matheſeos Univerſalis Elementa.

Cum Newtoni Arithmetica primum in lucem prodiret, adjecerat Editor, propter convenientiam materiæ, Halleii methodum extrahendi radices æquationum, deſumtam ex Tranſactionibus Philoſophicis Societatis Regiæ Londinenſis; Nos hoc exemplum ſecuti, non tantum hocce Halleii ſcriptum, ſed omnia adjecimus, quæ in dictis Tranſactionibus reperiuntur, & quæ nobis ad Newtoni librum illuſtrandum utilia viſa ſunt. Quæ anglico ſermone conſcripta erant, latine reddidit vir Rev. Joh. Petr. BERNARD, *viri Celeberrimi* Jacobi BERNARD, *in hac noſtra Academia Batava Profeſſoris Philoſophiæ & Matheſ. digniſſimi & Collegæ noſtri dum viveret, conjunctiſſimi, filius.*

PRÆFA-

Digitized by Google

JOH. CASTILLIONEUS

LECTORI, S.

ISAACI NEWTONI, ſummi viri, *ARITHMETICAM UNIVERSALEM* explicandam ſuſcepiſſe me, novum in Mathematicorum Republica hominem, certe miraberis. Quis es tu, jure quidem dices, qui provinciam illam ultro tibi ſumas, quam doctiſſimus s' GRAVESANDE ad primi ordinis Mathematicos, hoc ſeculo vigentes, amandavit? Tune librum illum totum explicabis, cujus duo tantum loca vir ingenioſiſſimus expoſuit & quæ non eſſe *inter difficillima* modeſte profeſſus eſt?

Vera profecto ſunt iſta: &, ideo quia vera ſunt, ſcias oportet, quomodo mihi opus hoc exciderit. Non enim conſilio mihi onus, quod humeri ferre recuſabant, impoſui, ſed illud, fato quoddam in me conjectum, quouſque potui, portavi. Viginti anni jam ſunt elapſi, ex quo eximius & optimæ ſpei Adoleſcens, (cujus immaturum interitum adhuc lugeo) *Stephanus* SEIGNORETTUS *Anglus* rogavit ut ei *Arithmeticam univerſalem* NEWTONI prælegerem, voluitque ut non ea dumtaxat afferrem, quæ ad Auctoris mentem aſſequendam erant neceſſaria, ſed quæcunque ad pleniorem ſcientiam facerent, & ea præſertim, quibus vis ingenii (quo multum ſane pollebat) creſcere poſſet. Quamobrem ego librum hunc ſumma cum animi contentione legere; quæ pro tenuitate mea poteram, adnotare; atque, ut curtam ſuppellectilem augerem, optimum quemque hujus argumenti ſcriptorem diligenter pervolvere; & quæ ad rem facere videbantur, undique corradere. Celerrimo gradu me ſequebatur præſtantiſſimus Diſcipulus, ſeu potius ſtudiorum comes; quin & multa ipſe commentabatur, & mihi plura, quæ ſine eo non animadvertiſſem, commentandi præbebat occaſionem. Sic pauliſper, me imprudente, crevit *Commentarius hic*; quem, cum perſpicerem in juſti voluminis formam excreviſſe, &, cum nonnulli, qui illum legerant, a me poſcerent ut eum publi-

Digitized by Google

ci juris facerem, ad immortalis memoriæ virum G. s'Gravesande, operis *Newtoniani* fautorem, ſcripſi quid præſtare conatus fuiſſem, quibus auxiliis uſus, ea demum quæ quid facere inſtituiſſem plane quidem, quomodo autem id perfeciſſem quoad licuit, docere poſſent (*). Meis litteris humaniſſime, ut ſolebat, ille reſpondit, quid in melius mutandum eſſet indicavit, & ſua cura Typographum libro meo paratum eſſe ſignificavit. Majores animos hinc ego collegi, atque opus totum revolvere, emendare, augere alacriter cœpi. Interea vita functus eſt egregius ille vir, cui ego, ac totus litteratus Orbis lacrymis parentavimus. Tunc ego commentarios hos ad perpetuas tenebras damnatos exiſtimans, manum ab eis removi, & operam meam ad *Newtoniana Opuſcula*, ſuadente *Marco Michaele* Bousquet, Bibliopola notiſſimo, colligenda, vertenda, edenda tranſtuli.

Tandem poſt multos caſus, quos narrare longum & ſupervacaneum eſſet; M. M. Rey, diligens Bibliola, & amicus conjunctiſſimus, hæc qualiacunque fuerint, edere voluit.

En quo pacto librum hunc, id non cogitans, inchoaverim, atque aliorum potius auctoritate quam voluntate mea ductus, perfecerim, atque ediderim. Pauca nunc de ipſa Newtoni *Arithmetica Univerſali* & de conſilio meo dicenda ſuperſunt.

Si *ex locis omnibus, in quibus honeſti natura & vis continetur, primus* (ut ait Cicero (*a*) *ille eſt, qui in veri cognitione conſiſtit, & maxime attingit naturam humanam*, quanti facienda eſt ars veritatem inveſtigandi? Quam a quo potius ediſcamus quam a Newtono, ſummo inventore, non video, niſi quis forte poeticen a Cherilo vel Bavio quam a Virgilio aut Horatio, militaremque ſcientiam ab ipſo Horatio qui

> .... *celerem fugam*
> Senſit *relicta non bene parmula* (*b*)

quam ab Alexandro aut Cæsare diſcere malit. Neque ſe minor eſt Newtonus in *Arithmetica univerſali*, quamquam eam imperfectam reliquerit. Nam, Dii Boni! quæ præceptorum vis, quæ con-

(*) Harum epiſtolarum una edita nunc eſt in 2°. tomo Dictionarii ſcripti gallice a Proſpero Marchand, articulo *s' Graveſande.*

(*a*) De Off. l. 1. 6.   (*b*) Hor. Od. l. II. 7.

concinnitas ordinis, quæ exemplorum copia! Quam hæc omnia ſunt apte ſelecta!

Ordinis autem & præceptorum utilitatem, ſi olim laudaſſem, certe riſu exceptus illud vulgatum audiviſſem, *quis vituperat?* Nunc autem horum neceſſitatem propugnare cogor, poſtquam viri, (quod magis doleas, alioquin docti & acuti,) ſeculi levitati adſentantes, præcepta & ordinem, tamquam perfidos duces in devia trahentes, traducere ſunt auſi, & ideo tempus, quod in pulcherrimis & novis excogitandis recte poterant inſumere, in iis, quæ veteres recte tradiderant, corrumpendis perdendum cenſuerunt. Apage, inquiunt, has definitionum, poſtulatorum, atque axiomatum inſulſas congeries; apage hæc abſtracta Theoremata. Quis enim hæc leget? Melius veritatem, nullo ordine, ſed ut neceſſitas poſtulabit, requirens, ſectaberis illorum veſtigia, qui prima ſcientiarum fundamenta poſuerunt. Sic illos confirmabis, quos horrida, qua vulgo Matheſin deformant, perſona deterret. Quin & hinc fiet ut adoleſcentium animi ad veritatem e Democriti puteo hauriendam aptiores evadant.

At ego putabam utiliſſimam quidem eſſe Matheſin: in hoc tamen maxime utilitatem ejus elucere, quod mentis facultates exornando, acuendo, augendo, nos a brutorum natura remotiores, divinæ propiores efficiat; quo nomine Diſciplinæ hujus ſtudium cunctis eſſe commendandum fatentur omnes. Mens vero (quod ad veri cognitionem attinet) aut prius ignota percipit, aut jam nota reminiſcitur; quorum neutrum fieri poteſt ſine contentione quadam, quam attentionem nuncupamus. Intelligere vero eſt non opinari, non dubiis & incertis ſe permittere, ſed certis & indubiis adhærere, qualia Matheſis præcipue complectitur. Unde fiat oportet, ut qui huic Diſciplinæ ſedulam navant operam, ita cum evidentia & certa cognitione conſueſcant, ut primo intuitu vera ſtatim a falſis diſcernant atque diſtinguant. In quo maxime intellectus perfectio verſatur, quæ Matheſi debetur. Neque minus hæc ſcientia ad memoriam atque attentionem conducit; quandoquidem de propoſitionis alicujus veritate certus eſſe non poteſt qui totam demonſtrationem, uno conſpectu non cernit, (quod qui facere fatagit, mire attentionem auget,) & qui præterea non habet ad manum principia neceſſaria, aut illa firmiſſima eſſe non ſentit; quod qui diligenter curat maxime memoriam exercet. Quæ omnia commoda tollit iſtorum facilitas, & eo rem adducit ut neque

que nova diſcere, neque quæ jam didicimus, recolere niſi fortuito poſſimus. Etenim aliquid, (ſive proprio ingenio, ſive alio præeunte,) diſcere, ſi quid aliud eſt quam notiones, quas habemus, aut evolvere & penitus dignoſcere, aut inter ſe comparare, iſti doceant. Si autem res ita ſe habet, ut reor; quomodo, obſecro, notiones, quas nec ipſi bene novimus, comparabimus? Quomodo in quibus conveniant, in quibus differant, diſpiciemus? Igitur *in omnibus, quæ ratione docentur & via, primum conſtituendum eſt quid quidque ſit,.... atque involutæ rei notitia definiendo aperienda* (*a*). Siquidem definitio eſt prima & ſimpliciſſima notionis evolutio. Nunc, ſi quid ex ipſa definitione diſcimus, illud negligemus, an conſiderabimus? Certe conſiderabimus, quandoquidem rem non evolvit ille, qui non diſpicit diligenter omnia, quæ res complectitur, & ſtultum eſſet ea negligere, quæ ſponte ſe obviam faciunt, deinde requirenda: neque a montis radice ad verticem uno impetu poſſumus advolare. Igitur nova diſcere nequit, qui a *definitionibus* non incipit, illiſque ſubjicit *axiomata* & *poſtulata*, veritates nempe, ſeu ad aliquid cognoſcendum, ſeu ad faciendum pertinentes & a definitionibus ſponte fluentes. Utrum autem quæ ſic diſcimus, ut iſti volunt, recolere poſſimus, infra diſpiciemus. Nunc videamus quæ ſunt illa abſtracta Theoremata, quibus fatigati Tirones Matheſin, tanquam nimis aridam, faſtidiunt atque refugiunt. Ea ſunt (ipſis fatentibus) generales quædam propoſitiones, quibus notiones a ſenſibus alienæ continentur, & quarum connexio cum praxi difficile perſpicitur. Num autem ita moleſta ſunt hæc Theoremata, quia generalia ſunt? At, cui gratius eſſet peculiares propoſitiones addiſcere, quæ ſæpe levi, aut nulla mutatione, forent repetendæ? In ipſo ortu ſcientiarum peculiares veritates ſectandæ fuerunt, tum quia generales invenire difficillimum erat, tum quia recta methodus ignorabatur. Tunc decebat, neceſſitate magiſtra, nunc has nunc illas propoſitiones indagare. At nunc, *quæ eſt hominum tanta perverſitas, ut inventis frugibus, glande veſcamur* (*b*)?

Quis non intelligit eo magis ſcientias perfici, quo magis univerſalia Theoremata reperiuntur? Præſertim, cum tanta jam ſit methodorum & propoſitionum copia, quæ tamen quotidie augetur, ut nemo omnia diſcere & retinere queat, niſi in pauca genera-

(*a*) Cic. Orator. 33. (*b*) Cic. Orator. 9.

neralia Theoremata coarctentur. Verumtamen fortaſſe creant hanc moleſtiam notiones quas conſiderant Geometræ, ideo quia ſunt a ſenſibus alienæ. Qui ſic ſentit, a mente excolenda prorſus abſtineat, neceſſe eſt; mentis enim regnum eſt a corpore omnino ſeparatum. Neque melius ſentiunt cum dicunt, difficili cum praxi connexione faſtidium creari. Prius enim inſtrumenta quæ ſint, eſt intelligendum, quam modum iis utendi doceamur. Ex me tu quæris quo valeant, qualem præbeant uſum tot de triangulis, de parallelis, de circulis propoſitiones? Quid reſponderes puerulo quærenti quo valeant elementa prima? Nonne patet melius illum figuras adhibiturum, qui melius quæ ſint cognoverit? Teſtis ſit Newtonus, qui ut ſectiones conicas Aſtronomiæ aptaret, novas earum proprietates detegere, ideſt earum naturam penitius introſpicere, debuit. Teſtis Hugenius, qui horologia perficere non potuit, niſi cycloidis natura diligentius inveſtigata. Teſtis Bernoullius, teſtis Leibnitius, quorum alter pleniſſime, alter minus perfecte curvam celerrimi deſcenſus determinavit, quia ille ipſam cycloidem accuratiſſime cognoverat, quam hic negligentius conſideraverat. Teſtes denique omnes recentiorum libri, referti inventis ſimplicibus, elegantibus, utilibus, ubi Auctores rerum, quas tractabant, naturam optime intelligebant, ubi ſecus, perplexis, inelegantibus, atque ideo inutilibus.

Prætereo, quod non ut artificia perficiantur, ſed ut

Concretam tollat labem, purumque relinquat
Æthereum ſenſum atque aurai ſimplicis ignem (a)

nata eſt Matheſis; quod ita pro certo habebant veteres illi (velis nolis) præceptores noſtri, ut quidquid a manibus penderet, hac ſcientia judicarent indignum. Errabant illi quidem, ſed magis errat, qui ſublimem hanc diſciplinam, quæ ſola valet mirabilia Dei opera quadantenus explicare atque hominis naturam exornare, putat placere non poſſe, niſi fabrilibus artibus inquinetur.

Quod vero dicunt, hac incondita Matheſin tradendi via fieri ad veritatem detegendam aptiores Adoleſcentes, profecto jocantur. Sic diſcent quod nemo neſcit, ſcilicet quod ubi propoſitione aliqua opus habes, illa tibi eſt inveſtiganda. Sed quomodo illud

(a) Virg. Æn. l. VI. v. 716.

illud Theorema tibi neceſſarium recte quæres? Quomodo quæſtiones enodabis? Niſi fortaſſe putas, cum neque ſchyphus neque ſcamnum ſine præceptis efformari poſſit, graviſſimam atque difficillimam inveniendi artem præceptis non egere. Sed eſto; impetu quodam ingenii unum aut alterum, vel etiam ſingula problemata ſolves. At; *rem univerſam tribuere in partes, latentem explicare definiendo, obſcuram explanare interpretando, ambigua primum videre, deinde diſtinguere* (*a*), quomodo diſces?

Tamen, ajunt, ſupervacaneum eſt accurate demonſtrare illa, quorum veritatem quivis levi animi contentione poteſt diſpicere. Experientia docet eos, qui ad Matheſin addiſcendam apti nati ſunt, ingenium ſuum libenter exercere, & demonſtrationibus quaſi inutilibus fatigari. Demonſtret Euclides duos circulos ſe mutuo ſecantes idem centrum non habere; nemo mirabitur. Illi res erat cum Sophiſtis pertinacibus, qui laudi apponebant propoſitiones vel evidentiſſimas rejicere; quapropter Matheſis, ut Logica, inſtructa eſſe debebat Syllogiſmis, quibus cavillantium os poſſet occludere. Nunc autem ſuperflua ſunt ratiocinia, quibus confirmare conamur id quod bona mens oſtendit; *perſpicuitas enim*, (ut ait Cicero) (*b*) *argumentatione elevatur*.

Utinam Philoſophi, Medici, Juriſconſulti, Theologi, in ſupervacaneis iſtis demonſtrationibus, tempus, ut dicitur, triviſſent! Quot & quantis quæſtionibus circa verba, aut circa res quæ intelligi nequeunt, verſantibus, quibus tandiu detinemur, quot falſis, aut ſaltem incertis opinionibus, quibus obruimur, caruiſſemus? An putas, ſi parcius huic ſenſus communis imagini ſe crediidiſſent, ſi accuratius prima principia probaſſent civilis & pontificii juris Scriptores, Philoſophi, Theologi, non vulgares tantum ſed & Grotius, Hobbesius, Pufendorfius, Democritus, Aristoteles, Plato, Cartesius, Athanasius, Hieronymus, Augustinus, Lutherus; Calvinus, tot ſcripti fuiſſent de jure libri, ut vel ad titulos legendos, vel ad errores, quibus ſcatent, non dicam refellendos ſed detegendos, vix humana vita, quantumvis longa, ſufficiat; tot & tantis diſputationibus de rerum principiis, de mundi ſyſtemate, de finibus boni & mali, de Trinitate, de gratia, de commercio animæ & corporis, ſcholæ ſtrepuiſſent & adhuc ſtreperent ſine ullo ſcientiarum incremento; inqui-

(*a*) Cic. Orator. 41.

(*b*) De nat. Deor. l. III. 4.

quiſitionem ſenſiſſet Galilæus, per totam vitam timuiſſet Cartesius; tot & tam cruentis perſequutionibus inquinata fuiſſet ſanctiſſima Christi Religio, ſumma pacis conciliatrix? Sed, ut ad rem propius accedam, *quis ignorat ii, qui Mathematici vocantur, quanta in obſcuritate rerum, & quam recondita in arte & multiplici ſubtilique verſentur. Quo tamen in genere ita multi perfecti homines extiterunt, ut nemo fere ſtuduiſſe ei ſcientiæ vehementius videatur, quin, quod voluerit, conſequutus ſit* (*a*). Quare? niſi quia claras & diſtinctas notiones quiſque, dummodo non omnino plumbeus ſit, percipit; quæ hinc ſponte perficiuntur, intelligit; quæque ex his definitionibus & axiomatis pedetentim deducuntur, ſectatur & aſſequitur, quod vix facere poſſunt acutiores, ubi non gradatim proceditur, ſed per ſaltus, ut in aliis fere ſcientiis, diſcurritur. Fieri autem nequit ut claras & diſtinctas habeat notiones, & ut gradatim procedat ille qui non ſingula certiſſimis demonſtrationibus confirmat, ſed levi quodam judicio nixus evidentia pronuntiat, cum ratio clamet Verulamii verbis; (*b*) ut *prima quæque, quæ ſe offerunt animo eique arrident, pro ſuſpectis habeantur.* Omnium enim, quæ per ſe patere exiſtimantur, notiones confuſæ ſint, neceſſe eſt, quæ quam ſæpe fallant omnes norunt, & quam ſæpe logomachiis viam aperiant, diſputationes nuper in Matheſim invectæ teſtantur; ut præteream periculoſum eſſe notionibus his confuſis aſſueſcere. Ideo Wolfium (*c*) audiat, non iſtos, *qui intellectus perficiendi gratia Matheſi operam navat*, monentem quod *is a rigore demonſtrandi ne latum quidem unguem recedere tenetur, ne methodi confuſæ notiones & de eadem concepta præjudicia noceant extra Matheſim.*

Præterea, ſi quis in ſcientiis profectus ſibi proponit non pœnitendos, is ita debet prima principia tenere, ut illa ſponte menti ſeſe offerant, quod numquam obtinebit, niſi qui ea ſæpius & attente conſideraverit; cui rei quantum demonſtratio, quin & plures diverſæ demonſtrationes conducant, cuivis judicandum relinquo. Præcipue qui nova detegere cogitant, male prima principia negligunt. Reſpice per quam longum & ſinuoſum iter plerumque maximi Mathematici ad veritatem perveniant, ad quam facile pervenire poterant, ſi prima principia recte perpendiſſent. Audi New-

(*a*) Cic. de Orat. l. 1. 3. (*b*) Bac. de augm. Scient. l. 1.
(*c*) Elem. Math. Tom. V. Cap. IV. 178. in fine.

Digitized by Google

Newtonum, qui jam grandævus & ſummum ſcientiæ apicem adeptus dolebat, quod non Euclidis elementa, qua decebat diligentia, juvenis perlegiſſet. Ille certe, quamvis Matheſi aptiſſimus, tunc has demonſtrationes moleſtas & graves non arbitrabatur, neque ſupervacanea & ſolum contra ſophiſtas utilia cenſebat ratiocinia, quibus bonæ mentis judicia confirmare veteres conati ſunt. Ceterum, non deſunt alia, quibus Tironum ipſorum ingenia bene poſſint exerceri, & plurimum in ſcientiis valet vulgatum illud *feſtina lente*.

Huc accedit, quod ſi in ipſis principiis docemur negligentiam atque oſcitantiam, quando attentio & diligentia diſci poſſit, non video. Num in ſublimioribus ſcientiæ partibus? Sed tunc recurret illud axioma, naturæ humanæ laborem averſanti commodiſſimum, *fruſtra quis demonſtrat quæ bona mens oſtendit*; argumenta probabilia ſe ſe pro certis demonſtrationibus obtrudent, & obrepent paralogiſmi, a quibus immunes ſunt veteres omnes, qui artem ſeveram amabant, & a quibus vix recentiorum unus & alter (qui quidem veterum fuerunt imitatores) potuit abſtinere.

Denique fruſtra homines diſcere, quæ ſtatim obliviſcantur, nemo negabit. Certum autem eſt nos vix rerum meminiſſe, quas nullus ordo revocat ad mentem; hinc fit ut facilius, quam ſoluta oratio, carmina retineantur. Id ſenſerunt gentes omnes, vel barbaræ, quæ carminibus hiſtoriam & Philoſophiam deſcripſerunt, antequam litterarum uſus invaluit.

...... *Tantum ſeries junɛturaque pollet* (a)

Hæc de ordine, nunc de præceptis, quæ ſi mentem aliquantiſper tardam redderent, ut nonnulli putant, nihil tamen progreſſibus obeſſent, quandoquidem teſtudo in via citius ad metam pertingit quam Achilles extra viam. Sed ne regulæ & præcepta mentem opprimant & tarditatem inducant, verendum non eſt. Nam ingenium totum (quantum eſt) circa duo verſatur, ut ſcilicet connexionem aut repugnantiam notionum deprehendat, quam præcepta nullo modo, ſed quomodo ad propoſitam metam breviſſima via pervenias, oſtendunt. Et revera, quis unquam Theorematis demonſtrationem aut problematis ſolutionem quæſivit, qui notionum

(a) Hor. Ar. Poet. v. 242.

num mediarum defectu aut copia non laboravit. Si deſunt, unde & quomodo extundendæ? Si redundant, quæ ſeligendæ? Ubi fruſtra quæro principia, quæ me deficiunt, experior quod nec *manus nuda nec intellectus ſibi permiſſus multum valet. Inſtrumentis & auxiliis res perficitur, quibus opus eſt non minus ad intellectum quam ad manum* (*a*). Ubi vero me nimia copia reddit inopem,

quo me cunque rapit tempeſtas, deferor hoſpes (*b*)

& ſentio, quod *hominum intellectui non plumæ addendæ, ſed plumbum potius & pondera, ut cohibeant omnem ſaltum atque volatum* (*c*) unde patet unicam omnino reſtare ſalutem *ut mens ab ipſo principio nullo modo ſibi permittatur, ſed perpetuo regatur, & res, veluti per machinas, conficiatur* (*d*). Cum præceptis ita conſueſcant, qui *ſpiritus proprios, ut ſibi oracula exhibeant,* (*e*) ſolent invocare, ut vel inviti ab iis regantur, & tunc videbunt quanti ſint æſtimanda: quod ſi facere reſpuunt, quæ ignorant ſaltem non vituperent, neque vocibus ſuis alios a recta via deterreant; &, dum ſcribunt, caveant ne populo, cui ſcribere ſunt cenſendi, faciant injuriam, populum illum quaſi levem artiſque ſeveræ impatientem traducentes: *omnes enim qui probari volunt, voluntatem eorum qui audiunt, intuentur* (*f*). Et nemo ideo ſcribit ut improbetur. Et iſti delicatuli Diſcipuli, ſiquid ſapiant, Varronem audiant. Hæc *ait ille* (*g*) *aut omnino non diſcimus, aut prius deſiſtimus quam intelligamus cur diſcenda ſint. Voluptas autem vel utilitas talium diſciplinarum in poſt-principiis exiſtit, cum perfectæ abſolutæque ſunt: in principiis vero ipſis, ineptæ & inſuaves videntur.* Cui ſententiæ ſi non adſentiunt, relinquant, ſuadeo, graves has diſciplinas, quibus nati non ſunt.

Sed fortaſſe minus lucidus aut concinnus eſt ordo a Newtono ſervatus, aut recto talo non ſtant ejus præcepta. Meliora igitur profer; & optime mereberis de prudentioribus, qui omnes adhuc imperfectam eſſe artem inveniendi fatentur. Ordinem vero *Newtonianum* breviter exponam, verbum nec amplius addam; verendum

(*a*) Bac. Nov. Org. Scient. Aph. II.
(*b*) Hor. Ep. l. 1. Ep. 1. v. 15.
(*c*) Bac. Nov. Org. Scient. Aph. CIV.
(*d*) Bac. Nov. Org. Scient. Præf.
(*e*) Bac. Ibidem.
(*f*) Cic. Orator. 8.
(*g*) Apud Aul. Gel. l. XVI. Cap. 18.

Digitized by Google

dum enim eſt ne peculiare quoddam ſtudium, quo ſemper in hunc ſummum virum latus ſum, me fallat.

Sibi propoſuerat Newtonus ſcribere *de compoſitione & reſolutione arithmetica.* Quapropter ſtatim tradit quomodo rationes ſubducendæ ſint per numeros & per ſymbolos. Cum autem hæ regulæ futuræ nullius uſus fuiſſent, niſi ad quæſtiones enodandas inſervirent, primo docet, quo pacto æquatio reddatur ſimplicior, & incognita exterminetur; deinde qua via problemata ad æquationem deducenda ſint; quod haud raro facere non poteſt, qui incognitarum eliminationem ignorat. Præterea, hanc problematum ad æquationem deductionem, utpote difficultate & utilitate inſignem, pluribus exemplis illuſtrat. Supereſt ut æquationum radices invenire diſcat qui cetera callet; cui rei viam aperiturus Auctor noſter, plura notanda profert de æquationum natura, radicibus, & transformatione, & libro colophonem imponit appendice de æquationum conſtructione lineari. Quæ omnia multis & ſelectis exemplis cumulavit, quibus præcepta explanantur, & ſæpius ad lectorum mentem revocantur. Nec alioquin inutilia ſunt hæc exempla, ſed utilium ſcientiarum fontes plerunque aperiunt.

Nunc pauca de conſilio meo ſunt dicenda. Quid dixerit s'Graveſande de hoc libro explicando non repetam. Sed Ill. Wolffii verba referam, quia meum propoſitum fere complectuntur. *Utilem* (ait ille de Arithmetica univerſali Newtoni, (*a*) *tironibus operam ſumeret qui* eandem *commentario illuſtraret. Multa enim occurrunt difficilia, quorum rationes non facile aſſequi licet, etiam exercitatioribus. Deſunt etiam conſtructiones geometricæ problematum, quorum tantummodo dantur ſolutiones per calculum.* Quare

Primo, cum *Arithmetica univerſalis* ab Auctore perfecta non fuerit, arbitratus ſum mihi onus incumbere, illam pro viribus talem reddendi, qualem ſcriptorem ipſum redditurum putabam, ſi ultimam manum impoſuiſſet. Idcirco, titulum ab Newtono adſcriptum conſiderans, judicavi eum ſibi propoſuiſſe omnia tradere quæ ad æquationes ex problematum legibus deducendas, & earum radices, ſive numeris ſive lineis exhibendas, pertinerent. Hinc factum eſt, ut *Newtonianum* de Polynomio ad poteſtatem quamlibet evehendo Theorema fuſius tradiderim & demonſtraverim; nonnulla de problematum & æquationum natura ſim commen-

(*a*) Elem. Math. univ. Tom. V. Cap. IV, 12. de ſcriptis Anal.

mentatus; generales pro conſtructionibus problematum canones docuerim, & alia hujus generis. Fateor nonnulla eſſe fortaſſe in alium locum rejicienda, utpote paullo difficiliora, aut non ſtatim uſu ventura; quæ tamen ideo collegi, quia quæ ad idem argumentum pertinent melius collecta, quam ſparſa, diſcuntur atque retinentur. Præſertim cum Auctor meus, omnia, quibus opus ſe habiturum videt, ordine locare ſoleat, neceſſitatem, quæ ad illa afferenda cogat, non expectans.

Præterea, memor NEWTONUM ſibi perſuaſum habuiſſe analyticis ſolutionibus ſyntheticas demonſtrationes eſſe ſubſtituendas, ut, *omiſſo, quatenus fieri poteſt, calculo algebraico, Theorema fiat concinnum & elegans ac publicum lumen ſuſtinere valeat*, (*a*) atque ſæpius doluiſſe, quod geometrica algebraicis rationibus tractaſſet, geometricas demonſtrationes & analyſes addidi, quando ab algebraicis diverſas invenire potui. Et ſane, ubi detegenda ſunt ignota, ſubſidium Algebram præbere fatendum eſt; & ad hoc eſt excogitata, ut paucis principiis multa poſſint (*b*) inveniri. Sed meminerint tyrones eam nihil eſſe quam ſupplementum, quo adjutatur imbecillitas humani intellectus, ut de *ſeriebus* ait FONTENELLIUS (*c*). Ideo, quo magis quiſque pollet ingenio, eo minus his auxiliis uti debet, ita ut, qui ſemper rationes ſubducunt, ſe parvi ingenii damnent, niſi forte nova & difficilia detegant. His enim ſummæ gratiæ ſunt habendæ, quod humanarum ſcientiarum pomœria proferant; & rogandi ſunt ut, quomodo ſolent, nova & bona dent, quamcunque tandem methodum adhibeant. Ceteri vero firmiter veterum analyſi adhæreant, eam enim talem *non eſſe, qua, algebra inventa, carere poſſimus, haud difficulter oſtenditur. Etenim, antequam problemata geometrica vel alia in Matheſi miſta ad Geometriam puram reducta, per algebram ſolvantur, reducenda ſunt ad æquationes. Hæc vero reductio non modo ſupponit præparationem, methodo veterum inveniendam, verum etiam ipſamet per eandem methodum eſt eruenda. Accedit ſubinde, occurrere problemata etiam in altioribus, quæ methodo veterum multo brevius & elegantius ſolvuntur, quam per calculum algebraicum*, qui haud *raro admodum perplexus & nimis longus eſt. Accedit, quod, abſque omni theoria, calculo algebraico minime ſit locus. Hinc, qui problе-*

(*a*) Newt. Opuſ. T. 1. pag. 170.
(*b*) Vide Wolf. Elem. Math. Un. T. V. Cap. IV. 143. de medio Algebræ.
(*c*) Act. Scient. Paris. An. 1727. Elog. Newt.

blemata phyſico-mathematica, vel etiam mechanico-phyſica ſolvunt; quædam, tamquam cognita, ſumere tenentur. Contingit autem haud raro, ut ſumant nondum ſatis explorata, vel, ſi ea demonſtrare voluerint, quæ certa ſunt, & methodo veterum rigide demonſtrari poterant, in dubitationem adducant, ut adeo, quæ per calculum ex aſſumtis eruuntur, vel incertitudini obnoxia fiant, vel ſuſpecta reddantur acutioribus rigori veterum aſſuetis. Imo, nullum eſt dubium, quin plura irrepſerint a veritate aliena, ita ut inventa recentiorum Mathematicorum reviſione quadam indigerent, & haud pauca firmiori fundamento ſuperſtrui mererentur. Nec alia ratio eſt cur inter recentiores Mathematicos agitentur controverſiæ, quales veteribus erant ignotæ. Optime igitur ſibi conſulunt, qui methodum veterum cum algebraica recentiorum conjungunt. Et merito dolemus cum NEWTONO *quod, illa neglecta, cito nimis pede ad hanc properent, qui inter Mathematicos eminere volunt.* (*a*) *Si* vero *exiſtimaveris demonſtrationes ſyntheticas dari poſſe ſi, veſtigiis calculi inſiſtens, verbis enuncies quæ per eum patent, & in reddendis rationibus ad leges calculi confugias, totus falleris* (*b*). *Si autem ſtudium Matheſeos intellectum perficere debet, neceſſe eſt ut in demonſtrando ſis aſſiduus. Intelliguntur vero hic demonſtrationes ſyntheticæ, quales ſunt* EUCLIDIS *& Geometrarum veterum* (*c*). Quæ clariſſimi WOLFFII verbis exponere & auctoritate confirmare volui, nequis me pravo quodam ſtudio a communi ſententia diſſentire putaret.

Denique geometricas effectiones addidi, principio quidem omnes; deinde, cum arbitratus ſum generales conſtructionum canones ſatis eſſe notos, illas quæ aliquid habere viſæ ſunt obſervatione dignum & a canonibus alienum. Nam plerumque canones effectionem præbent minus elegantem; elegantiorem autem judico quæ ſimplicior & factu facilior eſt.

Ceterum, in his omnibus ad EUCLIDIS *Elementa* ſæpius appellavi, ut ea tiro cogatur accurate repetere, nec ſero dolere poſſit ſe negligenter ea pervolviſſe; atque ne laudanda veterum diligentia prorſus obſoleſcat, in determinationibus, quam potui, maximam curam adhibui.

Et hæc putavi facturum fuiſſe NEWTONUM, ſi librum ſuum perficere voluiſſet. Sed illum præterea mihi ad Tironum captum acco-

como-

(*a*) Wolff. Elem. Math. un. T. V. C. IV. 146. de ſtudio Alg.
(*b*) Wolff. Elem. Math. un. T. V. C. IV. 178. de ſtudio Alg.
(*c*) Ibid. 99. & 100.

comodandum eſſe ſum arbitratus. Quapropter, omnia, pro viribus diligenter & ſimpliciter demonſtravi; rationes ab Auctore omiſſas ſubduxi, principio quidem omnes, deinde gradatim difficiliores; problemata nonnulla pluribus modis ſolvi; principia, ſine quibus ſolutiones nullo pacto poterant intelligi, breviter explanavi; & corollaria, ſiqua præclara ſe obtulerunt, ſum perſecutus.

Nunc grates mihi ſunt agendæ celeberrimi viris *Nicolao* & *Danieli* Bernoulliis, quorum alter demonſtrationem regulæ de inveniendis Diviſoribus ſurdis, adhuc ineditam atque huic operi inſerendam humaniſſime communicavit; *Daniel* vero me regula de inveniendis diviſionibus rationalibus a ſe demonſtrata cumulavit, & prudentiſſimis monitis juvit: quo nomine multum etiam me debere fateor *Joh. Ludovico* Calandrino & *Gabrieli* Cramero, quibus merito ſe jactat *Geneva*; Quos omnes & alios, qui mihi opem ferre dignati ſunt, obſecro atque obteſtor ut æqui bonique ducant hoc tenue grati animi teſtimonium. Illi qui non laudati ſua inventa in hac opella legent, ne plagii crimine me accuſent, precor. Quiſque ſibi vindicet, quod ſibi debitum putat. Etſi multa ipſe excogitavi, tamen nihil, præter eligendi difficultatem, tranſcribendi laborem, & voluntatem faciendi rem tironibus utilem, mihi tribuo.

Ceterum ſtatueram antiquam notationem a Newtono uſurpatam, ubique ſervare. Sed confeſtim victus Typothetarum conviciis de ejus difficultate querentium, notationem pro multiplicatione & poteſtatibus a Leibnitio repertam adhibere coactus fui.

Fateor, quæ Newtonus facere potuiſſet, tentare temerarium eſſe, perficere difficillimum, & Tironibus ſcribere fortaſſe difficilius. Nam primo omnia perſpicue quidem & enucleate tractanda ſunt, ita tamen ut ſatietatem non pariant; deinde *diligentiſſime hoc eſt eis, qui inſtituunt aliquos atque erudiunt, videndum quo ſua quemque natura maxime ferre videatur* (a). Quod vix facere poteſt ille, qui Diſcipulos audientes & interrogantes docet; quomodo autem facere queat ille, qui litteris aliquid mandat, non video. Quapropter uni aut alteri ſatisfaciens, vereor ne pluribus diſpliceam, & inveniar ſcripſiſſe quæ nec indocti intelligerent nec docti legere curarent. Siquid igitur peccatum eſt, ignoſcas, ob-

(a) Cic. de Off. l. III. 9.

* * *

obſecro, benigne Lector; Quinimo *Horatianum* QUINTILIUM imiteris, qui

> . . . . *Corrige, ſodes,*
> *Hoc, aiebat, & hoc* . . . . . . (*b*)

Et me non eum invenies

> *qui defendere delictum, quam vertere*, malit. (*c*)

(*b*) Hor. Art. Poet. v. 438. 439. (*c*) Ibid. v. 442.

ARITH-

ARITHMETICA
UNIVERSALIS;
SIVE
DE COMPOSITIONE ET RESOLUTIONE
ARITHMETICA
LIBER.

SECTIO I.
CAPUT PRIMUM.

I. Computatio vel fit per *Numeros*, ut in vulgari Arithmetica, vel per *Species*, ut Analyſtis mos eſt. Utraque iisdem innititur fundamentis, & ad eandem metam collimat: *Arithmetica* quidem definite & particulariter, *Algebraica* autem indefinite & univerſaliter; ita ut enuntiata fere omnia, quæ in hac computatione habentur, & præſertim concluſiones, *Theoremata* dici poſſint. Verum Algebra maxime præcellit, quod cum in Arithmetica quæſtiones tantum reſolvantur progrediendo a datis ad quæſitas quantitates, hæc a quæſitis tanquam datis ad datas tanquam quæſitas quantitates plerumque regreditur, ut ad concluſionem aliquam, ſeu Æquationem, quocumque demum modo perveniatur, ex qua quantitatem quæſitam elicere liceat. Eoque pacto conficiuntur difficillima Problemata, quorum reſolutiones ex Arithmetica ſola fruſtra peterentur. Arithmetica tamen Algebræ in omnibus ejus operationibus ita ſubſervit, ut non niſi unicam perfectam *computandi Scientiam* conſtituere videantur; & utramque propterea conjunctim explicabo.

II. Quiſquis hanc Scientiam aggreditur, inprimis vocum & notarum ſigni-

ficationes intelligat, & fundamentales addiſcat operationes, *Additionem* nempe, *Subductionem*, *Multiplicationem*, *Diviſionem*, *Extractionem* radicum, *Reductiones* fractionum & radicalium quantitatum, & modos ordinandi terminos Æquationum, ac incognitas quantitates (ubi plures ſunt) exterminandi. Deinde has operationes, reducendo problemata ad æquationes, exerceat; & ultimo naturam & reſolutionem æquationum contempletur.

CAPUT II.

De vocum quarundam & notarum ſignificatione.

III. PER *numerum* non tam multitudinem unitatum, quam abſtractam quantitatis cujuſvis ad aliam ejuſdem generis quantitatem, quæ pro unitate (*a*) habetur, rationem intelligimus (*b*). Eſtque triplex; integer, fractus & ſurdus: *Integer*, quem unitas metitur: *Fractus*, quem unitatis pars ſubmultiplex metitur: & *Surdus*, cui unitas eſt incommenſurabilis (*d*).

IV. *Integrorum* numerorum notas (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,) & notarum, ubi plures inter ſe nectuntur, valores nemo non intelligit (*e*). Quemadmodum vero numeri in primo loco ante unitatem, ſive ad ſiniſtram, ſcripti denotant denas unitates, in ſecundo centenas, in tertio millenas, *&c.* ſic numeri in primo loco poſt unitatem ſcripti denotant decimas partes unitatis, in ſecundo centeſimas, in tertio milleſimas, *&c.* Hos autem dicimus Fractos *Decimales*, quod in ratione decimali perpetuo decreſcant (*f*). Et ad diſtin-

(*a*) 1. Unitas hæc eſt *reſpectiva*, cum enim partes habeat, licet eam conſiderare ut aggregatum ex ſuis partibus, & quamlibet ejus partem pro unitate ſumere.

Quæ ſit unitas ABSOLUTA, *& an detur in rerum natura, diſputandum non cenſeo. Semper enim agemus de reſpectiva.*

(*b*) 2. Sic, ſi in tempore hora ſumatur pro unitate, ratio, quæ eſt inter horam, & horæ minutum, aut diem, aut menſem &c., dicitur *numerus*. In Lineis, ſi AC ſit unitas linearis,
TAB. I. Fig. 1. ratio, quæ eſt inter AC, & CB, aut AB, eſt numerus &c.

(*d*) 3. Numerus integer eſt eadem quantitas, quam EUCL. *def.* 2. V. & *def.* 5. VII. vocat *multiplicem*, ubi quantitas minor, cujus major multiplex eſt, ſumitur pro unitate. Fractus autem, dicitur ab EUCL. *def.* 1. V. & *def.* 3. VII. *pars.* aut *def.* 4. VII. *partes*, ſi modo major numerus, quem minor metitur, pro unitate capiatur, Surdus vero ab eodem, *def.* 2. X. *incommenſurabilis* appellatur; ſume tantum pro unitate magnitudinem, cui alia eſt incommenſurabilis.

(*e*) 4. Numeri primi *a dextra unitates* exprimunt; ſecundi *decades*; tertii *centena*, id eſt, decadum decades, vel decies decem unitates; quarti *millia*, vel decies centum, vel decies-decies decem unitates &c: ita ut in unitatum Serie 111111 &c. hi numeri ſint *deinceps* proportionales [EUCL. *def.* 20. VII.] vel efficiant *progreſſionem geometricam*, quia ſcilicet prima unitas a dextris decies continetur in ſecunda, ſecunda decies in tertia, ſic *deinceps.*

(*f*) 5. *Cum nec arabes, nec aliæ quæ-*

diſtinguendum integros a decimalibus interjici ſolet comma, vel punctum, vel etiam lineola. Sic numerus 732' 569, denotat ſeptingentas triginta duas unitates, una cum quinque decimis, ſex centeſimis, & novem milleſimis partibus unitatis. Qui & ſic 732, 569, vel etiam ſic 732 | 569, nonnunquam ſcribitur. Atque ita numerus 57104, 2083, denotat quinquaginta ſeptem mille, centum & quatuor unitates, una cum duabus decimis, octo milleſimis, & tribus decimis milleſimis partibus unitatis. Et numerus 0'064 denotat ſex centeſimas & quatuor milleſimas partes. Surdorum & aliorum fractorum notæ in ſequentibus habentur.

V. *Cum rei alicujus quantitas ignota eſt, vel indeterminate ſpectatur, ita ut per* numeros *non liceat exprimere, ſolemus per* Speciem *aliquam ſeu litteram deſignare.*

Et, ſi quando cognitas quantitates tanquam indeterminatas ſpectemus, diſcriminis cauſa deſignamus initialibus Alphabeti literis *a*, *b*, *c*, *d*, & incognitas finalibus *z*, *y*, *x*, &c. Aliqui pro cognitis ſubſtituunt conſonantes vel majuſculas literas, & vocales vel minuſculas pro incognitis (*g*).

VI. *Quantitates vel* Affirmativæ *ſunt ſeu majores nihilo*; *vel* Negativæ *ſeu nihilo minores.*

Sic

quævis numerorum notæ ſua natura, & neceſſario numeros exprimant, ſed negotium hoc ab hominum inſtitutione & arbitrio prorſus pendeat; liquet quod notæ unitatem, aut unitatum collectionem infra decem exponentes, poſſint ad libitum collocari, vel in dextra, vel in ſiniſtra ordinis *parte, vel in aliqua ex mediis.*

6. Si unitates ponuntur in ultima ſede verſus ſcribentis, aut legentis dextram, habent valorem explicatum N°. 4. Hoc accidit in *vulgari* Arithmetica.

7. Si unitates ponuntur in *linea* aut *ordinis* principio, id eſt ad ſcribentis ſiniſtram, numeri eas immediate ad dextram ſequentes, denotant *decimas unitatis partes*, aut ſi mavis, unitates a primis diverſas, & quarum decem primam unitatem conſtituunt. Hæc computandi ratio dicetur Arithmetica *decimalis*.

8. Quod ſi unitates in medio ponuntur, numeri *ab unitate verſus ſiniſtram erunt* ex Arithmetica *vulgari*, ab *eadem verſus dextram* ex *decimali.* Hæc appellari poteſt *miſta*

9. Arithmetica *decimalis*, & *miſta* facile ad vulgarem revocantur ſumendo pro unitate, quæ numeros omnes conficit, unitatem, quæ ad dextram locatur. Sic 732, 569, qui numerus eſt ex Arithmetica miſta & ſignificat ſeptingentas triginta duas unitates, quinque decimas unitatis partes, & ſex centeſimas cum novem milleſimis, ſi unitas, ad quam omnia referuntur, in medio locetur; ſi vero poſita concipiatur in lineæ finem ad dextram, eſt ex Arithmetica vulgari, & ſignificat ſeptingenta triginta duo millia unitatum cum quingentis ſexaginta novem ex iiſdem unitatibus. Hoc pacto aliquas difficultates, quibus Arithmetica decimalis eſt obnoxia, effugies; memento tamen has unitates non eſſe eaſdem, ac illas, quas haberes, ſi numerum eundem juxta miſtæ Arithmeticæ regulas explicares.

(*g*) 10. Hoc omnino obſolevit: apud omnes recentiores primæ Alphabeti literæ cognitas, ultimæ incognitas deſignant. Animadverte autem, quod æquales quantitates per eandem *Speciem*, inæquales vero per diverſas exponuntur; ſiqua notanda præterea ſunt, ea ſuis locis invenies.

(*h*) 15.

Sic in rebus humanis poſſeſſiones dici poſſunt bona affirmativa, debita vero bona negativa. Inque motu locali progreſſus dici poteſt motus affirmativus, & regreſſus motus negativus, quia prior auget & poſterior diminuit iter confectum. Et ad eundem modum in Geometria, ſi linea verſus plagam quamvis ducta pro affirmativa habeatur, negativa erit quæ verſus plagam oppoſitam ducitur. Veluti ſi A B dextrorſum ducatur, & B C ſiniſtrorſum, ac A B ſtatuatur affirmativa; tunc B C pro negativa habebitur, eo quod inter ducendum diminuit AB, redigitque vel ad breviorem A C, vel ad nullam, ſi forte C inciderit in ipſum A, vel ad minorem nulla, ſi B C longior fuerit quam A B, de qua aufertur.

TAB. I. Fig. 1.

Negativæ quantitati deſignandæ ſignum $-$, *Affirmativæ* ſignum $+$ præfigi ſolet. Signum $\mp$ incertum eſt, & ſignum $\pm$ etiam incertum ſed priori contrarium.

VII. *In aggregato quantitatum nota + ſignificat quantitatem ſuffixam eſſe ceteris* addendam *& nota — eſſe* ſubducendam.

Et has notas vocabulis *plus* & *minus* exprimere ſolemus (*h*). Sic $2+3$, ſive 2 plus 3, valet ſummam numerorum 2 & 3, hoc eſt 5. Et $5-3$, ſive 5 minus 3, valet differentiam quæ oritur ſubducendo 3 a 5, hoc eſt 2. Et $-5+3$ valet differentiam quæ oritur ſubducendo 5 a 3, hoc eſt -2: Et $6-1+3$ valet 8. Item $a+b$ valet ſummam quantitatum a & b: Et $a-b$ valet differentiam, quæ oritur ſubducendo b ab a. Et $a-b+c$ valet ſummam iſtius differentiæ & quantitatis c. Puta ſi a ſit 5, b 2, & c 8; tum $a+b$ valebit 7; & $a-b$ 3; & $a-b+c$ 11. Item $2a+3a$ valet $5a$. Et $3b-2a-b+3a$ valet $2b+a$; nam $3b-b$ valet $2b$ & $-2a+3a$ valet a, quorum aggregatum eſt $2b+a$. Et ſic in aliis.

Hæ autem notæ + & — dicuntur *Signa*. Et ubi neutrum initiali quantitati præfigitur, ſignum + ſubintelligi debet.

VIII

(*h*) 11. Hinc explicari poteſt quod aſſertum eſt *Art.* VI. de contrariis plagis, ad quas in Geometria tendunt lineæ poſitivæ, & affirmativæ. Signum + additionem, ſignum — ſubtractionem ſignificat; ſed, ut lineæ C E ad punctum E addatur recta E B, deſcribendus eſt radio E B centro E arcus verſus B, & recta C E ad peripheriam producenda, ut patet: ut autem ex C E ad punctum E ſubducatur E A, arcus centro E radio E A verſus A deſcribendus eſt; ergo lineæ additæ & ſubductæ, ſive poſitivæ ac negativæ, tendunt ad partes contrarias.

TAB. A. Fig. 1.

12. *Aggregatum*, aut *differentia* ex pluribus quantitatibus [ut $a+b-c$ &c.] dicitur quantitas *compoſita*, vel *complexa*.

1°. Additio *ſolum*, *&* ſubtractio, *ſive ſingulæ, ſive ambæ ſimul* (*ut in* a+b+c, *ubi ſolum eſt additio, aut* — a—b—c, *ubi ſola ſubductio, aut denique* a+b—3 c—4 f—5 e *&c*, ubi *ſubductio, & additio ſimul habentur*) *efficiunt quantitates complexas. Ceteræ operationes* (*quæcunque demum eæ ſint*) *quantitates relinquunt* ſimplices *aut* incomplexas.

2°. *Quantitates ſimplices vocantur etiam* TERMINI.

(*i*) D:-

VIII. Multiplicatio proprie dicitur quæ fit per numeros integros, utpote quærendo novam quantitatem toties *majorem* quantitate multiplicanda quoties numerus multiplicans ſit *major* unitate (*i*). Sed aptioris vocabuli defectu multiplicatio etiam dici ſolet quæ fit per fractos aut ſurdos numeros, quærendo novam quantitatem in *quacunque ratione* ad quantitatem multiplicandam quam habet multiplicator ad unitatem (*k*). Neque tantum fit per abſtractos numeros, ſed etiam per concretas quantitates, ut per lineas, ſuperficies, motum localem, pondera &c., quatenus hæ ad aliquam ſui generis notam quantitatem tanquam unitatem relatæ, rationes numerorum exprimere poſſunt & vices ſupplere. Quemadmodum ſi quantitas A multiplicanda ſit per lineam duodecim pedum, poſito quod linea bipedalis ſit unitas, producentur per iſtam multiplicationem 6 A, ſive ſexies A, perinde ac ſi A multiplicaretur per abſtractum numerum 6, ſiquidem 6 A ſit in ea ratione ad A quam habet Tab. I. linea duodecim pedum ad unitatem bipedalem (*l*). Atque ita ſi duas quaſvis Fig. 3. lineas A C & A D per ſe multiplicare oportet, capiatur AB unitas, & agatur BC eique parallela DE, & AE productum erit hujus multiplicationis, eo quod ſit ad AD ut AC ad unitatem AB (*m*). Quin etiam mos obtinuit ut

(*i*) *Definitio* Newtoni *in hanc recidit.*

13. Quantitatem aliquam ſibimet aliquoties addere, dicitur eam *multiplicare*, & hæc repetita additio vocatur *multiplicatio*.

Sic 4. ſibimetipſi ter addere dicitur multiplicare numerum 4 per 3.

14. Ut multiplicatio fiat duo requiruntur; *quantitas* ſibimet addenda, & *numerus* exprimens quoties *quantitas* ſibi addi debet. Facta autem multiplicatione obtinetur altera *quantitas*, quæ repetita additione conficitur.

15. Quantitas ſibimet aliquoties addenda dicitur *multiplicandum*.

16. Numerus indicans *quoties* quantitas ſibi debet addi, *multiplicator*.

17. *Productum* vero *quantitas* multiplicatione genita.

18. *Multiplicandum* poteſt eſſe *quantitas* quævis.

19. *Multiplicator* ſemper eſſe debet *numerus*.

20. *Productum* toties *multiplicandum* continet, quoties *multiplicator* continet unitatem, aut hæ quantitates ſunt proportionales.

21. Quævis quantitas poteſt concipi tanquam productum ex ſe ipſa in unitatem.

(*k*) 22. Definitio *Auctoris* & noſtra explicatio dant productum *multiplex multiplicandi*; aſt fracti non unitatem, ſed unitatis partes continent; unitas vero ſurdis eſt incommenſurabilis (*ſupra* N°. 3.); quare in neutris inveniri poteſt nova quantitas multiplex multiplicandi, ſeu toties *major* quantitate multiplicanda, quoties numerus multiplicans eſt *major* unitate. Tunc igitur nulla fit multiplicatio proprie dicta.

(*l*) 23. Faber murarius *ex gr.* pro duobus muri pedibus tulit tres ſeſtertios, quæritur quot ſeſtertii huic debeantur pro duodecim pedibus. Hic tres ſeſtertii locum tenent quantitatis A, & ad inveniendum quod petitur, non tres ſeſtertii multiplicandi ſunt per ſex pedes, quod eſſet abſurdum; ſed quærenda eſt ſeſtertiorum quantitas toties ternario ſeſtertiorum numero major, quoties abſtractus *duodenarius* numerus abſtracto *binario* major eſt, id eſt ternarii ſextuplex: ubi quantitates concretæ, duo, & duodecim pedes non conſiderantur, ſed numeri 2; 6; earum rationem exprimentes abſtracte ſumuntur.

(*m*) 24. Hoc ſemper intelligendum in hypotheſi notæ cujuſdam lineæ, quæ pro unitate ſumitur. Quod ſi nulla detur unitas, ad arbitrium ea ſumi poteſt: tunc autem productum inve-

Digitized by Google

ut geneſis ſeu deſcriptio ſuperficiei per lineam ſuper alia linea ad rectos angulos moventem dicatur multiplicatio iſtarum linearum. Nam quamvis linea utcunque multiplicata non poſſit evadere ſuperficies (*n*), adeoque hæc ſuperficiei e lineis generatio longe alia ſit a multiplicatione; in hoc tamen conveniunt quod numerus unitatum in alterutra linea multiplicatus per numerum unitatum in altera, producat abſtractum numerum unitatum in ſuperficie lineis iſtis comprehenſa, ſi modo unitas ſuperficialis definiatur, ut ſolet, Tab. I. Fig. 2. Quadratum cujus latera ſunt unitates lineares. Quemadmodum ſi recta AB conſtet quatuor unitatibus & AC tribus, tum rectangulum AD conſtabit quater tribus ſeu duodecim unitatibus quadratis, ut inſpicienti Schema patebit (*o*). Eſtque ſimilis analogia ſolidi & ejus quod continua trium quantitatum multiplicatione producitur. Et hinc viciſſim evenit quod vocabula *ducere*, *contentum*, *rectangulum*, *quadratum*, *cubus*, *dimenſio*, *latus*, & ſimilia, quæ ad Geometriam ſpectant, arithmeticis tribuantur operationibus. Nam per *quadratum*, vel *rectangulum*, vel *quantitatem duarum dimenſionum* non ſemper intelligimus ſuperficiem, ſed ut plurimum quantitatem alterius cujuſcunque generis quæ multiplicatione aliarum duarum quantitatum producitur, & ſæpiſſime lineam quæ producitur multiplicatione aliarum duarum linearum. Atque ita dicimus *cubum* vel *parallelipipedum*, vel *quantitatem trium dimenſionum* pro eo quod binis multiplicationibus producitur (*p*), *latus* pro radice, *ducere* pro multiplicare; & ſic in aliis.

IX. *Numerus ſpeciei alicui immediate præfixus denotat ſpeciem illam toties ſumendam eſſe* (*q*).

Sic $2a$ denotat duo a, $3b$ tria b, $15x$ quindecim x.

X. *Duæ*

invenitur *hypothetice*, id eſt poſito quod unitas ſit illa ipſa linea, quæ pro unitate ſumitur, nam unitate mutata, mutatur & productum, ut liquet. Sæpe ſæpius autem unitas ex problematis ſolvendi legibus innoteſcit.

(*n*) 25. Siquidem productum ex linea in lineam eſt linea.

(*o*) 26. Negotium faceſſere tironibus poſſet, quod hic unitas ſuperficialis per analogiam comparata videtur cum linea, contra Eucl. *def.* 3. V. Sed duæ faciendæ ſunt analogiæ; id eſt, ut unitas linearis ad lineam tripedalem, ſic quadripedalis ad duodecim pedum lineam, & ut unitas linearis ad lineam duodecim pedum, ſic unitas ſuperficialis, ad ſuperficiem continentem duodecim unitates ſuperficiales.

Tab. A. Fig. 2. (*p*) 27. Si recta AE, quam ſupra invenimus, diceretur quantitas *duarum dimenſionum*, (eſt enim productum ex rectis AC, AD) & rurſus quæratur quarta AF poſt, AB (unitatem), quamvis rectam AG, & AE; hæc quarta AF diceretur quantitas trium dimenſionum, cum ſit productum ex quantitate duarum dimenſionum in lineam. Hoc probe notandum, ne quid moleſtiæ faciant in Geometria ſublimiore quantitates quatuor, quinque &c. dimenſionum; cum in rerum natura nulla detur quantitas habens plures, quam tres dimenſiones, id eſt ſolidum. Sed hic vox *dimenſio* improprie uſurpatur.

(*q*) 28. Hic numerus ſpeciei alicui immediate præfixus vocatur *coefficiens*.

29. Nota quod terminus, aut quantitas ſimplex, proprie loquendo, habet unitatem pro coefficiente, itaque $3a$ non eſt unus terminus ſed tres: aliquando tamen improprie quævis quantitas quovis coefficiente prædita dicitur *terminus*.

(*) *Nos*

Digitized by Google

X. *Duæ vel plures ſpecies immediate connexæ deſignant* factum, *ſeu quantitatem quæ ſit per multiplicationem omnium in ſe invicem.*

Sic *a b* denotat quantitatem quæ fit multiplicando *a* per *b*. Et *a b x* denotat quantitatem quæ fit multiplicando *a* per *b*, & factum illud per *x*. Puta ſi *a* ſit 2, & *b* ſit 3, & *x* ſit 5, tum *a b* erit 6; *a b x* 30.

XI. Inter quantitates ſeſe multiplicantes, nota x, vel vocabulum *in* ad factum deſignandum nonnunquam interſcribitur (*). Sic 3 x 5 vel 3 in 5 denotat 15. Sed uſus harum notarum præcipuus eſt, ubi compoſitæ quantitates ſeſe multiplicant. Veluti ſi $y-2b$ multiplicet $y+b$, terminos utriuſque multiplicatoris lineola ſuper impoſita connectimus & ſcribimus $\overline{y-2b}$ in $\overline{y+b}$, vel $\overline{y-2b} \times \overline{y+b}$. (**)

XII. Divisio proprie eſt quæ fit per numeros integros quærendo novam quantitatem toties *minorem* quantitate dividenda quoties unitas ſit *minor* diviſore. Sed ob analogiam hæc vox etiam uſurpari ſolet cum nova quantitas *in ratione quacunque* ad quantitatem dividendam quæritur, quam habet unitas ad diviſorem; ſive diviſor ille ſit fractus aut ſurdus numerus aut alia cujuſvis generis quantitas (*r*). Sic ad dividendam lineam A E per lineam A C, exiſtente A B unitate, agenda eſt E D parallela B C, & erit A D quotiens. Imo & diviſio propter ſimilitudinem quandam dicitur cum rectangulum ad datam lineam tanquam baſem applicatur ut inde noſcatur altitudo (*s*). Tab. I. Fig. 3.

XIII.

(*) *Nos aliorum exemplum ſecuti* punctum *ſæpe interponimus.*

(**) *Quantitates compoſitæ ſeſe multiplicantes etiam uncis includuntur ſic*, [y—2b] [y+b], *quod commodius eſt.*

(*r*) 30. Quæ Art. VIII. monuimus, facile huc transferri poſſunt & debent, poſitis tantum his definitionibus.

31. Quærere quæuam quantitas ſibimet aliquoties addita conficiat quantitatem datam, dicitur *hanc dividere.*

32. Quantitas, quæ dividitur, dicitur *dividendum.*

33. *Diviſor* autem numerus exprimens, quoties aliqua quantitas ſibimet addita fuerit, ut dividendum conflaretur.

34. *Quotiens* appellatur quantitas, quæ toties repetita quoties unitas eſt in numero, quem diximus diviſorem, dividendum componit. Sic ſi 12 eſt dividendum, & 3 diviſor, 4 eſt quotiens.

35 Tantum notabo, quod quantitas per ſeipſam diviſa dat *unitatem*, quia quantitas quævis *ſemel* ſumi debet, ut ſeipſam æquet.

(*s*) 36. Quæritur *ex. gr.* altitudo rectanguli A F rectæ E G, tanquam baſi applicati, ſive, data recta E G, quæritur G B, ita ut rectangulum ex E G in G B æquet datum rectangulum AF. Hæc applicatio dicitur minus proprie diviſio, & ſolum ob *quondam ſimilitudinem*, quæ in hoc ſita eſt. Ut habeatur G B, quærenda eſt quarta poſt E G, A D, D F; (Eucl. 16. VI.): at ſi pro lineis capiuntur numeri, hæc quarta reperitur invicem ducendo medias & productum hoc per extremam dividendo (ut facile pro- Tab. A. Fig. 3.

Digitized by Google

XIII. ***Quantitas infra quantitatem cum lineola interjecta denotat*** quotum, ***ſeu quantitatem quæ oritur ex diviſione ſuperioris quantitatis per inferiorem.***

Sic $\frac{6}{2}$ denot quantitatem quæ oritur dividendo 6 per 2, hoc eſt 3: & $\frac{5}{8}$ quantitatem quæ oritur dividendo 5 per 8, hoc eſt octavam partem numeri 5: & $\frac{a}{b}$ denotat quantitatem quæ oritur dividendo a per b; puta ſi a ſit 15 & b 3, tum $\frac{a}{b}$ denotat 5 (*t*). Et ſic $\frac{ab-bb}{a+x}$ denotat quantitatem quæ oritur dividendo $ab-bb$ per $a+x$. Atque ita in aliis.

Hujuſmodi quantitates *fractiones* dicuntur, parſque ſuperior *Numerator*; ac inferior *Denominator*.

XIV. Aliquando diviſor quantitati diviſæ, interjecto arcu, præfigitur.

Sic ad deſignandum quantitatem quæ oritur ex diviſione $\frac{axx}{a+b}$ per $a-b$, ſcribi poteſt $\overline{a-b)}\ \frac{axx}{a+b}$ (*).

XV. Etſi multiplicatio per immediatam quantitatum conjunctionem denotari ſolet, tamen numerus integer ante numerum fractum denotat ſummam utriuſque. Sic $3\frac{1}{2}$ denotat tria cum ſemiſſe.

XVI. ***Si quantitas ſeipſam multiplicet, numerus factorum, compendii gratia, ſuffigi ſolet.***

Sic pro aaa ſcribimus a^3, pro $aaaa$ ſcribimus a^4, pro $aaaaa$ ſcribimus a^5, & pro $aaabb$ ſcribimus a^3bb vel a^3b^2. Puta ſi a ſit 5 & b ſit 2, tum a^3 erit 5.5.5 ſive 125, & a^4 erit 5.5.5.5 ſive 625, atque a^3b^2 erit 5.5.5.2.2 ſive 500 (*u*).

Ubi

probatur ex EUCL. 19. VII.) atqui ex hypoth. factum mediarum, id eſt rectangulum AF. datum eſt; ergo facienda reſtat ſola quaſi diviſio; quarta autem proportionalis poſt tres datas invenitur per EUCL. 12. VI. Applicatio parallelogrammi ad datam rectam perficitur etiam per EUCL. 44. I.

TAB. I. Fig. 3. (*t*) 42. Si AE ſit a, AC b, AB 1, erit AD $\frac{a}{b}$. Secundum exemplum infra explicabitur.

(*) *Solet etiam quantitas dividenda prior ſcribi uncis incluſa, huic adnecti duo puncta, & hinc adjici Diviſor uncis incluſus, ſi eſt compoſitus. Hoc pacto* $[ab-bb]:[a+x]$; *ſed cum hæc duo puncta facile oculos fallant, ab hac ſcribendi ratione abſtinemus, optantes ut aliquis aptius diviſionis ſignum excogitet.*

(*u*) 43. Si a ſit linea quævis, erit a^2 tertia proportionalis poſt 1 & a; ſed a^3 quarta poſt 1, a, & a^2, & quarta ex continue proportionalibus poſt 1, a, a^2, Siquidem 1 ad a, ut a ad a^2; & a ad a^2, ut a^2 ad a^3; Aſt a^4 eſt tertia poſt 1, & a^2, aut quarta poſt 1, a, & a^3, aut quinta continue proportionalis poſt 1, a, a^2, a^3, nam 1 ad a, ut a ad a^2; a ad a^2,

ut

Ubi nota quod numerus inter duas ſpecies immediate ſcriptus, ad priorem ſemper pertinet. Sic 3 in quantitate a^3bb non denotat bb ter capiendum eſſe, ſed a in ſe bis ducendum.

Nota etiam quod hæ quantitates tot *dimenſionum* vel *poteſtatum* vel *dignitatum* eſſe dicuntur quot factoribus ſeu quantitatibus ſe multiplicantibus conſtant, & numerus ſuffixus vocatur *Index* (*) poteſtatum vel dimenſionum. Sic aa eſt duarum dimenſionum vel poteſtatum, & a^3 trium, ut indicat ſuffixus numerus 3. (x).

Dicitur etiam aa quadratum, a^3 cubus, a^4 quadrato-quadratum, a^5 quadrato-cubus, a^6 cubo-cubus, a^4 quadrato-quadrato-cubus, & ſic porro. Et quantitas a, ex cujus in ſe multiplicatione hæ poteſtates generantur, dicitur earum *Radix*, nempe radix quadratica quadrati aa, cubica cubi a^3, &c.

XVII. Cum autem radix per ſeipſam multiplicata producat quadratum, & quadratum illud iterum per radicem multiplicatum producat cubum, *&c.* erit (ex definitione multiplicationis,) ut unitas ad radicem, ita radix ad quadratum, & quadratum ad cubum, *&c.* Adeoque quantitatis cujuſcunque *radix quadratica* erit medium proportionale inter unitatem & quantitatem illam, & *radix cubica* primum e duobus medie proportionalibus, & *radix quadrato-quadratica* primum e tribus, & ſic præterea. Duplici igitur affectione radices innoteſcunt, tum quod ſeipſas multiplicando producant ſuperiores poteſtates, tum quod ſint e mediis proportionalibus inter iſtas poteſtates & unitatem. Sic numeri 64 radicem quadraticam eſſe 8 & cubicam 4, vel ex eo patet quod 8 . 8 & 4 . 4 . 4 valeant 64, vel quod ſit 1 ad

ut a^2 ad a^3, a^2 ad a^3, ut a^3; ad a^4. (Eucl. 17. VIII.) quæ proportionales reperiendæ ſunt per Eucl. 11. VI. Ut autem habeatur a^3b^2, reperiatur quarta continue proportionalis poſt 1 & a, id eſt a^3: hinc fiat, ut 1 ad a^3, ſic b ad quartam a^3b; & rurſus, ut 1 ad a^3b, ſic b ad quartam a^3b^2 quæſitam: ſeu brevius ſic; fiat, 1 ad a, ut b ad quartam ab, & rurſus 1 ad ab, ad quartam a^2b^2, & denique 1 ad a, ut a^3b^2 ad quartam a^3b^2 quæſitam.

(*) Seu *Exponens.*

44. (x) Quantitas, quæ non producta eſt ex duabus, aut pluribus aliis multiplicatis invicem, dicitur *unius dimenſionis:* Sic a, b, &c. ſunt quantitates unius dimenſionis, & index ſubintelligitur *unitas.*

45. Si duæ quantitates, quæ ſingulæ ſunt unius dimenſionis, ut a, & b in ſe invicem ducantur, factum, ut ab, dicitur *duarum dimenſionum.*

46. Ubi plures quantitates, quarum ſingulæ ſunt unius pluriumve dimenſionum, ut a^2, b^2c, f, in ſe invicem ducuntur, factum tot eſt dimenſionum, quot unitates ſunt in ſumma omnium indicum; ita factum a^2b^2cf eſt ſex dimenſionum. Si vero quantitas eſt complexa, dicitur tot dimenſionum, quot habet terminus altiſſimus. Sic quantitas $a^6 + b^5 - c^3 + 1$ dicitur ſex dimenſionum. Quod ſi adſit incognita, ejus altiſſimus terminus dimenſionem quantitatis determinat; ſic $x^4 - bx^3 + bcx^2 - bcex + bceh$ eſt quatuor dimenſionum.

47. Ut ergo quantitas quædam ad poteſtatem datam elevetur, ei ſuffigendus eſt datus index: Sic tertia poteſtas ipſius a, eſt a^3; & ad evehendam b ad poteſtatem indeterminatam, cujus index eſt m, ſcribatur b^m &c.

TAB. I. Fig. 4. ad 8 ut 8 ad 64, & 1 ad 4 ut 4 ad 16 & 16 ad 64. Et hinc ſi lineæ alicujus A B radix quadratica extrahenda eſt, produc eam ad C ut ſit B C unitas, dein ſuper A C deſcribe ſemicirculum, & ad B erige perpendiculum huic circulo occurrens in D, eritque B D radix, quia media proportionalis eſt inter A B & unitatem B C.

XVIII. *Ad deſignandam* radicem *alicujus quantitatis præfigi ſolet nota* $\surd$, *ſi radix ſit quadratica*, *&* $\surd$ 3: *Si ſit cubica*, *&* $\surd$ 4: *Si quadrato-quadratica*, &c. (*y*).

Sic $\surd\, 64$ denotat 8; & $\surd\, 3 : 64$ denotat 4; & $\surd\, aa$ denotat a; & $\surd\, ax$ denotat radicem quadraticam ex ax, (*z*) & $\surd\, 3 : 4axx$ radicem cubicam ex $4axx$. Ut ſi a ſit 3, & x 12; tum $\surd\, ax$ erit $\surd\, 36$, ſeu 6; & $\surd\, 3 : 4axx$ erit $\surd\, 3 : 1728$, ſeu 12. Et hæ radices, ubi non licet extrahere, dicuntur *ſurdæ quantitates*, ut $\surd\, ax$; vel *ſurdi numeri* ut $\surd\, 12$.

XIX. Nonnulli pro deſignanda quadratica poteſtate uſurpant q, pro cubica c, pro quadrato-quadratica qq, pro quadrato-cubica qc, &c. Et ad hunc modum pro quadrato, cubo, & quadrato-quadrato ipſius A, ſcribitur Aq, Ac, Aqq, &c. Et pro radice cubica ex $abb - x^3$ ſcribitur $\surd c : abb - x^3$. Alii alias notas adhibent, ſed quæ jam fere exoleverunt.

XX. *Nota* $=$ *deſignat quantitates hinc inde* æquales *eſſe*.

Sic $x = b$ deſignat x æqualem eſſe b.

XXI. *Nota* :: *ſignificat quantitates hinc inde* proportionales *eſſe*.

Sic $a.\ b :: c.\ d$, ſignificat eſſe a ad b ut c ad d. Et $a.\ b.\ e :: c.\ d.\ f$ eſſe a, b, & e inter ſe ut c, d, & f inter ſe reſpective, vel eſſe a ad c, b ad d & e ad f in eadem ratione.

XXII. Denique notarum, quæ ex his componuntur, interpretatio per analogiam facile innoteſcit Sic enim $\frac{3}{4}a^3bb$ denotat tres quartas partes ipſius

(*y*) 48. Sæpius tamen *index* aut *exponens* radicis ponitur intra crura ipſius ſigni radicalis $\surd$, ſic $\surd\, b$, aut $\sqrt[2]{b}$ ſignificat radicem quadratam ipſius b, aut mediam proportionalem inter 1 & b; ſed $\sqrt[3]{ab^2}$, & $\sqrt[4]{ab^3}$ ſignificat radicem cubicam, & quadrato-quadraticam ipſarum ab^2, ab^3, aut primam ex duabus mediis proportionalibus 1 & ab^2; ex tribus autem, inter 1 & ab^3. Patet autem, quod radix m ipſius a^m, eſt a, quæ invenitur deleto indice.

(*z*) 49. Si quantitas expreſſa per ax ſit recta, hæc erit quarta proportionalis poſt 1, a, & x (*art.* VIII.) & tunc habebitur $\surd\, ax$ quærendo mediam proportionalem inter unitatem linearem, & lineam quæ exponitur per ax, ut in *art.* præcedente.

50. Si vero quantitas ax ſit rectangulum ex recta expreſſa per a, in rectam expoſitam per x, tunc $\surd\, ax$ invenietur per EUCL. 14. II., aut quæſita media proportionali inter a & x per EUCL. 13. VI.

Digitized by Google

ipſius a^3bb, & $3\frac{a}{c}$ ter $\frac{a}{c}$, & $7\sqrt{ax}$ ſepties $\sqrt{ax}$. Item $\frac{a}{b}x$ denotat id quod fit multiplicando x per $\frac{a}{b}$, & $\frac{5ee}{4a+9e}Z^3$ id quod fit multiplicando Z^3 per $\frac{5ee}{4a+9e}$, hoc eſt per quotum exortum diviſione $5ee$ per $4a+9e$; & $\frac{2a^3}{9c}\sqrt{ax}$ id quod fit multiplicando $\sqrt{ax}$ per $\frac{2a^3}{9c}$; & $\frac{7\sqrt{ax}}{c}$ quotum exortum diviſione $7\sqrt{ax}$ per c; & $\frac{8a\sqrt{ax}}{2a+\sqrt{cx}}$ quotum exortum diviſione $8a\sqrt{cx}$ per ſummam quantitatum $2a+\sqrt{cx}$. Et ſic $\frac{3axx-x^3}{a+x}$ denotat quotum exortum diviſione differentiæ $3axx-x^3$ per ſummam $a+x$, & $\sqrt{\frac{3axx-x^3}{a+x}}$ radicem ejus quoti, & $2a+3c\sqrt{\frac{3axx-x^3}{a+x}}$ id quod fit multiplicando radicem illam per ſummam $2a+3c$. Sic etiam $\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}$ denotat radicem ſummæ quantitatum $\frac{1}{4}aa$ & bb & $\sqrt{\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}}$ radicem ſummæ quantitatum $\frac{1}{2}a$ & $\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}$, & $\frac{2a^3}{aa-zz}\sqrt{\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}}$ radicem illam multiplicatam per $\frac{2a^3}{aa-zz}$. Et ſic in aliis.

XXIII. Ceterum nota quod in hujuſmodi complexis quantitatibus non opus eſt ad ſignificationem ſingularum literarum ſemper attendere; ſed ſufficit in genere tantum intelligere, *e. g.* quod $\sqrt{\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}}$ ſignificat radicem $\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}$; quodcunque tandem prodeat illud aggregatum cum numeri vel lineæ pro litteris ſubſtituuntur. Atque ita quod $\frac{\sqrt{\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}}}{a-\sqrt{ab}}$ ſignificat quotum exortum diviſione quantitatis $\sqrt{\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}}$ per quantitatem $a-\sqrt{ab}$, perinde ac ſi quantitates illæ ſimplices eſſent & cognitæ, etſi quænam ſint impræſentiarum prorſus ignoretur, & ad ſingularum partium conſtitutionem ſeu ſignificationem neutiquam attendatur. Id quod monendum eſſe duxi ne complexione terminorum Tyrones quaſi conterriti in limine hæreant.

CAPUT TERTIUM

DE ADDITIONE.

XXIV. NUMERORUM, ubi *non ſunt admodum compoſiti*, additio per ſe manifeſta eſt. Sic quod 7 & 9 ſeu 7 + 9 faciunt 16, & quod 11 + 15 faciunt 26 prima fronte patet.

At in *magis compoſitis* opus peragitur *ſcribendo numeros ſerie deſcendente & ſummas columnarum ſigillatim colligendo.*

Quemadmodum ſi numeri 1357 & 172 addendi ſunt, ſcribe alterutrum 172 infra alterum 1357 ita ut hujus unitates 2 alterius unitatibus 7 ſubjiciantur, ceterique numeri numeris correſpondentibus, nempe deni 7 denis 5, & centenus 1 centenis 3 (*a*).

$$\begin{array}{r} 1357 \\ 172 \\ \hline 1529 \end{array}$$

Tum incipiendo ad dextram, dic 2 & 7 faciunt 9, quem ſcribe infra. Item 7 & 5 faciunt 12, cujus poſteriorem numerum 2 ſcribe infra, priorem vero 1 afferva proximis numeris 1 & 3 adjiciendum (*b*). Dic itaque prætere-rea 1 & 1 faciunt 2, cui 3 adjectus facit 5, & ſcribe 5 infra, & manebit tantum 1 prima figura ſuperioris numeri, quæ etiam infra ſcribenda eſt, & ſic habebitur ſumma 1529.

XXV. Sic numeros 87899 + 13403 + 885 + 1920, quo in unam ſummam redigantur, ſcribe in ſerie deſcendente ita ut unitates unam columnam, deni numeri aliam, centeni tertiam, milleni quartam conſtituant, & ſic prætera.

87899

(*a*) 51. NUMERI ſedes diverſas occupantes in eadem linea conſtant unitatibus diverſis, & diverſi generis (N°. 4.) ergo ſimul addi nequeunt, ita ut unam ſummam unius nominis efficiant; ſic novem decades cum duabus unitatibus non efficiunt certe undecim unitates, quamvis novem unitates cum duabus unitatibus undecim conflent, ergo homogenei numeri homogeneis addendi ſunt, quod facilius efficitur alios aliis ſupponendo.

(*b*) 52. Hic 12 eſt duodecim decades, aut unum centenarium cum duabus decadibus; ſed locus centenis affectus eſt tertius, ergo hoc centenarium in tertium locum ſervandum eſt, quæ demonſtratio de ceteris intelligenda eſt.

Digitized by Google

$$\begin{array}{r} 87899 \\ 13403 \\ 1920 \\ 885 \\ \hline 104107 \end{array}$$

Deinde dic $5+3$ valent 8, & $8+9$ valent 17, ſcribeque 7 infra, & 1 adjice proximis numeris dicendo $1+8$ valent 9, $9+2$ valent 11, ac $11+9$ valent 20; ſubſcriptoque 0, dic iterum ut ante $2+8$ valent 10, $10+9$ valent 19, $19+4$ valent 23, & $23+8$ valent 31, adeoque, aſſervato 3, ſubſcribe 1 ut ante; & iterum dic $3+1$ valent 4, $4+3$ valent 7, & $7+7$ valent 14. Quare ſubſcribe 4, denuoque dic $1+1$ valent 2, & $2+8$ valent 10, quem ultimo ſubſcribe, & omnium ſummam habebis 104107.

XXVI. Ad eundem modum numeri decimales adduntur ut in annexo paradigmate videre eſt (c)

$$\begin{array}{r} 630'953 \\ 51'0807 \\ 305'37 \\ \hline 987'4037 \end{array}$$

XXVII. *In terminis algebraicis* additio *fit connectendo quantitates addendas cum ſignis propriis, & inſuper uniendo quæ poſſunt uniri.*

Sic a & b faciunt $a+b$; a & $-b$ faciunt $a-b$; $-a$ & $-b$ faciunt $-a-b$; $7a$ & $9a$ faciunt $7a+9a$; $-a\sqrt{ac}$ & $b\sqrt{ac}$ faciunt $-a\sqrt{ac}+b\sqrt{ac}$ vel $b\sqrt{ac}-a\sqrt{ac}$, nam perinde eſt quo ordine ſcribantur.

XXVIII. *Quantitates affirmativæ quæ ex parte ſpecierum conveniunt*, uniuntur addendo numeros præfixos quibus ſpecies multiplicantur.

Sic $7a+9a$ faciunt $16a$.
Et $11bc+15bc$ faciunt $26bc$.

Item $3\frac{a}{c}+5\frac{a}{c}$ faciunt $8\frac{a}{c}$,

& $2\sqrt{ac}+7\sqrt{ac}$ faciunt $9\sqrt{ac}$,
&
$6\sqrt{ab-xx}+7\sqrt{ab-xx}$ faciunt $13\sqrt{ab-xx}$.
Et ad eundem modum $6\sqrt{3}+7\sqrt{3}$ faciunt $13\sqrt{3}$.
Quinetiam $a\sqrt{ac}+b\sqrt{ac}$ faciunt $\overline{a+b}\sqrt{ac}$, additis nempe a & b tanquam ſi eſſent numeri multiplicantes $\sqrt{ac}$.

(c) 53. Reduc numeros decimales ad vulgares (N°. 9.) & unitatibus unitates ſubſcribe, ac perge juxta regulam ſuperiorem: aut unitates integras integris unitatibus ſuppone, cetera vero ſuis locis pone, & tunc homogenea addes homogeneis.

Et ſic

$$\overline{2a+3c}\sqrt{\frac{3axx-x^3}{a+x}}+3a\sqrt{\frac{3axx-x^3}{a+x}}$$

faciunt $\overline{5a+3c}\sqrt{\frac{3axx-x^3}{a+x}}$ eo quod $2a+3c$ & $3a$ faciant $5a+3c$.

XXIX. *Fractiones affirmativa quarum idem eſt denominator*, uniuntur addendo numeratores (*d*).

Sic $\frac{1}{5}+\frac{2}{5}$ faciunt $\frac{3}{5}$,

&

$$\frac{2ax}{b}+\frac{3ax}{b} \text{ faciunt } \frac{5ax}{b}$$

&

$$\frac{8a\sqrt{cx}}{2a+\sqrt{cx}}+\frac{17a\sqrt{cx}}{2a+\sqrt{cx}} \text{ faciunt } \frac{25a\sqrt{cx}}{2a+\sqrt{cx}},$$

&

$$\frac{aa}{c}+\frac{bx}{c} \text{ faciunt } \frac{aa+bx.}{c}$$

XXX. *Negativæ quantitates* eodem modo adduntur ac affirmativæ.

Sic -2 & -3 faciunt -5;

$$-\frac{4ax}{b} \text{ \& } -\frac{11ax}{b} \text{ faciunt} -\frac{15ax}{b}$$

$-a\sqrt{ax}$ & $-b\sqrt{ax}$ faciunt $\overline{-a-b}\sqrt{ax}$.

Ubi vero *negativa quantitas affirmativæ adjicienda eſt*, oportet affirmativam negativa diminuere.

Sic 3 & -2 faciunt 1;

$$-\frac{11ax}{b} \text{ \& } \frac{4ax}{b} \text{ faciunt} -\frac{7ax}{b}.$$

ac

$2\sqrt{ac}$ & $-7\sqrt{ac}$ faciunt $-5\sqrt{ac}$. (*e*).

XXXXI. In additione aut plurium aut magis compoſitarum quantitatum,

(*d*) 54. Nam hæ fractiones ſunt quantitates ejusdem generis: ſiquidem ex. gratia, $\frac{1}{5}$ eſt unitas quæ quinquies ſumpta valet unitates vulgares, & $\frac{2}{5}$ æquivalet duabus ex his unitatibus.

(*e*) 55, Hæc omnia clare pateat ex art. VII. hujus, nam cum ſignum — ſubductionem denotet, $a-b$ idem, erit, ac id quod reſtat poſtquam quantitas *a* quantitate *b* minuta fuerit, ergo (litteras quasvis quantitates ſignificantibus) $11-4=8$; AB — BC = AC &c. Sed ſi e quantitate aliqua aliam illi æqualem demas, reſtat o; ſi vero illa majorem, minus quam o, & quantitates nihilo minores, (Art. VI. hujus) ſigno — afficiuntur, ergo ſi majus e minore ſubtrahas, quantitas negativa remanebit. TAB. I. Fig. 1.

tum, convenit obſervare formam operationis ſupra in additione numerorum expoſitam. Quemadmodum ſi

$17ax - 14a + 3, \quad \& \; 4a + 2 - 8ax, \quad \& \; 7a - 9ax$

addendæ ſunt, diſpono eas in ſerie deſcendente, ita ſcilicet ut termini maxime affines ſtent in iiſdem columnis. Nempe numeri 3 & 2 in una columna, ſpecies $-14a$ & $4a$ & $7a$ in alia columna, atque ſpecies $17ax$ & $-8ax$ & $-9ax$ in tertia.

$$\begin{array}{rrr} 17ax & -14a & +3 \\ -8ax & +4a & +2 \\ -9ax & +7a & \\ \hline * & -3a & +5 \end{array}$$

Dein terminos cujuſque columnæ ſigillatim addo dicendo 2 & 3 faciunt 5 quod ſubſcribo, dein $7a$ & $4a$ faciunt $11a$ & inſuper $-14a$ facit $-3a$ quod iterum ſubſcribo, denique $-9ax$ & $-8ax$ faciunt $-17ax$ & inſuper $17ax$ facit 0. Adeoque prodit ſumma $-2a + 5$.

Eadem methodo res in ſequentibus exemplis abſolvitur.

$12x + 7a$	$11bc - 7\sqrt{ac}$	$-\frac{4ax}{b} + 6\sqrt{3} + \frac{1}{3}$	$-6xx + \frac{1}{7}x$
$7x + 9a$	$15bc + 2\sqrt{ac}$	$+\frac{11ax}{b} - 7\sqrt{3} + \frac{2}{3}$	$5x^3 \; * \; + \frac{2}{7}x$
$19x + 16a$	$26bc - 5\sqrt{ac}$	$\frac{7ax}{b} - \sqrt{3} + \frac{3}{3}$	$5x^3 - 6x^2 + \frac{3}{7}x$

$$\begin{array}{rrrr} & aay & +2a^3 & -\frac{a^4}{2y} \\ -2ayy & -4aay & +a^3 & \\ y^3 \; +2ayy & -\frac{1}{2}aay & & \\ \hline y^3 \quad * & -3\frac{1}{2}aay & +3a^3 & -\frac{a^4}{2y} \end{array}$$

Digitized by Google

$$
\begin{array}{rrr}
5x^4 + 2ax^3 & & \\
-\ 3x^4 - 2ax^3 & + & 8\tfrac{1}{4}a^3\sqrt{aa+xx} \\
-\ 2x^4 + 5bx^3 & - & 20a^3\sqrt{aa-xx} \\
-\ 4bx^3 & - & 7\tfrac{1}{4}a^3\sqrt{aa+xx} \\
\hline
* \quad + \quad bx^3 & + & a^3\sqrt{aa+xx} \\
 & - & 20a^3\sqrt{aa-xx}.
\end{array}
$$

CAPUT QUARTUM.

DE SUBDUCTIONE.

XXXII. NUMERORUM *non nimis compoſitorum* inventio etiam differentiæ per ſe patet. Quemadmodum quod 9 de 17 relinquat 8.

At in *magis compoſitis* ſubductio fieri ſolet *ſubſcribendo numerum ablativum & ſigillatim auferendo figuras inferiores de ſuperioribus* (*f*).

Sic ad auferendum 63543 de 782579, ſubſcripto 63543,

$$
\begin{array}{r}
782579 \\
63543 \\
\hline
719036
\end{array}
$$

dic 3 de 9 relinquit 6, quod ſcribe infra: dein 4 de 7 relinquit 3 quod pariter ſcribe infra: tum 5 de 5 relinquit 0 quod itidem ſubſcribe: poſtea 3 de 2 auferendum eſt, ſed cum 3 ſit majus, figura 1 a proxima figura 8 mutuo ſumi debet, quæ una cum 2 faciat 12, a quo auferri poteſt 3, & reſtat 9, quod inſuper ſubſcribe. Ad hæc cum præter 6 etiam 1 de 8 auferendum ſit, adde 1 ad 6, & ſumma 7 de 8 relinquet 1, quod etiam ſubſcribe. Denique cum in inferiori numero nihil reſtet auferendum de ſuperiori 7, ſubſcribe etiam 7, & ſic tandem habes differentiam 719036.

XXXIII. *Ceterum omnino cavendum eſt ut figuræ numeri ablativi ſubſcribantur in locis homogeneis.*

Nem-

(*f*) 56. Nam ſic primus numerus a dextra ſubtrahitur, ergo totus e toto. e primo numero, ſecundus e ſecundo &c.

Digitized by Google

Nempe unitates infra alterius numeri unitates, deni numeri infra denos, decimæ partes infra decimas, *&c.*, ſicut in additione dictum eſt. Sic ad auferendum decimalem 0'63 ab integro 547, non diſpones numeros hoc modo.

	sed ſic
5 47	547
0'63	0'63
	546'37

Ita nempe ut circulus, qui locum unitatum in decimali occupat, ſubjiciatur unitatibus alterius numeri. Tum circulis in locis vacuis ſuperioris numeri ſubintellectis, dic 3 de 0 auferendum eſſe; ſed cum nequeat, debet 1 de loco anteriori mutuo ſumi, ut 0 evadat 10 a quo 3 auferri poteſt, & dabit 7, quod infra ſcribe. Dein illud 1 quod mutuo ſumitur, adjectum 6 facit 7, & hoc de ſuperiore 0 auferendum eſt; ſed cum nequeat, debet iterum 1 de loco anteriori ſumi ut 0 evadat 10, & 7 de 10 relinquet 3, quod ſimiliter infra ſcribendum eſt. Tum illud 1 adjectum 0 facit 1, & hoc 1 de 7 relinquit 6, quod itidem ſubſcribe. Denique figuras etiam 54, ſiquidem de illis nihil amplius auferendum reſtat, ſubſcribe, & habebis reſiduum 546'37.

Exercitationis gratia plura tum in integris tum in decimalibus numeris exempla ſubjecimus.

1673	1673	458074	35'72	46,5003	208,7
1541	1580	9205	14'32	3,078	25,74
132	93	448869	21'4	43,4223	182,96

XXXIV. *Siquando major numerus de minori auferendus eſt, oportet minorem de majore auferre, & reſiduo præfigere negativum ſignum.* Veluti ſi auferendum ſit 1673 de 1541, e contra aufero 1541 de 1673, & reſiduo 132 præfigo ſignum —.

XXXV. *In terminis algebraïcis* ſubductio *fit connectendo quantitates cum ſignis omnibus quantitatis ſubducendæ mutatis, & inſuper uniendo quæ poſſunt uniri* (g) perinde ut in additione factum eſt.

Sic

(g) 57. In ſubductione duo conſideranda ſunt: quantitas *auferenda* & ea, *a qua aliquid aufertur*. Quantitas, *a qua altera demitur*, nullam aliam patitur mutationem, quam eam, quæ ex alterius ablatione oritur, quare illa talis, qualis eſt, reſtat, aut ſcribenda eſt nulla ſignorum mutatione facta.

Pro quantitate *ſubducenda*, patet unicuique ſimplici poſitivæ quantitati adſcribendum ſignum ſubtractionis, ergo ſigna poſitiva in negativa ſunt mutanda.

Quod ſi quantitas *auferenda* ſit compoſita ex quantitatibus poſitivis & negativis (puta b — c)

Sic $+7a$ de $+9a$ relinquit $+9a-7a$ ſive $2a$;
$-7a$ de $+9a$ relinquit $+9a+7a$ ſive $16a$;
$+7a$ de $-9a$ relinquit $-9a-7a$ ſive $-16a$;
& $-7a$ de $-9a$ relinquit $-9a+7a$ ſive $-2a$.

Sic $3\frac{a}{c}$ de $5\frac{a}{c}$ relinquit $2\frac{a}{c}$;

$7\sqrt{ac}$ de $2\sqrt{ac}$ relinquit $-5\sqrt{ac}$;
$\frac{2}{7}$ de $\frac{5}{7}$ relinquit $\frac{3}{7}$;
$-\frac{4}{7}$ de $\frac{3}{7}$ relinquit $\frac{7}{7}$;
$-\frac{2ax}{b}$ de $\frac{3ax}{b}$ relinquit $\frac{5ax}{b}$;
$\frac{8a\sqrt{cx}}{2a+\sqrt{cx}}$ de $\frac{-17a\sqrt{cx}}{2a+\sqrt{cx}}$ relinquit $\frac{-25a\sqrt{cx}}{2a+\sqrt{cx}}$;
$\frac{aa}{c}$ de $\frac{bx}{c}$ relinquit $\frac{bx-aa}{c}$;
$a-b$ de $2a+b$ relinquit $2a+b-a+b$ ſive $a+2b$;
$3az-zz+ac$ de $3az$ relinquit $3az-3az+zz-ac$ ſive $zz-ac$;
$\frac{2aa-ab}{c}$ de $\frac{aa+ab}{c}$ relinquit $\frac{aa+ab-2aa+ab}{c}$ ſive $-\frac{aa+2ab}{c}$

Et $\overline{a-x}\sqrt{ax}$ de $\overline{a+x}\sqrt{ax}$ relinquit $\overline{a+x}-\overline{a+x}\sqrt{ax}$ ſive $2x\sqrt{ax}$. Et ſic in aliis

XXXVI. Ceterum ubi quantitates pluribus terminis conſtant, operatio perinde ac in numeris inſtitui poteſt. Id quod in ſequentibus exemplis videre eſt.

$12x+7a$	$15bc+2\sqrt{ac}$	$5x^3 \ast +\frac{5}{7}x$
$7x+9a$	$-11bc+7\sqrt{ac}$	$6xx-\frac{3}{7}x$
$5x-2a$	$26bc-5\sqrt{ac}$	$5x^3-6xx+\frac{8}{7}x$

$\frac{11ax}{b}$

$b-c$) conſtat quod poſtquam ex a ex. gr. abſtuli b, nimis abſtuli, nam auferre debebam tantum differentiam inter b & c, & hoc nimis ablatum eſt ipſa quantitas c, ut liquet, quo circa ea reddenda eſt, aut reſiduo invento addenda; quare ſigna negativa in poſitiva ſunt mutanda.

TAB. A. Fig. 1. 58. Ubi literæ rectas exprimunt, res nihilo difficilior eſt: Exprimant a rectam AE; b rectam CB, & c rectam BE, & ex a ſubducenda ſit $b-c$, ſeu differentia rectarum CB, BE. Facta ſubductione algebraïca, reliquum exprimitur per $a+c-b$; quarum quantitatum duæ, a & c, additæ ſunt, tertia b ſubtracta: Adde ergo ſimul rectas expreſſas per a & c (N°. 11.) unde habebis AB, ex qua deme BC, reſidua AC, erit, ut liquet, recta expreſſa per $a+c-b$.

$$\frac{11ax}{b} - 7\sqrt{3} + \frac{1}{5}$$

$$\frac{4ax}{b} - 6\sqrt{3} - \frac{1}{5} \qquad (b)$$

$$\frac{7ax}{b} - \sqrt{3} + \frac{2}{5}$$

C A-

(*b*) 59. *Subtractio, quia datarum quantitatum differentia quæritur, monet, ut hic adnectam aliqua uſu-ventura theoremata de quantitatibus æque differentibus.*

60. Relatio aut habitudo, quæ eſt inter quantitates conſideratas quoad differentiam, dicitur *ratio Arithmetica:* Vel *ratio Arithmetica* eſt relatio, quæ invenitur inter duas quantitates, cum quæritur quanam quantitate differant.

61. Ut inveniatur ratio arithmetica, quæ eſt inter quasvis duas quantitates a, & b, (quarum a ponitur major) quærenda eſt earum differentia $a - b$.

62 Major terminus rationis arithmeticæ par eſt aggregato ex minori & differentia; minor autem differentiæ, quæ eſt inter majorem terminum & amborum differentiam: Ex gratia: Sit $a - b = d$, erit (addendo æqualia æqualibus) a, major terminus, $= b + d$, aggregato ex minori & differentia; quia vero $a = b + d$, erit (ex qualibus æqualia demendo) $a - d$, differentia quæ eſt inter majorem terminum, & amborum differentiam, æqualis b minori termino.

63. Quatuor quantitates, quarum duæ ſunt aliis duabus æquidifferentes, vocantur *arithmetice proportionales:* tales *ex. gr.* erunt a, b, c, f, ſi inter a & b ſit eadem differentia, ac inter c, & f.

64. *Si quatuor quantitates ſint* arithmetice proportionales, *extremarum & mediarum ſumma ſunt æquales.*

Sint arithmetice a ad b, ut c ad f, & ſit a major quam b, & ideo c major quam f; ac differentia inter a & b, ſit d: erit $b + d = a$, (N°. 62.) ſed & differentia, inter c & f, eſt pariter d (N°. 63.) ergo etiam $c = f + d$, quare ſumma extremarum eſt $b + d + f$, ut & ſumma mediarum, igitur &c. *Q. E. D.*

65. Si duo medii termini ſint æquales inter ſe, erit ſumma extremorum æqualis alteri ex mediis bis ſumpto.

66. Tunc etiam maximus terminus æquabit ſummam ex minimo, & duplo differentiæ, quæ eſt inter maximum & medium, aut inter medium & minimum: minimus autem differentiam, quæ eſt inter maximum & differentiam maximi a medio, vel medii a minimo bis ſumtam: *Ex. gr.* ſit a arithmetice ad b, ut b ad c, & differentia inter a & b ſit d, quæ debet quoque eſſe differentia ipſius b a c (N°. 63.); erit $a = b + d$, & $b = c + d$ (N°. 62.) ergo $a = c + 2d$: & (æqualibus ex æqualibus demptis) $a - 2d = c$.

67. Ubi ſecundus proportionis terminus æquat tertium, *proportio* dicitur *continua*, ac duo termini æquales pro uno repetito habentur, qui vocatur *medius*.

68. Plures quantitates, quæ ſunt in continua proportione arithmetica, dicuntur conſtituere *progreſſionem arithmeticam.*

69. Progreſſio, cujus primus terminus eſt omnium minimus, vocatur *aſcendens*; *deſcendens* vero, cujus primus terminus eſt omnium maximus.

70. *Datis primo termino, & differentia terminorum, invenire ſingulos progreſſionis terminos.*

Si progreſſio debet eſſe aſcendens, adde termino primo, qui datur, datam differentiam; & habebis terminum ſecundum, huic adde rurſus differentiam, unde orietur tertius terminus &c.: res per ſe ipſa patet, nec demonſtrationis eget.

Si vero progreſſio debet eſſe deſcendens, e primo termino deme differentiam, & habebis ſecundum, e ſecundo deme iterum differentiam, hinc exſurget tertius, atque ita porro *Q. E. F.*

71.

CAPUT. V.

DE MULTIPLICATIONE.

XXXVII. Numeri, qui ex multiplicatione duorum quorumvis numerorum non majorum quam 9, oriuntur, memoriter addiſcendi ſunt. Veluti quod 5 in 7, facit 35, quodque 8 in 9 facit 72, *&c.* Deinde majorum numerorum multiplicatio ad horum exemplorum normam inſtituetur.

XXXVIII. Si 795 per 4 multiplicare oportet, ſubſcribe 4, ut vides. Dein dic, 4 in 5 facit 20, cujus poſteriorem figuram 0 ſcribe infra 4, priorem vero 2 reſerva in proximam operationem. Dic itaque præter-

$$\begin{array}{r} 795 \\ 4 \\ \hline 3180 \end{array}$$

ea 4 in 9 facit 36, cui adde præfatum 2 & fit 38, poſteriorem figuram 8, ut ante ſubſcribe, & priorem 3 reſerva. Denique dic 4 in 7 facit 28, cui adde prædictum 3 & fit 31; eoque pariter ſubſcripto habebitur 3180 numerus qui prodit multiplicando totum 795 per 4.

XXXIX. Porro ſi 9043 multiplicandus eſt per 2305, ſcribe alterutrum 2305 infra alterum 9043 an ante,

$$\begin{array}{r} 9043 \\ 2305 \\ \hline 45215 \\ 0000 \\ 27129 \\ 18086 \\ \hline 20844115 \end{array}$$

& multiplica ſuperiorem 9034 primo per 5 pro more oſtenſo, & emerget 45215, dein per 0, & emerget 0000, tertio per 3 & emerget 27129, denique per 2 & emerget 18086. Hoſque ſic emergentes numeros in ſerie deſcendente ita ſcribe, ut cujuſque inferioris ultima figura ſit uno loco propior ſiniſtræ quam ultima ſuperioris. Tandem hos omnes adde & orietur

71. In progreſſione aſcendente quivis terminus æquat aggregatum ex primo termino, & differentia toties ſumpta, quot ſunt termini ante quæſitum: *Ex. gr.* quintus terminus æquat primum cum differentia quater ſumpta. Si vero progreſſio ſit deſcendens, quivis terminus æquat differentiam primi termini, a progreſſionis differentia toties repetita, quot termini quæſitum præcedunt, in ſextus terminus æqualis eſt primo multato progreſſionis differentia quinquies ſumpta.

rietur 20844115, numerus qui fit multiplicando totum 9043 per totum 2305. (*i*).

XL. *Decimales numeri* per integros vel per alios decimales perinde multiplicantur, ut vides in his exemplis.

72,4	50,18	3,9025
29	2,75	0,0132
6516	25090	78050
1448	35126	117075
2099,6	10036	39025
	137,9950	0,05151300

XLI. Sed nota quod *in prodeunte numero tot ſemper figuræ ad dextram pro decimalibus abſcindi debent, quot ſunt figuræ decimales in utroque numero multiplicante.* Et ſi forte non ſint tot figuræ in prodeunte numero, deficientes loci circulis adimplendi ſunt, ut hic fit in exemplo tertio (*k*).

XLII. *Simplices termini algebraici multiplicantur ducendo numeros in numeros & ſpecies in ſpecies ac ſtatuendo factum* affirmativum *ſi ambo factores ſint affirmativi* (*l*), *aut ambo negativi* (*m*), & negativum *ſi ſecus.* (*n*).

Sic

(*i*) 72. Ut multiplicationis regula demonſtretur, ſufficit oſtendere, *quod ſi duæ quantitates ſecentur in quotcunque partes, idem conficitur totum in totum, ac partes in partes ducendo.* Sit $a = c + f$, & $b = g + h$, erit (Eucl. 1. II.) $ab = bc + bf$, ſed $bc = cg + ch$, & $bf = fg + fh$, ergo $ab = cg + ch + fg + fh$. Quod ſi c, f, g, h, ſecentur in quolibet partes eadem demonſtratio repetetur, quare conſtat propoſitum.

73. Si ergo, f, g, h &c. denotant quoſvis numeros, ut hi invicem ducantur, omnes partes unius ducendæ ſunt in omnes partes alterius, quod manifeſte fit per Auctoris regulam.

74. Notandum tamen ab unitatibus incipiendum eſſe, quia aliquot unitates ductæ in aliquot unitates (ut in ſubjecto exemplo 3×5) poſſunt conficere decades, quarum ſedes eſt ſecunda a ſiniſtra, ubi ſic facile locari poſſunt, quia cum 4 decades ducuntur in 5 unitates (quod certe dabit non unitates ſed decades, quæ ſcilicet aliquoties ſumuntur) jam notum eſt quot decades huic producto addendæ ſint, quod aliter fieri nequiret.

75. Productum totius ſuperioris numeri per ſecundam figuram inferioris ita ponendum eſt, ut ejus ultima figura ſit *uno loco propior ſiniſtræ, quam ultima ſuperioris* id eſt, ut eandem obtineat ſedem, ac in numeris datis decades, quia ſecunda figura cujuſvis numeri eſt decas, quæ aliquoties ſumpta decades conficiet, quare decadum loco ponenda eſt, & ſic de ceteris.

(*k*) Vide infra (N°. 89.) de Fractionum multiplicatione.

(*l*) 76. Quantitas affirmativa eſt quantitas nihilo addita, ſi ergo talis quantitas ſibimet ipſa aliquoties addatur, factum hinc exſurgens certe nihilo additum erit, id eſt, poſitivum.

Sic ſuperficies poſitiva ea erit, quæ ductu Tab. A. Fig. 3.
lineæ poſitivæ in poſitivam conflatur.
Ita ſi FB, FE ſint lineæ poſitivæ, erit FG ſuperficies poſitiva.

(*m*) Vide infra (N°. 79.)

(*n*) 77. Quantitatem poſitivam negative, aut negativam poſitive aliquoties accipere, nihil aliud ſignificat, quam, aut quantitatem poſitivam aliquoties a ſemet ſubducere, aut negativam aliquoties ſumere prout eſt, id eſt, negative,

Sic $2a$ in $3b$, vel $-2a$ in $-3b$ facit $6ab$, vel $6ba$; nihil enim refert quo ordine ponantur (*). Sic etiam $2a$ in $-3b$, vel $-2a$ in $3b$ facit $-6ab$. Et ſic $2ac$ in $8bcc$ facit $16abccc$ ſive $16abc^3$; & $7axx$ in $-12aaxx$ facit $-84a^3x^4$; & $-16cy$ in $31ay^3$ facit $-496acy^4$; & $-4z$ in $-3\sqrt{az}$ facit $12z\sqrt{az}$. Atque ita 3 in -4 facit -12 & -3 in -4 facit 12.

XLIII.

tive; primum patet ex terminis, quia negative ſumere quantitatem eſt eam ſubducere: ſecundum probatur, quia quantitatem poſitive ſumere eſt eam nihilo aut alicui quantitati addere, ſed quantitatem negativam addere eſt eam ſubducere, (XXVII hujus) ergo &c.

Vel ſic: $+a$ ducenda ſit in $o-c$; ſit $o-c=f$, igitur $af=a(o-c)$ atqui $o=c+f$, (EUCL. *Ax.* 2.) quamobrem $ao=ac+af$. (EUCL. 1. II.) ergo $ao-ac=af$ [EUCL. *Ax.* 3.] $=a(o-c)$ $=a\times c+a\times -c$, ſed $ao=a\times o$, ergo, ſubductis æqualibus, $-ac=a\times -c$.

78. Sed ſuperficies negativa ea eſt quæ poſitivæ opponitur, & gignitur ductu lineæ negativæ in poſitivam, aut poſitivæ in negativam; quare cum jam poſitivas rectas B F, F E poſuerimus, erit F C negativa (VI. hujus), quæ ſi ducatur in F B poſitivam, aut ſi F B ducatur in F C negativam, gignetur ſuperficies F C H B, quæ (art. VI.) negativa eſt. TAB. A. Fig. 3.

Idem eveniet ſi recta F E poſitiva ducatur in F D negativam, aut contra.

79. Quantitatem negativam in negativam ducere eſt eam aliquoties negative ſumere, ſed quantitas negativa poſitive ſumpta dat factum negativum, ergo negative, id eſt ratione poſitivæ contraria, dabit factum poſitivum.

Hinc regula quantitatibus ducendis propoſita: *Signa ſimilia* (ſive ambo negativa, ſive ambo poſitiva) *dant factum poſitivum, ſigna diſſimilia negativum.*

* (EUCL. 16. VII.)

TAB. A. Fig. 3. Ita quoque, cum ſuperficies F C H B aut F E I D ſint negativæ (N°. 69), & ambabus oppoſita ſit F C A D, ea erit poſitiva (Art. VI.) quæ tamen gignitur rectis DF, FC, ambabus negativis.

80. Si index n eſt par, poteſtas erit poſitiva, licet ejus radix ſit negativa; nam, quia n eſt numerus par, fac $n=2c$, radix ſit $\pm a$, habebis ergo $\pm a^c \cdot \pm a^c = a^n$.

81. Omnis poteſtas, cujus index m eſt impar, negativæ radicis $-a$, eſt negativa; nam tot ſunt quantitates invicem multiplicandæ, quos unitates in indice (Art. XVI.) Quævis quantitas habet ſignum $-$; ergo ſigna negativa tot ſunt, quot unitates in indice; quare, unitate dempta, ſignorum numerus erit par; ergo $-a$ evecta ad poteſtatem $m-1$, $=a^{m-1}$ que ducta in $-a$ dat, $-a^m$.

82. Item ſi ab evehatur ad poteſtatem m, habebitur $a^m b^m$, & ſi invicem ducantur a^m, & b^m idem habebitur, ergo $(ab)^m = a^m \cdot b^m$.

83. *Si unitas, & poteſtates prima, ſecunda, tertia, quarta &c. alicujus quantitatis ita diſponantur ut ſint in proportione* geometrica *continua* (ut monitum eſt Art. XVII.) *erunt exponentes poteſtatum in proportione* arithmetica *continua.*

Quantitas ſit a; unitas, & poteſtates ipſius a diſponendæ ſunt per hypotheſin hoc pacto:

$$1, a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7, \ldots\ldots a^{m-1}, a^m.$$

Jam exponentes indicant numerum factorum æqualium, quibus conſtat quivis terminus (Art. XVI.) At quivis terminus, per hypotheſin, conſtat tot factoribus quot præcedens & uno inſuper; ergo exponentes differunt unitate, & habent eandem differentiam, quare ſunt in proportione arithmetica continua.

84. Differentia exponentium m, $m-1$; . . . . . . 7. 6, &c. eſt unitas, & eſſe debet ex rei natura. Sed $2-1=1$; ergo exponens ipſius radicis debet eſſe unitas. Quod vel hinc probatur, quod radix conſtat ex unico factore.

Item $1-1=0$; quare exponens unitatis debet eſſe 0, vel $1=a^0$; & reipſa nullus factor a unitatem conſtituit.

85. *Si ex Serie præcedente excerpas quotvis terminos, tot terminos omittens inter primum & ſecun-*

XLIII. *Fractiones* multiplicantur ducendo numeratores in numeratores ac denominatores in denominatores (*o*).

Sic $\frac{2}{3}$ in $\frac{5}{7}$ facit $\frac{10}{21}$; & $\frac{a}{b}$ in $\frac{c}{d}$ facit $\frac{ac}{bd}$; & $2\frac{a}{b}$ in $3\frac{c}{d}$ facit $6 \times \frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$ ſeu $6\frac{ac}{bd}$; & $\frac{3acy}{2bb}$ in $-\frac{7cyy}{4b^3}$ facit $-\frac{21accy^3}{8b^5}$; & $-\frac{4z}{c}$ in $-\frac{3\sqrt{az}}{c}$ facit $\frac{12z\sqrt{az}}{cc}$; & $\frac{a}{b}x$ in $\frac{c}{d}xx$ facit $\frac{ac}{bd}x^3$.

Item 3 in $\frac{5}{7}$ facit $\frac{15}{7}$, ut patet ſi 3 reducatur ad formam ſactionis $\frac{3}{1}$ adhibendo unitatem pro denominatore.

Et ſic $\frac{15aaz}{cc}$ in $2a$ facit $\frac{30a^3z}{cc}$. Unde nota obiter quod $\frac{ab}{c}$ & $\frac{a}{c}b$ idem valent; ut & $\frac{abx}{c}$, $\frac{ab}{c}x$ & $\frac{a}{c}bx$ nec non $\frac{a+\sqrt{cx}}{a}$ & $\frac{a+b}{a}\sqrt{cx}$, & ſic in aliis (*q*).

XLIV.

cundum excerpterum, quot inter tertium, & quartum, ubicunque incipias, termini excerpti erunt quidem in proportione geometrica *ſed eorum exponentes in* arithmetica.

Quoniam omnes termini ſunt in proportione geometrica continua, ſemper ratio primi (quemcunque primum ſtatuas) ad tertium erit duplicata; ad quartum triplicata, ad $m+1$... mum, m... plicata rationis primi ad ſecundum, (Eucl. *def.* 11. V.). Sed, ſi inter x & y omittas totidem terminos quot inter z & u, ratio ipſius x ad y & z ad u &c. componetur quævis ex totidem rationibus æqualibus. Ergo hæ quantitetes x, y, z, u, &c., erunt in proportione geometrica. Quod erat primum.

Quilibet exponens præcedentem ſuperat unitate; ergo, ſi omittas m terminos, exponens ſecundi ſuperabit exponentem primi $m+1$ unitatibus (N°.71.), ſed & exponens quarti ſuperabit exponentem tertii $m+1$ unitatibus. Ergo exponentes erunt in proportione arithmetica. Quod erat alterum.

86. Si totidem omiſſi fuiſſent termini inter primum & ſecundum; inter ſecundum & tertium; inter tertium & quartum &c. erunt hi termini in proportione continua geometrica, & exponentes in proportione continua arithmetica.

87. Si igitur multiplicanda ſit quantitas a^m per a^n ſcribendum eſt a^{m+n}. Nam eſſe debet ut unitas ad a^m ita a^n ad productum (Art. VIII.) quare hæ quantitates ſunt in proportione geometrica. Sed productum debet eſſe aliqua e poteſtatibus ipſius a, nulla enim alia quantitas eſt neque in multiplicatore neque in multiplicando, ergo exponentes debent eſſe in proportione arithmetica. Eſt autem arithmetice o ad m ut n ad $m+n$. Ergo &c.

88. Eſt ſi poteſtas a^m evehenda eſt ad poteſtatem n, ſcribendum eſt a^{mn}. Nam index erit $m+m+m$ &c. (Art. XVI.) donec numerus eorum ſit n; id eſt mn.

(*o*) 89. Ponatur $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{f} = x$, dico $x = \frac{ac}{bf}$.

Ut $\frac{a}{b}$ ducatur in $\frac{c}{f}$ faciendum eſt $1 . \frac{a}{b} :: \frac{c}{f}$. x; quare $b . a :: c . fx$ (Eucl. 17. VII.), ergo $bfx = ac$ (Eucl. 14. VI. & 19. VII.) & $x = \frac{ac}{bf}$. (Eucl. *Ax.* 7.)

Si $b = 1$, id eſt, ſi $\frac{a}{b}$ ſit quantitas integra, ea ducenda erit in numeratorem fractionis, per cujus denominatorem ſi productum dividatur, habebitur factum ex integro in fractionem, quia tunc $x = \frac{ac}{bf}$ fieret $\frac{ac}{1f} = \frac{ac}{f}$.

(*p*) 90. Siquidem $\frac{a}{c}b$, *ex. gr.* eſt $\frac{a}{c} . b = \frac{ab}{c}$,

ut

XLIV. *Quantitates radicales ejuſdem denominationis*, (hoc eſt, ſi ſint ambæ radices quadraticæ, aut ambæ cubicæ, aut ambæ quadrato-quadraticæ, *&c.*) multiplicantur ducendo terminos in ſe invicem ſub eodem ſigno radicali (*q*).

Sic $\sqrt{3}$ in $\sqrt{5}$ facit $\sqrt{15}$, & $\sqrt{ab}$ in $\sqrt{cd}$ facit $\sqrt{abcd}$.

Et $\sqrt[3]{5ayy}$ in $\sqrt[3]{7ayz}$ facit $\sqrt[3]{35aay^3z}$.

Et $\sqrt{\frac{a^3}{c}}$ in $\sqrt{\frac{abb}{c}}$ facit $\sqrt{\frac{a^4bb}{cc}}$ hoc eſt * $\frac{aab}{c}$.

Et $2a\sqrt{az}$ in $3b\sqrt{az}$ facit $6ab\sqrt{aazz}$ hoc eſt * $6aabz$.

Et $\frac{3xx}{\sqrt{ac}}$ in $\frac{-2x}{\sqrt{ac}}$ facit $\frac{-6x^3}{\sqrt{aacc}}$ hoc eſt * $-\frac{6x^3}{ac}$.

Et $-\frac{4x\sqrt{ab}}{7a}$ in $-\frac{3d\sqrt{5cx}}{10cc}$ facit $\frac{12ddx\sqrt{5abcx}}{70acc}$.

XLV. *Quantitates pluribus partibus conſtantes* multiplicantur ducendo ſingulas unius partes in ſingulas alterius, perinde ut in multiplicatione numerorum oſtenſum eſt (*r*).

Sic

ut ſupra probavimus.

Hinc ſi decimales invicem ducendæ ſunt, reducantur ad unitates homogeneas & earum numeratores ac dominatores invicem ducantur (Art. XLIII.) & poſt fractio exprimatur more decimali, ſic $72,4 = \frac{724}{10}$; $29 = \frac{290}{10}$, ergo $\frac{724}{10} \cdot \frac{290}{10} = \frac{209960}{100} = 2099,60 = 2099,6$; & ſic de ceteris.

(*q*) 91. Invicem ducendæ ſint $\sqrt[n]{a}$ & $\sqrt[n]{b}$ (ubi *n* denotat quemvis numerum, *ex. gr.* 2, ſi radices ſint quadratæ; 3, ſi cubicæ; 4, ſi quadrato quadraticæ, &c.) dico factum $= \sqrt[n]{ab}$. Ponatur $\sqrt[n]{a} = x$, & $\sqrt[n]{b} = y$; ergo elevando ad poteſtatem *n* (puta ſecundam, tertiam, quartam &c.) $a = x^n$, & $b = y^n$ quare $ab = x^n y^n$; & extracta radice *n*, (puta ſecunda, tertia, &c.) $\sqrt[n]{ab} = xy = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$.

Hinc ſequitur quod $1 . \sqrt[n]{a} :: \sqrt[n]{b} . \sqrt[n]{ab}$. (Art. VIII.)

(*) (XVIII. hujus).

(*r*) Hujus demonſtrationem vide ſupra (No. 72.)

92. In omni facto numerus terminorum æquat factum numeri terminorum, qui ſunt in multiplicando, per numerum terminorum, qui ſunt in multiplicatore.

Sic ſi trinonium $a+b+c$ ducatur in binomium $f+g$ numerus terminorum in facto erit $= 2 . 3 = 6$, quia totum trinomium ductum in primum binomii terminum dat tres terminos, & totidem habentur ducendo totum trinomium in ſecundum binomii terminum, &c.

93. Si aggregatum ex indicibus omnium quantitatum, quæ ſimul multiplicatæ efficiunt aliquam quantitatem, ſit æquale aggregato ex indicibus omnium aliarum quantitatum, quæ pariter invicem ductæ efficiunt aliquam; hæc duo facta dicentur *homogenea*.

Sit

Sic $c - x$ in a facit $ac - ax$, & $aa + 2ac - bc$ in $a - b$ facit $a^3 + 2aac - aab - 3abc + bbc$.

Nam $aa + 2ac - bc$ in $-b$ facit $-aab - 2abc + bbc$, & in a facit $a^3 + 2aac - abc$, quorum ſumma eſt $a^3 + 2aac - aab - 3abc + bbc$.

Hujus multiplicationis ſpecimen una cum aliis conſimilibus exemplis ſubjectum habes.

$$\begin{array}{r}
aa + 2ac - bc \\
a - b \\
\hline
-aab - 2abc + bbc \\
a^3 + 2aac \;*\; \quad - abc \\
\hline
a^3 + 2aac - aab - 3abc + bbc
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
a + b \\
a + b \\
\hline
ab + bb \\
aa + ab \quad \\
\hline
aa + 2ab + bb
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
a + b \\
a - b \\
\hline
-ab - bb \\
aa + ab \quad \\
\hline
aa \;*\; - bb
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
yy + 2ay - \tfrac{1}{2}aa \\
yy - 2ay + aa \\
\hline
aayy + 2a^3y - \tfrac{1}{2}a^4 \\
-2ay^3 - 4aayy + a^3y \quad \\
y^4 + 2ay^3 - \tfrac{1}{2}aayy \qquad \\
\hline
y^4 \;*\; - 3\tfrac{1}{2}aayy + 3a^3y - \tfrac{1}{2}a^4
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\frac{2ax}{c} - \sqrt{\frac{a^3}{c}} \\
3a + \sqrt{\frac{abb}{c}} \\
\hline
\frac{2ax}{c}\sqrt{\frac{abb}{c}} - \frac{aab}{c} \\
\frac{6aax}{c} - 3a\sqrt{\frac{a^3}{c}} \\
\hline
\frac{6aax}{c} - 3a\sqrt{\frac{a^3}{c}} + \frac{2ax}{c}\sqrt{\frac{abb}{c}} - \frac{aab}{c}\ (s).
\end{array}$$

Sit quantitas a^3b^2c, & alia quævis b^4c^2: Factores primæ quantitatis ſunt a^3, b^2, c; ſecundæ vero b^4, c^2. Summa indicum primorum (3, 2, 1) eſt 6, ut & ſumma indicum ſecundorum (4, 2): hæ duæ quantitates a^3b^2c, b^4c^2 dicuntur homogeneæ.

Hinc ſi termini multiplicatoris alicujus complexi ſint homogenei inter ſe, ut & termini multiplicandi cujuſvis, licet termini ex multiplicatore non ſint homogenei terminis ex multiplicando, termini in producto erunt homogenei inter ſe.

Sit multiplicator $a^2b - c^3$, multiplicandum vero $a + f$, termini qui ſunt in facto $a^3b - ac^3 + a^2bf - c^3f$ ſunt homogenei (EUCL. *Ax.* 2).

(*s*) 94. Hic diligenter conſideranda eſt multiplicatio *Binomiorum*, ex qua multa utilia ſequuntur.

CAPUT

Sint

Sint binomia multiplicanda $A+a$, $B+b$, $C+c$, $D+d$ &c. ad numerum m.

95. *Primos* Factores vocabo quantitates deſignatas litteris majoribus A, B, C, D, &c, & *ſecundos* Factores quantitates expoſitas litteris minoribus a, b, c, d, &c. Nam, ordinis gratia, binomium $A+a$ primo multiplicabitur per B, deinde per b; & factum hinc ortum ſtatim per C, poſtea per c, & ſic ſemper. Duos autem Factores A & a, B & b, &c. alterum e *primis*, alterum e *ſecundis*, pertinentes ad idem binominm, atque ideo expreſſos eadem littera, majore & minore, appellabo *Factores cognomines*.

96. Termini, quibus conſtat productum, diſponentur ſecundum numerum *primorum Factorum*: ita ut primo loco ponatur ille qui plurimos continet *primos Factores*, ſecundo qui numerum proxime minorem *primorum Factorum*, tertio qui eorundem numerum adhuc proxime minorem &c.

97. Si plures termini ſimplices habent eundem numerum *Factorum primorum*, omnes hi termini ſimplices ponentur conſtituere unum terminum complexum. In poſterum dicentes *unum terminum*, intelligemus vel *ſimplicem* vel *complexum*.

98. Si in polynomiis ſeſe inviecm multiplicantibus, numeri *Factorum primorum* qui ſunt in ſingulis terminis, conſtituant progreſſionem arithmeticam

$$p,\ p-q,\ p-2q,\ p-3q,\ p-4q \text{ \&c.}$$

pro uno; &

$$r,\ r-q,\ r-2q,\ r-3q,\ r-4q \text{ \&c,}$$

pro altero; eandem autem habeat differentiam utraque progreſſio; etiam numeri *Factorum primorum*, qui ſunt in ſingulis terminis facti, conſtituent progreſſionem arithmeticam cujus eadem erit differentia.

Nam ubi polynomia multiplicantur, debet totum multiplicandum duci ordine in primum, ſecundum, tertium &c. terminum multiplicatoris (Art. XLV.) Id eſt numero *primorum Factorum* qui ſunt in primo, ſecundo, tertio &c. termino multiplicandi, addi debet numerus *primorum Factorum* qui ſunt in primo termino multiplicatoris; deinde illorum qui ſunt in ſecundo &c. (Art. X.) Ex prima additione, nempe addendo numeros r; $r-q$; $r-2q$; &c. ordine, ipſi numero p, oriuntur numeri

$$p+r,\ p+r-q,\ p+r-2q,\ p+r-3q,\ p+r-4q \text{ \&c.}$$

E ſecunda, nempe addendo numeros r; $r-q$, $r-2q$; &c, numero $p-q$, oriuntur

$$p+r-q,\ p+r-q-q = p+r-2q,\ p+r-q-2q = p+r-3q \text{ \&c.}$$

E tertia, nempe addendo numeros r; $r-q$; $r-2q$; &c. numero $p-2q$, oriuntur

$$p+r-2q,\ p-q+r-2q = p+r-3q,\ p-2q+r-2q = p+r-4q \text{ \&c.}$$

Cum autem omnes hi numeri conficiantur ex eadem quantitate ordine addita terminis progreſſionis arithmeticæ, manebit progreſſio & differentia in ſingulis additionibus. Præterea prima additio auxit quantitate r quantitates

$$p,\ p-q,\ p-2q,\ p-3q \text{ \&c.}$$

Secunda easdem auxit quantitate $r-q$. Tertia quantitate $r-2q$ &c. Unde primi termini ſingularum additionum conficient progreſſionem arithmeticam, cujus maximus terminus eſt $p+r$; differentia q. Sed etiam ex prima additione habuimus progreſſionem arithmeticam, cujus maximus terminus eſt $p+r$ & differentia q; Ergo primus terminus ſecundæ progreſſionis coincidit cum ſecundo primæ; primus tertiæ cum tertio primæ &c.

99. In binomiis $A+a$, $B+b$, $C+c$ &c. primi termini habent *Factorem primum* unum: ſecundi nullum. Ergo differentià harum progreſſionum ortarum ex binomiorum multiplicatione eſt unitas. Quare unitas etiam erit differentia progreſſionum ortarum ex binomiorum multiplicatione.

100. Sed ubi multiplicantur binomia numero m, primus terminus producti continet m *Factores primos*. Ergo erit progreſſio

$$m,\ m-1,\ m-2,\ m-3,\ m-4, - - - - 0$$

101. Habet autem hæc progreſſio terminos numero $m+1$; Sunt enim tot termini quot differentiæ, & unus inſuper. Sed quoniam $0 = m-m$, differentiæ ſunt numero m; & numerus terminorum eſt $m+1$.

102. Terminus n...*mus* producti habet *Factores primos* numero $m-n+1$. Nam quivis terminus tot habet *Factores primos*, quot ſunt unitates in reſpondente termino progreſſionis $m, m-1, m-2, m-3, m-4, m-5$, &c. in hac progreſſione tot ſunt differentiæ in ſingulis terminis, quot termini eum præcedunt, vel quot ſunt termini progreſſionis a primo ad illum incluſive, unitate dempta; ſunt ergo $n-1$ differentiæ. Quapropter ipſius termini differentia eſt $1.(n-1) = n-1$; & terminus ipſe eſt $m-n+1$.

Sed

Sed termini ſunt homogenei in producto (N°. 93.); erit ergo numerus *ſecundorum Factorum* $n-1$.

103. Si in producto ſumantur termini æque diſtantes a primo & ab ultimo; quot *Factores primos* habet terminus unus, tot *Factores ſecundos* habebit alter. Sit terminus alter $n \ldots$*mus* a primo; alter qui eſt pariter $n \ldots$*mus* ab ultimo, erit $m-n+2 \ldots$*mus* a primo. Sed terminus $n \ldots$*mus* a primo habet *Factores primos* $m-n+1$; & terminus $m-n+2 \ldots$*mus* a primo habet $m-m+n-1=n-1$ *Factores primos*; habet ergo *Factores ſecundos* $m-n+1$.

104. Hinc ergo facile multiplicabuntur quotvis binomia. Jungantur tum omnes *primi Factores*, tum omnes *ſecundi*: Sic habebitur primus & ultimus producti terminus.

Ex gr. binomia multiplicanda ſint quatuor $A+a$, $B+b$, $C+c$, $D+d$; erit $ABCD$ primus, & $abcd$ ultimus producti terminus.

105. In primo termino mutentur ordine ſinguli *primi* Factores in *ſecundos* cognomines; & in ultimo ſinguli *ſecundi* in *primos*; habebuntur termini ſecundus & penultimus complexi.

Sic $aBCD+bACD+cABD+dABC$, erit ſecundus terminus complexus. Et $bcdA+acdB+abdC+abcD$ erit penultimus.

106. In ſecundo termino mutentur ordine ſinguli *Factores primi* in *ſecundos*, dummodo jam mutati non fuerint; & in penultimo ſinguli *ſecundi* in *primos*, orientur termini tertius & ante-penultimus.

Ita $abCD+acBD+adBC+bcAD+bdAC+dcAB$, erit tertius terminus, & $cdAB+bdAC+bcAD+adBC+acBD+abCD$ erit ante-penultimus.

Eodem modo procedendum eſt ad finem uſque.

107. Complexus terminus occupans ſedem $n \ldots$*mam* indicabitur ſymbolo α; ſtatim præcedens ſymbolo β; hunc ſtatim præcedens ſymbolo γ, & ſic de reliquis.

108. In genere invenientur omnes termini ſimplices conſtituentes ipſum α; ſi in ſingulis terminis ſimplicibus componentibus terminum β mutentur ordine *primi Factores* ſinguli in *ſecundos* cognomines, & omittantur termini ſimplices hinc orti, qui alicui jam invento ſunt æquales.

Prima pars hujus regulæ patet ex his principiis. Binomia multiplicantia omnia inter ſe ducenda ſunt. Hinc primus terminus primi multiplicabitur per primum & per ſecundum terminum ſecundi; unde orientur duo termini alter conſtans ex duobus *primis Factoribus*, alter ex *primo* & *ſecundo*. Deinde ſecundus terminus primi binomii ducendus eſt in primum & in ſecundum ſecundi; unde emergent duo termini, alter conſtans ex *primo Factore* & *ſecundo*, alter ex duobus *ſecundis*. Multiplicatio continuatur iiſdem legibus. Quare factum habebit, dummodo ordine diſponantur termini, primum terminum conſtantem ex *primis* & ultimum e *ſecundis*, medios autem ex aliquot *primis* & ex aliquot *ſecundis*.

Factores *cognomines* eſſe non poſſunt in eodem termino ſimplici facti, quia *primus Factor* in *ſecundum* ejuſdem binomii non ducitur. Sed quia omnia binomia inter ſe multiplicantur, Factores *non cognomines* juncti debent eſſe quot modis poteſt: ea tamen lege ut ſi terminus β habet *Factores primos* numero $m-n+2$, terminus α habeat numero $m-n+1$. Sed hæc omnia ſunt ex prima parte regulæ, quæ ideo recte ſe habet.

Verumtamen binomia quæ jam in multiplicatione fuerunt adhibita, rurſus non adhibentur; & omnia binomia diverſas habent litteras: ergo idem factum ſemel occurret. Sic ſi multiplicata ponantur binomia $A+a$, $B+b$, orietur factum $AB+aB+bA+ab$. Hoc ſi multiplicetur per $C+c$, idem terminus *ex gr.* aBC non invenietur repetitus in facto, quia ille oriri poteſt tantum vel ex a in BC; vel ex B in aC, vel ex C in aC. Sed terminus BC fit ex $(B+b).(C+c)$; terminus aC ex $(A+a).(C+c)$. Oporteret ergo ut bis facta fuiſſet multiplicatio per $C+c$; quod eſt contra multiplicationis regulam.

109. Nunc dico quod terminus α occupans in facto ſedem $n \ldots$*mam*, conſtat ex terminis ſimplicibus numero

$$\frac{m.\ m-1.\ m-2.\ m-3.\ m-4 \ldots\ldots m-n+2}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5. \ldots\ldots n-1}$$

Nam primo, ut habeatur terminus complexus α, mutandi ſunt in termino aliquo ſimplici termini complexi β, unus poſt alium, ſinguli *Factores primi* in *ſecundos cognomines*: & ſingulæ

Digitized by Google

ſingulæ mutationes dabunt terminos ſimplices ipſum α conſtituentes. Ideo hi tot erunt quot ſunt *Factores primi* mutandi. Sunt autem in termino β, ſedem $n-1\ldots mam$ occupante, *Factores primi* numero $m-n+2$. Ergo unus terminus ſimplex ipſius β producet $m-n+2$ terminos ſimplices pro α. Atqui eadem mutatio fieri debet in omnibus terminis ſimplicibus ipſius β. Quare in α toties erit terminorum ſimplicium numerus $m-n+2$, quot terminos ſimplices habet complexus β. Habeat p. Ergo α habebit terminos ſimplices omnino $p.\,m-n+2$. Sed ex his rejiciendi ſunt qui pluries repetuntur; id eſt tot, quot *Factores ſecundi* ſunt in termino α. Nam *ex gr.* terminus $abcd$ E naſcitur ex bcd AE, mutata A; ex adc BE, mutata B; ex abd CE, mutata C; & ex abc DE, mutata D. Sunt autem in termino α *Factores ſecundi* $n-1$. Toties ergo verti debet in unitatem numerus $n-1$, quoties continetur in $p.\,m-n+2$. Qui numerus cum contineat numerum $n-1$, per illum eſt dividendus. Et tandem fiet $\frac{p.\,m-n+2}{n-1}$ numerus terminorum ſimplicium componentium complexum α.

Hinc reliqua facile deducuntur. Habeat terminus γ terminos ſimplices numero q. Singuli continent *Factores primos* numero $m-n+3$, & terminus β *Factores ſecundos* numero $n-2$. Quare $p=\frac{q.\,m-n+3}{n-2}$; & $\frac{p.\,m-n+2}{n-1}=\frac{q.\,m-n+3.\,m-n+2}{n-2.\,n-1}$.

Nam ex terminis ſimplicibus ipſius γ conficiuntur termini ſimplices ipſius β, quemadmodum ex terminis ſimplicibus ipſius β conficiuntur termini ſimplices ipſius α. Eodem ratiocinio erit

$$q=\frac{r.\,m-n+4}{n-3},\ \&\ \frac{q.\,m-n+3.\,m-n+2}{n-2.\,n-1}$$

$$=\frac{r.\,m-n+4.\,m-n+3.\,m-n+2}{n-3.\,n-2.\,n-1}.$$

Pariter $r=\frac{s.\,m-n+5}{n-4}$, &

$$\frac{r.\,m-n+4.\,m-n+3.\,m-n+2}{n-3.\,n-2.\,n-1}=$$

$$\frac{s.\,m-n+5.\,m-n+4.\,m-n+3.\,m-n+2}{n-4.\,n-3.\,n-2.\,n-1};$$

Et ſic de reliquis, ad terminum ſecundum usque, qui conſtat ex m, terminis ſimplicibus; quia primus eſt ſimplex & continet m *Factores primos*, qui ſinguli mutandi ſunt in *ſecundos cognomines*. Quare progreſſio conſtituens numeratorem hujus fractionis erit

$m.\ m-1.\ m-2\ldots\ldots m-n+5.\ m-n+4.\ m-n+3.\ m-n+2.$

Et progreſſio conſtituens denominatorem ejusdem factionis erit

$1.\ 2.\ 5\ldots\ldots n-4.\ n-3.\ n-2.\ n-1.$

110. Idem profecto erit productum ex iisdem binomiis, ſeu multiplicatio incipiatur a *primis*, ſeu a *ſecundis Factoribus*. In prima hypotheſi terminus ſequens a ſiniſtra in dextram invenitur mutando *primos Factores* præcedentis in *ſecundos cognomines*. In altera hypotheſi terminus præcedens invenitur mutando *ſecundos Factores* ſequentis in *primos cognomines* (106. hujus). Hæ mutationes determinant numerum terminorum ſimplicium conſtituentium ſingulos terminos complexos, (106. & 108. hujus); & quot ſunt *Factores primi* in termino $n\ldots mo$ a primo tot ſunt *Factores ſecundi* in termino æque diſtante ab ultimo (103. hujus).

111. Si nunc omnes *Factores primi* exprimantur eadem littera x, facta ex aliquot *Factoribus primis* mutabuntur in poteſtates ipſius x, & poteſtas x^{m-n+1} erit in termino occupante $n\ldots mam$ ſedem.

112. Qua de cauſſa factum ex binomiis $x+a$; $x+b$; $x+c$; $x+d$; &c. ad numerum m usque, continebit, pro *Factoribus primis*, poteſtates.

x^{m}; x^{m-1}; x^{m-2}; x^{m-3}; x^{m-4}; $\ldots x^{0}$.

113. Quando *Factores primi* exponuntur eadem littera, facta ex *Factoribus ſecundis*, quæ cum ſingulis poteſtatibus *Factoris primi* juncta ſunt, dici ſolent *coefficientes*.

114. Ergo coefficiens ſecundi termini conſtabit ex aggregato omnium *Factorum ſecundorum*; coefficiens tertii termini ex aggregato omnium productorum ex binis *Factoribus ſecundis*; quarti ex aggregato productorum omnium ex ternis *Factoribus ſecundis*; $n\ldots mi$ ex aggregato productorum omnium ex $n-1$ *Factoribus ſecundis*.

115. Si etiam *Factores ſecundi* exponuntur eadem littera a, orietur binomii $x+a$ poteſtas, cujus exponens eſt m, numerus binomiorum eorundem ſe multiplicantium; id eſt $(x+a)^{m}$.

116. Quare facta ex *Factoribus ſecundis*, fient poteſtates

Digitized by Google

poteſtates ipſius a, & præter x^m; x^{m-1}; x^{m-2}; x^{m-3}; x^{m-4}; .... x^0, erunt in facto poteſtates a^0; a^1; a^2; a^3; a^4; .... a^m; & ipſe terminus $n \ldots mus$, quod pertinet ad *Factores* tum *primos* tum *ſecundos*, erit $a^{n-1} x^{m-n+1}$.

117. Sed terminus $n \ldots mus$ continebant terminos ſimplices numero

$$\frac{m \,.\, m-1 \,.\, m-2 \,.\, m-3 \ldots m-n+2}{1. \quad 2. \quad 3. \quad 4. \ldots n-1}$$

(109. hujus). Hæc facta ſunt eadem, quapropter unienda ſunt, & numeris exprimi debet quot fuerint unita (Art. XXVIII. hujus). Igitur præmittendæ ſunt progreſſiones inventæ ad hunc numerum determinandum.

118. Ideo totus terminus $n \ldots mus$ erit

$$\frac{m \,.\, m-1 \,.\, m-2 \,.\, m-3 \,.\, m-4 \ldots m-n+2.}{1. \quad 2. \quad 3. \quad 4. \quad 5 \ldots n-1} \; a^{n-1} x^{m-n+1}.$$

119. Terminus generalibus expreſſionibus ita conceptus, ut, illis diverſimode determinatis, præbeat omnes terminos iisdem legibus formatos, dicitur *terminus generalis*.

120. Fractio conſtans ex duabus progreſſionibus arithmeticis, & definiens numerum productorum æqualium, quæ unita fuerant in poteſtate binomii (117. hujus), dicitur *coefficiens numericus* poteſtatis.

Coefficiens numericus *poteſtatis confundi non debet cum* coefficiente *producti ex pluribus binomiis* primum terminum *communem*, *& ſecundos diverſos habentibus, qui deſcriptus fuit* N°. 113. *hujus*.

Terminus allatus N°. 117. hujus, eſt *terminus generalis* ipſius $(x+a)^m$, & in eo *coefficiens numericus* eſt

$$\frac{m \,.\, m-1 \,.\, m-2 \,.\, m-3 \,.\, m-4 \,.\, m-5 \ldots\ldots m-n+2}{1. \quad 2. \quad 3. \quad 4. \quad 5. \quad 6. \ldots\ldots n-1}.$$

121. Hic terminus hactenus definitus fuit a numero locorum; ſed poteſt & ſolet definiri ab exponente ipſius a. Hoc facile fiet ſi ponatur $n-1 = p$. Tunc habebitur

$$\frac{m \,.\, m-1 \,.\, m-2 \,.\, m-3 \,.\, m-4 \,.\, m-5 \,.\, m-6 \ldots\ldots m-p+1}{1. \quad 2. \quad 3. \quad 4. \quad 5. \quad 6. \quad 7. \ldots\ldots p} \; a^p x^{m-p};$$

ubi ſeries 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; ..... p, eadem eſt ac ſeries p; $p-1$; $p-2$; $p-3$; $p-4$ ..... 1 in qua erunt termini $p-q+2$; $p-q+1$; $p-q$; $p-q-1$; $p-q-2$ &c., (dummodo q ſit numerus integer numero p minor,) quia hujus ſeriei termini decreſcunt per unitates.

122. Quare terminus generalis N° 117. ſic ſcribi poteſt

$$\frac{m \,.\, m-1 \,.\, m-2 \,.\, m-3 \,.\, m-4 \,.\, m-5 \,.\, m-6 \,.\, m-7 \ldots m-p+1}{p \,.\, p-1 \,.\, p-2 \,.\, p-3 \ldots\ldots p-q+1 \,.\, p-q \,.\, p-q-1 \ldots 1.} \; a^p x^{m-p}.$$

123. Hinc facile ad datam poteſtatem elevabitur datum binomium, ponendo pro m datum exponentem datæ poteſtatis, & pro p exponentem, quem habet *Factor ſecundus* in termino quæſito. Semper autem ſimul inveniuntur duo termini æquidiſtantes a primo & ab ultimo (N°. 110.): atque ideo ſufficit operationem producere ad dimidiatum terminorum numerum.

Exemplum I. *Elevandum ſit binonium* a + b *ad quartam poteſtatem.* Hic eſt $m = 4$; quare primus terminus $= a^4$; & ultimus $= b^4$; coefficiens ſecundi $= 4$; ſecundus ipſe $= a^3b$, quia nempe $m - 1 = 3$; coefficiens tertii $\frac{m \,.\, m-1}{2.} = \frac{4 \,.\, 3}{2} = 6$, tertius $= a^2b^2$; coefficiens quarti

$$\frac{m \,.\, m-1 \,.\, m-2}{2. \; 3} = \frac{4 \,.\, 3 \,.\, 2}{2. \; 3} = 4;$$

quartus $= ab^3$; coefficiens quinti

$$\frac{m \,.\, m-1 \,.\, m-2 \,.\, m-3}{2. \; 3. \; 4.} \; \frac{4 \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 1}{2 \,.\, 3 \,.\, 4} = 1;$$

quintus ipſe b^4, quem ſupra invenimus eſſe ultimum; unde tota poteſtas eſt

$$a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^2 + b^4.$$

Exemplum II. *Elevandum ſit binomium* a − b *ad quintam poteſtatem.*

Quia petitur quinta poteſtas, erit

$m = 5$; $m-1 = 4$; $m-2 = 3$; $m-3 = 2$; $m-4 = 1$; $m-5 = 0$

qui ſunt exponentes ipſius a. Exponentes autem ipſius b ſunt

1; 2; 3; 4; 5;

(N°. 116. hujus). Erunt ergo Termini

$+a^5$; $-a^4b$; $+a^3b^2$; $-a^2b^3$; $+ab^4$; $-b^5$

& Coefficientes (N°. 117. hujus)

$m = 5$;

$$\frac{m \,.\, m-1}{2} = \frac{5 \,.\, 4}{2} = 5 \,.\, 2 = 10;$$

$$\frac{m \,.\, m-1 \,.\, n-2}{2. \; 3} = \frac{5 \,.\, 4 \,.\, 3}{2. \; 3} = 5 \,.\, 2 = 10;$$

$$\frac{m\cdot m-1\cdot m-2\cdot m-3}{2\cdot 3\cdot 4} = \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{2\cdot 3\cdot 4} = 5$$

quare poteſtas ipſa erit

$$a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5.$$

EXEMPLUM III. *Evehendum ſit ad ſextam poteſtatem binomium* $3bc - \frac{ff}{2}$.

Erit

$$m = 6;\ m-1 = 5;\ m-2 = 4;\ m-3 = 3;\ m-4 = 2;\ m-5 = 1$$

idcirco Termini

$$+729b^6c^6;\ -\frac{243b^5c^5ff}{2};\ +\frac{81b^4c^4f^4}{4};\ -\frac{27b^3c^3f^6}{8};\ +\frac{9b^2c^2f^8}{16},\ -\frac{3bcf^{10}}{32}\ +\frac{f^{12}}{64}$$

Et Coefficientes

$$m = 6$$

$$\frac{m\cdot m-1}{2} = \frac{6\cdot 5}{2} = 3\cdot 5 = 15$$

$$\frac{m\cdot m-1\ m-2}{2\cdot 3} = \frac{6\cdot 5\cdot 4}{2\cdot 3} = 5\cdot 4 = 20$$

Quare tota poteſtas

$$729b^6c^6 - 729b^5c^5ff + \frac{1215b^4c^4f^4}{4} - \frac{135b^3c^3f^6}{2} + \frac{135b^2c^2f^8}{16} - \frac{9bcf^{10}}{16} + \frac{f^{12}}{64}.$$

EXEMPLUM IV. *Quaratur binomii* $\frac{ab}{c} - cff$ *quarta poteſtas*

Erit

$$m = 4;\ m-1 = 3;\ m-2 = 2;\ m-3 = 1$$

Unde Termini

$$+\frac{a^4b^4}{c^4};\ -\frac{a^3b^3ff}{c^2};\ +a^2b^2f^4;\ -abc^2f^6;\ +c^4f^8$$

& Coefficientes

4; 6; 4

atque poteſtas

$$\frac{a^4b^4}{c^4} - \frac{4a^3b^3ff}{c^2} + 6a^2b^2f^4 - 4abc^2f^6 + c^4f^8.$$

EXEMPLUM V. *Poſcatur tertia poteſtas binomii* $a\sqrt{bc} - c\sqrt{ab}$.

Erit

$$m = 3;\ m-1 = 2;\ m-2 = 1$$

Hinc Termini

$$+a^3bc\sqrt{bc};\ -a^2bc^2\sqrt{ab};\ +a^2bc^2\sqrt{bc};\ -abc^3\sqrt{ab}$$

Et Coefficientes

3; 3;

Totas Poteſtas

$$a^3bc\sqrt{bc} - 3a^2bc^2\sqrt{ab} + 3a^2bc^2\sqrt{bc} - ab^3\sqrt{ab}$$

123. Polynomium conſtans ex indefinito terminorum numero, dici ſolet *Infinitinomium.*

124. Sit infinitinomium $x + a + b + c + d + e + f + g +$ &c, evehendum ad poteſtatem, cujus index eſt m; & termini diſponendi ſint ſecundum dimenſiones ipſius x. Ponatur $A = a + b + c + d + e + f + g + h +$ &c; infinitinomium propoſitum exponetur per $x + A$.

Terminus generalis ipſius $(x+A)^m$ eſt (N°. 121. hujus)

$$\text{I. } \frac{m.\ m-1.\ m-2.\ m-3.\ m-4.\ m-5.\ m-6.\ m-7\ \ldots\ m-p+1}{p.\ p-1.\ p-2.\ p-3.\ p-4.\ p-5.\ p-6.\ p-7\ \ldots\ 1}\ x^{m-p}A^p.$$

Ponatur $B = b + c + d + e + f + g + h + i +$ &c, erit $A = a + B$, & $A^p = (a+B)^p$, cujus terminus generalis eſt

$$\frac{p.\ p-1.\ p-2.\ p-3.\ p-4.\ p-5.\ p-6.\ p-7\ldots\ p-q+1}{q.\ q-1.\ q-2.\ q-3.\ q-4.\ q-5.\ q-6.\ q-7\ldots\ 1}\ a^{p-q}B^q.$$

Hic ſubſtituatur pro A^p in termino generali I., hic fiet

$$\frac{m.\ m-1.\ m-2.\ m-3\ldots m-p+1.\ p.\ p-1.\ p-2.\ p-3\ldots p-q+1}{p.\ p-1.\ p-2.\ p-3\ldots p-q+1.\ p-q\ldots 1.\ q.\ q-1.\ q-2.\ q-1\ldots 1}\ x^{m-p}a^{p-q}B^q.$$

Et, quia numeri $p;\ p-1;\ p-2;\ p-3\ \ldots\ p-q+1$, qui ſunt tum in numeratore tum in denominatore hujus coefficientis numerici, dant unitatem pro quoto, terminus generalis I; manebit

$$\text{II. } \frac{m.\ m-1\ m-2\ m-3.\ m-4.\ m-5.\ m-6.\ m-7\ldots\ m-p+1}{p-q.\ p-q-1.\ p-q-2.\ p-q-5\ldots 1\ q.\ q-1.\ q-2.\ q-3\ldots q-1\ldots 1}\ x^{m-p}a^{p-q}B^q.$$

Ponatur $C = c + d + e + f + g + h + i + k +$ &c, erit $B = b + C$, & $B^q = (b+C)^q$, cujus terminus generalis eſt

$q.q-1.$

$$\frac{q.\,q-1.\,q-2.\,q-3.\,q-4.\,q-5.\,q-6.}{r.\,r-1.\,r-2.\,r-3.\,r-4.\,r-5.\,r-6.}$$
$$\frac{q-7\ldots\ldots q-r+1}{r-7\ldots\ldots\ldots 1}\, b^{q-r}\, C^{r}.$$

Hic ſubſtituatur pro B^{q} in termino generali II., ille, ob numeros a q ad $q-r+1$, qui erunt tum in numeratore, tum in denominatore ſui coefficientis numerici, fiet

$$\frac{m.\,m-1.\,m-2.\,m-3.\,m-4.\,m-5.\,m-6.\,m-7\ldots\ldots\ldots m-p+1}{p-q.\,p-q-1.\,p-q-2\ldots 1.\,q-r.\,q-r-1.\,q-r-2\ldots 1.\,r.\,r-1.\,r-2\ldots r-s+1.\,r-s\ldots 1.}$$
$$x^{m-p}\, a^{p-q}\, b^{q-r}\, C^{r}.$$

Eodem pacto, ponatur
$D = d+e+f+g+h+i+k+l+$ &c; id eſt
$C = c+D$; & $C^{r} = (c+D)^{r}$; deinde
$E = e+f+g+h+i+k+l+m+$ &c;
id eſt $D = d+E$, & $D^{s} = (d+E)^{s}$, & ſic de reliquis. Poteſtatum $(c+D)^{r}$; $(d+E)^{s}$ &c, quærantur termini generales, & ſubſtituantur: invenietur terminus generalis infinitinomii evecti ad poteſtatem, cujus index eſt m,

125. $$\frac{m.\,m-1.\,m-2.\,m-3.\,m-4.\,m-5.\,m-6.\ldots\ldots m-p+1}{p-q.\,p-q-1.\,p-q-2\ldots 1.\,q-r.\,q-r-1.\,q-r-2\ldots 1.\,r-s.\,r-s-1.\,r-s-2\ldots 1.\,s-t.\,s-t-1\ldots 1\ \&c.}$$
$$x^{m-p}\, a^{p-q}\, b^{q-r}\, c^{r-s}\, d^{s-t}\ \&c.$$

Ubi ſemper in primo termino erit unus *Factor*; in ſecundo erunt duo *Factores* diverſi; in tertio vel duo vel tres; in quarto vel duo, vel tres, vel quatuor, in $p+1\ldots$ *m*e a 2 ad $p+1$. Numerator coefficientis numerici eſt idem, quem invenimus N°. 109., ejus vero denominator conſtat ex tot ſeriebus ab exponente ſecundi *Factoris* ad unitatem; ab exponente tertii *Factoris* ad unitatem, &c., quot ſunt *Factores* præter primum.

Statim utile eſt hoc theorema ad inveniendas poteſtates polynomiorum, quod exemplis illuſtrabimus.

Exemplum I. *Sit trinomium* a+b+c *evehendum ad quartam poteſtatem.*

Quia polynomium propoſitum tres habet terminos, tres, ut plurimum, eſſe poſſunt *Factores* in termino generali. Is ergo fit

$$\frac{m.\,m-1.\,m-2\ldots\, m-p+1}{1.\,2.\,3\ldots p-q.\;1.\,2.\,3\ldots q}\; a^{m-p}\, b^{p-q}\, c^{q}.$$

Statim $m = 4$, & primus terminus eſt a^4.

In ſecundo eſt $p = 1$; $m-p+1 = m-1+1 = m = 4.$, & numerator coefficientis eſt 4. Sed aut $q = 0$, aut $q = 1$.

Sit $q = 0$; erit $a^{m-p}\, b^{p-q}\, c^{q} = a^3 b^1 c^0 = a^3 b$; & quia $p-q = 1$ & $q = 0$, denominator coefficientis fit 1; & ſecundi termini prima pars cum coefficiente eſt $4a^3b$.

Sit $q = 1$; erit $p-q = 1-1 = 0$; & $a^{m-p}\, b^{p-q}\, c^{q} = a^3 b^0 c^1 = a^3 c$; & quia $p-q = 0$; $q = 1$, denominator coefficientis fit 1; ſecunda pars ſecundi termini eſt $4a^3c$, & totus terminus $4a^3(b+c)$.

In tertio termino eſt $p = 2$; & $m-p = 4-2 = 2$; & $a^{m-p} = a^2$. Item $m-p+1 = 3$; & $m-1\ldots m-p+1 = 4.\,3.$ Sed aut $q = 0$; aut $q = 1$, aut $q = 2$.

Sit $q = 0$, erit $p-q = p = 2$; & $a^{m-p}\, b^{p-q}\, c^{q} = a^2 b^4$, & $1.\,2\ldots p-q = 1.2.$ Quare prima pars tertii termini eſt $\frac{4.\,3}{1.\,2.}\, a^2 b = 6a^2b^2$.

Sit $q = 1$; erit $p-q = 2-1 = 1$; & $a^{m-p}\, b^{p-q}\, c^{q} = a^2bc$, atque $1.\,2\ldots p-q.\;1.\,2\ldots q = 1.$ Ideo ſecunda pars tertii termini eſt $4.\,3\, a^2bc = 12\, a^2bc$.

Sit $q = 2$; erit $p-q = 2-2 = 0$; & $a^{m-p}\, b^{p-q}\, c^{q} = a^2 b^0 c^2 = a^2c^2$, atque $1.\,2\ldots p-q.\;1.\,2\ldots q = 1.\,2.$; & tertia pars tertii termini $\frac{4.\,3}{1.\,2.}\, a^4c^2 = 6a^2c^2$, & totus tertius termi- $6\, a^2(b^2+2bc+c^2)$.

In quarto termino eſt $p = 3$; $m-p = 4-3 = 1$; & $a^{m-p} = a$. Item $m-p+1 = 2$; & $m.\,m-1\ldots m-p+1 = 4.\,3.\,1.$ Sed aut $q = 0$; aut $q = 1$, aut $q = 2$, aut $q = 3$. Sit $q = 0$, erit $p-q = p = 3$; & $ab^{p-q}\, c^{q} = ab^3$, Item $1.\,2\ldots p-q = 1.2.3.$

&c

& prima pars quarti termini $\frac{4.\,3.\,2}{1.\,2.\,3} ab^3 = 4ab^3$

Sit $q = 1$, erit $p - q = 3 - 1 = 2.$, & $ab^{p-q}c^q = ab^2c$. Item $1.\,2 \ldots p - q = 1.2.$, & ſecunda pars quarti termini $\frac{4.\,3.\,2}{1.\,2.} ab^2c = 12\,ab^2c$.

Sit $q = 2$, erit $p - q = 3 - 2 = 1$; & $ab^{p-q}c^q = abc^2$. Item $1.\,2 \ldots p - q. = 1.\,2 \ldots q = 1.2$; & tertia pars quarti termini $12\,abc^2$.

Sit $q = 3$; erit $p - q = 3 - 3 = 0$, & $ab^{p-q}c^q = ac^3$ Item $1.\,2 \ldots p - q. = 1.\,2 \ldots q = 1.2.3.$ & quarta pars quarti termini $\frac{4\,3.2}{1.2.3} ac^3$, & totus quartus terminus $4a\,(b^3 + 3\,b^2\,c + 3\,bc^2 + c^3)$.

In quinto termino eſt $p = 4$; $m - p = 4 - 4 = 0$, & $a^{m-p} = a^0 = 1$. Sed $m - p + 1 = 1$, & $m.\ m - 1.\ m - 2 \ldots m - p + 1 = 4.\,3.\,2.\,1.$ Jam aut $q = 0$, aut $q = 1$; aut $q = 2$; aut $q = 3$; aut $q = 4$.

Sit $q = 0$; erit $p - q = 4$; & $b^{p-q}c^q = b^4.$, $1.\,2.\,3 \ldots p - q = 1.\,2.\,3.\,4$, & prima pars quinti termini eſt b^4.

Reliquæ partes erunt, ut patet, reliqui termini ipſius $(b + c)^4$.

EXEMPLUM. II. *Infinitinomii* $a + b + c$ &c. *ad quartam poteſtatem elevandi quaeruntur terminorum* a^3g: a^2bf; & $abcf$; *coefficientes.*

Jam m, exponens poteſtatis, eſt 4. Quapropter pro termino a^3g debet eſſe $m - p = 3$; (exponenti primi factoris a;) & eſt $m = 4$, ergo $4 - p = 3$, & $p = 1$. Iterum $p - q = 1$ & $q = 1$, exponenti alterius factoris b;) & eſt $p = 1$; quare

$1 - q = 1$ & $q = 0 = r = s$ &c.

Erit ergo $m - p + 1 = 4 - 1 + 1 = 4 = m$

Quocirca terminus generalis vertitur in $4a^3q$.

Pro termino a^2bf debet eſſe

$4 - p = 2$ (exponenti primi factoris a;) ergo $p = 2$

Item $p - q = 1$, (exponenti ſecundi factoris b;) aut $2 - q = 1$; & $q = 1$.

Pariter $q - r = 1$, (exponenti tertii factoris f;) vel $1 - r = 1$, & $r = 0 = s$; &c.

Quocirca

$$m - p + 1 = 4 - 2 + 1 = 3;$$
$$p - q = 2 - 1 = 1;\ q - r = 1.$$

Et terminus generalis fit

$4.\,3.\ a^2bf = 12\,a^2bf$.

Denique pro termino $abcf$ debet eſſe $4 - p = 1$, (exponenti primi factoris a;) igitur $p = 3$

Pariter $3 - q = 1$, (exponenti ſecundi factoris b;) unde $q = 2$.

Haud aliter $2 - r = 1$, (exponenti tertii factoris c;) quare $r = 1$.

Denique $1 - s = 1$, (exponenri quarti factoris f;) & ideo $s = 0 = t$ &c.

Eſt igitur

$$m - p + 1 = 4 - 3 + 1 = 2;$$
$$p - q = 1;\ q - r = 1;$$

& terminus generaiis $4.\,3.\,2.\ abcf = 24\,abcf$.

EXEMPLUM III. *In eodem infinitinomio ad ſextam poteſtatem elato petuntur terminorum.*

a^4cf; a^3f^2g; $a^2b^2c^2$; a^2b^2cd;
& a^2bcdo;-coefficientes.

Quoniam $m = 6$, pro termino a^4cf debet eſſe

$6 - p = 4$; & $p = 2$; item $p - q = 1 = 2 - q$; & $q = 1$

pariter $q - r = 1 = 1 - r$, & $r = 0$.

Quam ob rem erit $m - p + 1 = 6 - 2 + 1 = 5$;

& terminus generalis fiet $6.\,5.\ a^4cf = 30a^4cf$.

Sed pro termino a^3f^2g debet eſſe

$6 - p = 3$; & $p = 3$; eodem pacto $p - r = 2 = 3 - r$; & $r = 1$; $r - s = 1 = 1 - s$; & $s = 0$ &c.

Erit igitur $m - p + 1 = 6 - 3 + 1 = 4$;

& terminus generalis convertetur in $\frac{6.\,5.\,4.}{1.\,2} a^3f^2g = 60\,a^3f^2g$

Haud ſecus pro termino $a^2b^2c^2$ debet eſſe

$6 - p = 2$; & $p = 4$; item $p - q = 2 = 4 - q$; & $q = 2$; pariter $q - r = 2 = 2 - r$; & $r = 0$.

Et ideo habebitur $m - p + 1 = 6 - 4 + 1 = 3$; & terminus generalis determinabitur $\frac{6.\,5.\,2.\,3}{1.\,2.\,2} a^2b^2c^2 = 90a^2b^2c^2$.

Pariter pro termino a^2b^2cd debet eſſe

$6 - p = 2$; & $p = 4$; atque

$p - q = 2$ & $q = 2$;

Sed

Digitized by Google

Sed
$q - r = 1 = 2 - r$; & $r = 1$; atque $r - s = 1$; & $s = 0$.
Quapropter iterum erit $m - p + 1 = 3$; & terminus generalis dabit $\frac{6.\ 5.\ 4.\ 3}{1.\ 2.}$ $a^2b^2cd = 180a^2b^2cd$.

Demum pro termino a^2bcde debet eſſe

$p = 4$; $4 - q = 1$; & $q = 3$; $q - r = 1 = 3 - r$ & $r = 2$; $r - s = 1$; & $s = 1$; $s - s = 1$; & $s = 0$.
Terminus generalis ergo præbebit 6. 5. 4. 3 $a^2bcde = 360\,a^2bcde$.

126. *Si in ſingulis infinitinomii terminis eſt alicujus ſimboli* q *poteſtas, cujus exponentes creſcant ut numeri naturales* 0; 1; 2; 3; 4; &c, *& poteſtates iſtæ pro coefficientibus ordinentur, dico quod in infinitinomii poteſtate* r *terminus quilibet ex uno pluribusque radicis terminis conſlatur tot modis quot* s *exponens, quem* q *habet in poteſtate, formari poteſt additione numerorum* 0; 1; 2; 3; &c... s; *quorum aliquot poſſunt* s... *ies repeti.*

Sit infinitinomium ad poteſtatem r evehendum
$a + bq + cq^2 + dq^3 + eq^4 + fq^5 + gq^6 + hq^7 +$ &c.

Quoniam hoc infinitinomium in ſe aliquoties ducendum eſt, ut habeatur poteſtas r, quisque ejus terminus & per ſe & per ſingulos alios multiplicabitur, id eſt terminorum exponentes invicem addentur. Sed
$s = 0 + s = s - 1 + 1 = s - 2 + 2 = s - 2 + 1 + 1 = s - 3 + 3 = s - 3 + 2 + 1 = s - 3 + 1 + 1 + 1 =$ &c. & omnes numeri 0; 1; 2; 3; 4; &c... s ſunt in infinitinomio ad poteſtatem r extollendo. Ergo exponens s conficietur additione numerorum &c.

127. Quando numeri componentes exponentem s ſunt diverſi, puta 2; 3; 4; &c., quantitates q^2; q^3; q^4; &c.; habendæ ſunt pro diverſis factoribus in inveſtigatione coefficientis; tales enim ſunt, etſi forte ſimbolum q ſemper idem ſit. Sed quando idem numerus reperitur, puta 2; 2; 2; &c., tunc q^2 evehitur ad poteſtatem, cujus exponens eſt numerus exponentium æqualium, & pro uno factore ad illam poteſtatem elato conſideranda eſt quantitas illa. Semper autem adeſſe intelligitur primus terminus a evectus ad poteſtatem $r - n$, poſito n exponente litteræ, per quam multiplicatur poteſtas ipſius q.

128. Facile igitur invenietur terminus s hujusmodi infinitinomii ad poteſtatem r provecti. Nam in illo termino quantitas q habebit exponentem $s - 1$, ut facile deducitur ex N°. 120. hujus. Quære, per N°. 127. quot modis hic exponens additione numerorum 0; 1; 2; 3; &c.; confici poſſit, ac tandem pro ſingulis modis detege coefficientem, ut monſtratum eſt, (N°. 124. hujus;) probe obſervans quæ monita ſunt N°. 127. hujus.

Exemplum I. *Quæritur infinitinomii evecti ad poteſtatem* r *terminus ſecundus.*

Erit exponens ipſius q in hoc termino $2 - 1 = 1$; quare unico modo formari poteſt; (nempe ex $0 + 1$;) eritque terminus $a^{r-1}bq$, & cum duo tantum ſint factores, coefficiens erit vulgaris r.

Exemplum II. Si quæreretur terminus tertius, eſſet $s - 1 = 3 - 1 = 2$; eſt autem $2 = 0 + 2 = 1 + 1$; igitur hic terminus fiet ex primo radicis ducto in tertium, aut ex ſecundo elevato ad ſecundam poteſtatem. In prima hypotheſi terminus erit $a^{r-1}cq^2$; & exponens r. In ſecunda autem terminus erit $a^{r-2}b^2q^2$; & coefficiens determinabitur ex vulgari poteſtatum geneſi, quia duo tantum ſunt factores, eritque $\frac{r.\ r-1}{1\ .\ 2.}$.

Exemplum III. Petatur nunc quartus terminus, atque erit $s - 1 = 4 - 1 = 3$. Atqui eſt $3 = 0 + 3 = 1 + 2 = 1 + 1 + 1$; ergo terminus petitus fiet.

Primo ex primo termino radicis ducto in quartum, & erit $a^{r-1}dq^3$, & ejus coefficiens erit r,

Secundo, ex ſecundo termino radicis ducto in tertium, eritque $a^{r-2}bcq^3 = a^{r-2} \times bq \times cq^2$.

Nunc, ut determinetur hujus coefficiens; erit

$r - s = r - 2$; & $s = 2$; $s - m = 2 - m = 1$; & $m - n = 1$; & $n = 0$.

Quare

Quare $r-s+1 = r-2+1 = r-1$; & coefficiens $= r.\overline{r-1}$.

Tertio terminus quæſitus conflabitur ex ſecundo evecto ad tertiam poteſtatem, eritque $a^{\overline{r-3}} b^3q^3$, cujus coefficiens eſt vulgaris.

Exemplum IV. Demum, ſi poſtularetur terminus ſeptimus, eſſet $s-1=6$. Sed $6=0+6=1+5=2+4=3+3=1+1+4=1+2+3=2+2+2=1+1+1+3=1+1+2+2=1+1+1+1+2=1+1+1+1+1+1$. Igitur terminus ſeptimus conſtatur.

Primo, ex ſeptimo radicis termino, eritque $a^{\overline{r-1}} gq^6$, & r ejus coefficiens.

Secundo, ex radicis termino ſecundo ducto in ſextum, & erit $a^{\overline{r-2}} \times bq \times fq^5$; atque illius coefficiens $r.\overline{r-1}$.

Tertio, ex tertio termino radicis ducto in quintum, & erit $a^{\overline{r-2}} \times cq^2 \times eq^4$, cujus coefficiens reperietur $r.\overline{r-1}$ ut ſupra.

Quarto, ex termino radicis quarto, ad ſecundam poteſtatem elato; atque erit $a^{\overline{r-2}} d^2q^6$, qui pro coefficiente habebit $\frac{r.\overline{r-1}}{2}$.

Quinto, ex ſecundo radicis termino ad ſecundam poteſtatem evecto & in quintum ducto, ac reperietur $a^{\overline{r-3}} \times b^2q^2 \times eq^4$; cui tribuendus eſt coefficiens $\frac{r.\overline{r-1}.\overline{r-2}}{2}$.

Sexto, ex facto terminorum ſecundi, tertii, & quarti, eritque $a^{\overline{r-3}} \times bq \times cq^2 \times dq^3$ qui ſibi vindicat coefficientem $r.\overline{r-1}.\overline{r-2}$.

Septimo, ex tertia poteſtate tertii termini, quæ dat $a^{\overline{r-3}} c^3q^6$, cui debetur coefficiens $\frac{r.\overline{r-1}.\overline{r-2}}{1.\ 2.\ 3}$.

Octavo, ex tertia poteſtate ſecundi ducta in quartum, unde oritur $a^{\overline{r-4}} \times b^3q^3 \times dq^3$. atque hujus coefficiens $\frac{r.\overline{r-1}.\overline{r-2}.\overline{r-3}}{1.\ 2.\ 3}$.

Nono, ex ſecunda ſecundi termini poteſtate ducta in ſecundam tertii, unde exſurgit $a^{\overline{r-4}} \times b^2q^2 \times c^2q^4$, qui poſtulat coefficientem $\frac{r.\overline{r-1}.\overline{r-2}.\overline{r-3}}{1.\ 2.\ 1.\ 2}$.

Decimo, ex quarta poteſtate ſecundi termini ducta in tertium, eritque $a^{\overline{r-5}} \times b^4q^4 \times cq^2$, cui convenit coefficiens $\frac{r.\overline{r-1}.\overline{r-2}.\overline{r-3}.\overline{r-4}}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$.

Undecimo tandem ex ſexta ſecundi termini poteſtate, quæ dat terminum $a^{\overline{r-6}} b^6q^6$ & coefficientem $\frac{r.\overline{r-1}.\overline{r-2}.\overline{r-3}.\overline{r-4}.\overline{r-5}}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6}$.

129. Cum quantitas quævis ſibimet ipſa ſemper ſit æqualis, quivis terminus s in poteſtate infinitinomii incipit a termino s radicis ducto in primum; reliquæ autem partes termini s in poteſtate conflabuntur ex terminis radicis ipſum radicis s terminum antecedentibus.

130. Quapropter determinandi ſunt in poteſtate coefficientes terminorum ordine, primo primi, deinde ſecundi, poſtea tertii &c.

131. Hunc ordinem ſervans facile coefficientes omnes definiet, nihil enim faciendum eſt quam determinare, quibus quantitatibus notis æqualis ſit quantitas unica unius dimenſionis, quod ſemper fieri poteſt per quatuor primas arithmeticæ regulas.

132. Si exponentes infinitinomii in N°. 126. hujus, eſſent 0; m; $2m$; $3m$ &c. agendum eſſet, ut ſi forent $0, 1, 2, 3$, &c. Quoniam enim $s\ m$ debet confici ex 0; m; $2m$; $3m$ &c; patet quod haud ſecus conflabitur ac s ex 0; 1; 2; 3 &c.

Si vero exponentes eſſent m; $m+n$; $m+2n$; $m+3n$ &c., totum infinitinomium dividi poſſet per q^m. Tunc reſtarent exponentes 0; n; $2n$; $3n$; &c.

Tracta infinitinomium, cujus exponentes ſunt 0; n; $2n$; $3n$; &c.; & quidquid inveneris multiplica per q^m.

CAPUT

(*a*) CAPUT SEXTUM.

DE DIVISIONE.

XLVI. *Diviſio in numeris inſtituitur quærendo quot vicibus diviſor in dividendo continetur, totieſque auferendo, & ſcribendo totidem unitates in quoto. Idque iterato, ſi opus eſt, quamdiu diviſor auferri poteſt.* (*b*).

Sic ad dividendum 63 per 7, quære quoties 7 continetur in 63 & emergent 9 pro quoto præciſe. Adeoque $\frac{63}{7}$ valet 9. Inſuper ad dividendum 371 per 7, præfige diviſorem 7,

7) 371 (53
35
——
21
21
——
0

& imprimis opus inſtituens in initialibus figuris dividendi proxime majoribus diviſore, nempe in 37, dic quoties 7 continetur in 37? Reſp. 5. Tum ſcripto 5 in quoto, aufer 5 . 7 ſeu 35 de 37, & reſtabit 2, cui adnecte ultimam figuram dividendi nempe 1, & fit 21 reliqua pars dividendi, in qua proximum opus inſtituendum eſt. Dic itaque, ut ante, quoties 7 continetur in 21? Reſp. 3. Quare ſcripto 3 in quoto, aufer 3 . 7 ſeu 21 de 21 & reſtabit 0. Unde conſtat 53 eſſe numerum præciſe, qui oritur ex diviſione 371 per 7. (*c*).

(*d*) XLVII.

(*a*) 133. Quanſitas ex plurium multiplicatione ita conflata, poteſt reſolvi in eas omnes, quibus conſtat: Sic *ex. gr.* Cum $aa + 2ab + bb = (a+b).(a+b)$, poterit rurſus reſolvi in $a+b$, $a+b$ ex quibus compoſita eſt:

Hanc reſolutionem facere, dicitur *quantitatem dividere.*

134. Quantitas dividenda per 1, & quotum hujus diviſionis æquantur, nam tunc quantitas dividenda eſt ad unitatem, ut quotum ad unitatem (Eucl. 9. V.)

(*b*) 135. Si factum quodvis ab ſecetur in quotlibet partes, bf, bc, bg eundem factorem b habentes, aggregatum ex omnibus quantitatibus, quæ ductæ erant in b, erit alter factor, $c+f+g=a$.

Nam $ab = bc + bf + bg$ (ex hyp.): ſi nunc tam ab, quam $bc+bf+bg$ dividantur per b eveniet a, c, f, g, & his junctis ſigno $+$ $(c+f+g)$ ſed $ab = a.b$, & $bc+bf+bg = b(c+f+g)$ ergo $a.b = b.(c+f+g)$, quare $a = c+f+g$ (Eucl. Ax. 6.)

(*c*) 136. In numeris idem fieri liquet, regula Auctoris, nam cum invenio 7 quinquies contineri in 37, divido 37 per 7, cum autem ex 37 ſubtraho $35 = 5 \times 7$, factum totum 371 ſeco in partes, quarum una factorem habet 7; Jam ex 37 ablato 35 reſtat 2, id eſt, duæ decades, quia 37 non exprimit triginta ſeptem unitates, ſed 37 decades, quare ipſi 2 ſubjicienda eſt unitas, quod dat 21 unitates, aut duas decades cum unitate. Quæro nunc, quoties 7 contineatur in 21, & reperio 3; &

(*d*) XLVII. Atque ita ad dividendum 4798 per 23, opus primo inſtituens in initialibus figuris 47 dic quoties 23 continetur in 47? Reſp. 2. Scribe ergo 2 in quoto, & de 47 ſubduc 2 . 23 ſeu 46, reſtatque 1, cui ſubjunge proximum numerum dividendi, nempe 9, & fit 19 in ſubſequens opus. Dic itaque quoties 23 continetur in 19? Reſp. 0. Quare ſcribe 0 in quoto; & de 19 ſubduc 0 . 23 ſeu 0; & reſtat 19, cui ſubjunge ultimum numerum 8, & fit 198 in proximum opus. Quamobrem dic ultimo quoties 23 continetur in 198, (id quod ex initialibus numeris 2 & 19 conjici poteſt animadvertendo quoties 2 continetur in 19.) Reſp. 8. Quare ſcribe 8 in quoto & de 198 ſubduc 8 . 23 ſeu 184, reſtabitque 14 adhuc diuidendus per 23. Adeoque quotus erit $208\frac{14}{23}$. Quod ſi hujusmodi fractio minus placeat, poſſis divisionem in fractionibus decimalibus ultra ad libitum proſequi, ſemper adnectendo circulum numero reſiduo. Sic reſiduo 14 adnecto 0, fitque 140. Tum dic quoties 23 ſit in 140? Reſp. 6. ſcribe ergo 6 in quoto; & de 140 ſubduc 6 . 23 ſeu 138, & reſtabit 2, cui

& hoc faciens alteram partem (quæ eſt 21) facti 371 divido per 7 (ut ſupra); ex 21 aufero 3 . 7, id eſt, ſeco factum in partem alteram habentem pro factore 7, quod erat faciendum, ſic enim invenio $371 = 350 + 21 = 7 \cdot (50 + 3) = 7 \times 53$, & $\frac{371}{7} = \frac{7 \cdot 53}{7} = 53$.

(*d*) 137. Cum diviſor conſtat pluribus numeris, ut ſi dividendum eſſet 59598, per 387, primo *ponderandum*, an totus diviſor major, an minor ſit tot ex initialibus dividendi figuris, quot ſunt in diviſore; ita in ſubiecto exemplo, ex dividendo ſegrego tres primas figuras 595, quia tres omnino ſunt figuræ in diviſore 387, & perſpicio 595 ſuperare 387. Quæro facilitatis gratia quoties prima figura diviſoris (3) contineatur in prima dividendi (5); reperio 1, quem numerum ſcribo in quoto, duco diviſorem in 1, & factum 387 ſubtraho ex 595, reſtat 208, qui numerus non continet diviſorem 387, eum ergo augeo adnectendo 9

```
387)  59598  (154
      387
      ----
      2089
      1935
      ----
      1548
```

nunc quæro quoties 3 ſit in 20, invenio 6; ſed 6 . 387 = 2322 ſuperat 2089, ergo 6 eſt quotum æquo majus; quare quæro numerum, qui ductus in 387 det aut 2089, aut eo minorem: pono igitur 5; ex 2089 ſubtraho 1935 = 387 . 5, remanet 154, cui ſubnecto 8, & quæro quoties 3 ſit in 15, invenio 5, ex 1548 aufero 387 . 5 = 1935, quod fieri nequit; igitur in quoto pono 4, ex 1548 ſubtrah. 387 . 4 = ſupereſt 0: ergo $59598 = 38700 + 19350 + 1548 = 387 \cdot (100 + 50 + 4) = 387 \cdot 154$, & $\frac{59598}{387} = \frac{387 \cdot 154}{387} = 154$.

138 Nota quod ſemper quotum diminuendum eſt, cum diviſor ductus in quotum, numerum e dividendo ſumptum, ſuperat.

139. Si diviſor major eſſet figuris dividendi ſumptis juxta N°. 137, iis ſequens figura addenda eſſet.

Sic ſi 151998 dividi debeat per 987, quia diviſor ſuperat tres priores dividendi figuras (151), iis addo 9, & divido 1519 per 987 modo ſupra indicato, unde venit 154:

```
987 )  151998  ( 154
       987
       ----
       5329
       4935
       ----
        3948
        3948
       ----
       0000
```

cui adnecte o ut ante. Et ſic opere ad arbitrium continuato, emerget tandem quotus 208, 6086, &c.

23) 4798 (208,6086, &c.
46
19
00
198
184
140
138
20
00
200
184
160

XLVIII. Ad eundem modum fractio decimalis 3, 5218 per fractionem decimalem 46, 1 dividitur, & prodit 0, 07639. &c.

46, 1) 3, 5218 (0,07639
3, 227
2948
2766
1820
1383
4370

Ubi nota quod in quoto tot figuræ pro decimalibus abſcindendæ ſunt, quot ſunt in ultimo dividuo plures quam in diviſore.

Ut in hoc exemplo quinque, quia ſex ſunt in ultimo dividuo. 0,004370 & una in diviſore 46, 1. (*d*).

Exem-

(*d*) 140. Vel. Reduc datos numeros ad unitates homogeneas; ſi diviſor aliquoties continetur in dividendo, quotum hoc incipiet a numeris integris; ſin vero, dividendo adde o, quo facto ſi diviſio fieri poteſt, quotum ita inventum incipiet a decimalibus primis; ſi diviſio fieri nequit, adde etiam o, & quotum incipiet a decimalibus ſecundis *&c.* In primo exemplo art. XLVIII, dividendum 3, 5218 continet ad dextram decimales quartas, ad has reduc diviſorem 46, 1, addens ter o, unde fiet 461000; tunc hi numeri tibi ſint ut vulgares, habent enim unitates homogeneas; ſed quia 35218 dividi nequit per 461000 illo majorem, dividendo adde o, & quoti prima figura erit decimalis prima, quia dividendum redactum eſt ad decimales: cum vero neque nunc 352180 dividi poſſit per 461000, rurſus ei adjice o, & quoti prima figura erit decimalis ſecunda, perage ergo diviſionem, & invenies 0,07639 &c.

Exempla plura lucis gratia ſubjunximus

9043) 20844115 (2305
18086
27581
27129
45215
45215
0

72,4) 2099,6 (29 (e).
1448
6516
6516
0

(f)
50,18) 137,995 (275
10036
37635
35126
25090
25090
0

(g)
0,0132) 0,051513 (3,9025
396
1191
1188
330
264
660
660
0

XLIX.

(e) 141. Quia diviſor & dividendum hujus exempli tantum habent decimales primas, divide, per regulam jam traditam, 20996 per 724, & quia hæc diviſio fieri poteſt, habebis integros numeros.

724] 20996 [29
1448
6516
6516
0000

(f) 142. Diviſor redactus ad decimales tertias erit 50180, per quem divide 137995, quotum incipiet per integros, quia diviſio fieri poteſt: ſed poſt hanc diviſionem reſtat 37635, quod dividi nequit per 50180, ergo adde 0, & quotum incipiet a decimalibus, & ſic perge.

50180) 137995 (2,75
100360
376350
351260
250900
250900
000000

(g) 143. Redige diviſorem ad decimales ſextas, habebis 0, 013200, dele duas primas cyphras, ut inutiles, & divide 51513 per 13200, quotum incipiet ab integris.

Cum vero ſubtractio det 11913, quod dividi nequit per 13200, ei adde 0, & perge; ſed quia reſiduum 330 auctum 0 dividi nequit, pone in quoto 0, adde rurſus 0, & perge ad finem usque.

13200) 51513 (3,9025.
39600
119130
118800
33000
26400
66000
66000
00000

XLIX. *In terminis algebraicis diviſio fit reſolvendo quicquid per multiplicationem conflatur.*

Sic ab diviſa per a dat b pro quoto,

$6ab$ diviſa per $2a$ dat $3b$; & diviſa per $-2a$ dat $-3b$.

$-6ab$ diviſa per $2a$ dat $-3b$; & diviſa per $-2a$ dat $3b$.

$16abc^3$ diviſa per $2ac$ dat $8bcc$.

$-84a^3x^4$ diviſa per $-12aaxx$ dat $7axx$.

Item $\frac{6}{35}$ diviſa per $\frac{2}{7}$ dat $\frac{3}{5}$

$\frac{ac}{bd}$ diviſa per $\frac{a}{b}$ dat $\frac{c}{d}$.

$-\frac{21accy^3}{8b^5}$ diviſa per $\frac{3acy}{2bb}$ dat $-\frac{7cyy}{4b^3}$ (*b*).

$\frac{6}{7}$ diviſa per 3 dat $\frac{2}{7}$; & viciſſim $\frac{6}{7}$ per $\frac{2}{7}$ dat $\frac{6}{2}$ ſeu 3.

$\frac{30a^3z}{cc}$ diviſa per $2a$ dat $\frac{15aaz}{cc}$; & viciſſim diviſa per $\frac{15aaz}{cc}$ dat $2a$.

(*i*) Item $\sqrt{15}$ diviſa per $\sqrt{3}$ dat $\sqrt{5}$.

$\sqrt{abcd}$

(*h*) 144. Nam $\frac{6}{35} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 7}$; $\frac{ac}{bd} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$; $-\frac{21ac^2y^3}{8b^5} = \frac{3acy \cdot -7cy^2}{2b^2 \cdot 4b^3}$ Et ſic de ſingulis.

Habebis tamen infra (art. LI. & N°. 147.) regulam generalem.

Poteſtas a^m diviſa per a^n, dat a^{m-n}. Concipitur enim a^m conflata ex duabus poteſtatibus ipſius a, inſe ductis. Harum una exponentem habet n, quia a^m dividenda eſt par a^n. Altera exponentem habeat x. Erit $a^m = a^n \cdot a^x$; & hujus facti exponens erit (N°. 87.) $n + x = m$, per hyp. Ergo $x = m - n$. Sic $\frac{a^7}{a^3} = a^{7-3} = a^4$.

Quare ſi n ſit major quam m; exponens quoti erit negativus. Sic $\frac{a^3}{a^7} = a^{3-7} = a^{-4}$. Sed, quia $a^7 = a^3 \cdot a^4$; & $\frac{a^3}{a^3} = 1$; eſt $\frac{a^3}{a^7} = \frac{1}{a^4}$. Idem ergo eſt ſeu ponas quotum poteſtatis majoris diviſæ per minorem, in denominatore fractionis, cujus numerator 1 cum exponente poſitivo, ſeu in numeratore fractionis, cujus denominator 1, cum exponente negativo.

(*i*) 145. In genere $\sqrt[n]{ab}$ diviſa per $\sqrt[n]{b}$ exquat $\sqrt[n]{a}$: Quotum enim exponatur per x; erit

(art.

$\sqrt{abcd}$ diviſa per $\sqrt{cd}$ dat $\sqrt{ab}$.

$\sqrt{a^3c}$ per $\sqrt{ac}$ dat $\sqrt{aa}$ ſeu a.

$\sqrt[3]{35aay^2z}$ diviſa per $\sqrt[3]{5ayy}$ dat $\sqrt[3]{7ayz}$.

$\sqrt{\frac{a^4bb}{cc}}$ diviſa per $\sqrt{\frac{a^3}{c}}$ dat $\sqrt{\frac{abb}{c}}$.

$$\frac{12ddx\sqrt{5abcx}}{70aee} \text{ diviſa per } \frac{3dd\sqrt{5cx}}{10ee} \text{ dat } \frac{4x\sqrt{ab}}{7a} \quad (k).$$

Atque ita $\overline{a+b}\sqrt{ax}$ diviſa per $a+b$ dat $\sqrt{ax}$, & viciſſim diviſa per $\sqrt{ax}$ dat $a+b$.

Et $\frac{a}{a+b}\sqrt{ax}$ diviſa per $\frac{1}{a+b}$ dat $a\sqrt{ax}$; vel diviſa per a dat $\frac{1}{a+b}\sqrt{ax}$ ſive $\frac{\sqrt{ax}}{a+b}$; & viciſſim diviſa per $\frac{\sqrt{ax}}{a+b}$ dat a.

Ceterum in hujusmodi reſolutionibus omnino cavendum eſt, ut quantitates ſint ejusdem ordinis, quæ ad invicem applicantur. Nempe ut numeri applicentur ad numeros, ſpecies ad ſpecies, radicales ad radicales, numeratores fractionum ad numeratores, ac denominatores ad denominatores, nec non in numeratoribus, denominatoribus, & radicalibus quantitates cujusque generis ad quantitates homogeneas.

L. *Quod ſi quantitas dividenda nequeat ſic per diviſorem reſolvi*, ſufficit, ubi ambæ quantitates ſunt integræ, ſubſcribere Diviſorem cum lineola interjecta.

Sic ad dividendum ab per c ſcribitur $\frac{ab}{c}$; & ad dividendum $\overline{a+b}\sqrt{cx}$ per a ſcribitur $\frac{a+b\sqrt{cx}}{a}$ vel $\frac{a+b}{a}\sqrt{cx}$. Et ſic $\sqrt{\overline{ax-xx}}$ diviſa per $\sqrt{cx}$ dat

(art. XII. hujus) $x.\ \sqrt[n]{ab} :: 1\ \sqrt[n]{b}$; ſed (N°. 96, & art. VIII. hujus) $1.\ \sqrt[n]{a} :: \sqrt[n]{b}.\ \sqrt[n]{ab}$, ergo alternando $1.\ \sqrt[n]{b} :: \sqrt[n]{a}.\ \sqrt[n]{ab} :: x.\ \sqrt[n]{ab}$. (Eucl. 11. V.) igitur $x = \sqrt[n]{a}$. (Eucl. 9. V.).

(k) 146. Siquidem $= \frac{3dd\sqrt{5cx}}{10ee}.\ \frac{4x\sqrt{ab}}{7a} = \frac{12d^2x\sqrt{5abcx}}{70aee}$; ſed $\frac{3d^2\sqrt{5cx}}{10e^2}$ diviſa per $\frac{3d^2\sqrt{5cx}}{10e^2} = 1$ (N°. 47.) ergo $\frac{12d^2x\sqrt{5abcx}}{70aee}$ diviſa per $\frac{3d^2\sqrt{5cx}}{10e^2} = \frac{4x\sqrt{ab}}{7a}.\ 1 = \frac{4x\sqrt{ab}}{7a}$

dat $\frac{\sqrt{ax-xx}}{\sqrt{cx}}$ ſive $\sqrt{\frac{ax-xx}{cx}}$. Et $\overline{aa+ab}\sqrt{aa-2xx}$ diviſa per $\overline{a-b}\times\sqrt{aa-xx}$ dat $\frac{aa+ab}{a-b}\sqrt{\frac{aa-2xx}{aa-xx}}$. Et $12\sqrt{5}$ diviſa per $4\sqrt{7}$ dat $3\sqrt{\frac{5}{7}}$.

LI. *Ubi vero fractæ ſunt illæ quantitates*, duc numeratorem dividendæ quantitatis in denominatorem diviſoris, ac denominatorem in numeratorem, & *factus prior* erit numerator, ac *poſterior* denominator quoti (*l*).

Sic ad dividendum $\frac{a}{b}$ per $\frac{c}{d}$ ſcribitur $\frac{ad}{bc}$, multiplicato ſcilicet a per d & b per c.

Parique ratione $\frac{3}{7}$ diviſa per $\frac{4}{5}$ dat $\frac{15}{28}$; & $\frac{3a}{4c}\sqrt{ax}$ diviſa per $\frac{2c}{5a}$ dat $\frac{15aa}{8cc}\sqrt{ax}$; diviſa autem per $\frac{2c\sqrt{aa-xx}}{5a\sqrt{ax}}$ dat $\frac{15a^3x}{8cc\sqrt{aa-xx}}$.

Et ad eundem modum $\frac{ad}{b}$ diviſa per c (ſive per $\frac{c}{1}$) dat $\frac{ad}{bc}$,

Et c (ſive $\frac{c}{1}$) diviſa per $\frac{ad}{b}$ dat $\frac{bc}{ad}$.

Et $\frac{3}{7}$ diviſa per 5 dat $\frac{3}{35}$. Et 3 diviſa per $\frac{4}{7}$ dat $\frac{21}{4}$. Et $\frac{a+b}{c}\sqrt{cx}$ diviſa per a dat $\frac{a+b}{ac}\sqrt{cx}$. Et $\overline{a+b}\sqrt{cx}$ diviſa per $\frac{a}{c}$ dat $\frac{ac+bc}{a}\sqrt{cx}$.

Et $2\sqrt{\frac{axx}{c}}$ diviſa per $3\sqrt{cd}$ dat $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{axx}{ccd}}$; diviſa autem per $3\sqrt{\frac{cd}{x}}$ dat $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{ax^3}{ccd}}$. Et $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{11}}$ diviſa per $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$ dat $\frac{4}{3}\sqrt{\frac{7}{11}}$. Et ſic in aliis.

LII.

(*l*) 147. Denotent $\frac{a}{b}$ fractionem quamvis dividendam, & $\frac{c}{f}$ fractionem quamlibet, per quam prior dividenda ſit, dico quotum $= \frac{af}{cb}$; nam dicens, $\frac{a}{b}$ dividenda eſt per $\frac{c}{f}$, ſuppono quod $\frac{a}{b}$ conſtet duabus fractionibus invicem ductis, ex quibus una eſt ipſa $\frac{c}{f}$, altera vero quæritur; ſit ergo hæc fractio quæſita $\frac{x}{y}$; igitur $\frac{a}{b} = \frac{cx}{fy}$, & quæritur valor ipſius $\frac{x}{y}$: jam quia $\frac{a}{b}$ concipitur diviſa per f, ducatur in f; tum diviſa non erit, & habebitur $\frac{af}{b} = \frac{cx}{y}$, ſed adhuc $\frac{af}{b}$ concipitur multiplicata per c, dividatur ergo per c, ne amplius multiplicata ſit, & habebitur $\frac{af}{bc} = \frac{x}{y} = \frac{a}{b}$ diviſæ per $\frac{c}{f}$. Vel ſic: quotum quæſitum ſit x; erit ergo $x . 1 :: \frac{a}{b} . \frac{c}{f} :: \frac{af}{b} . c :: af . bc$. (Eucl. 7.VII.) quare $bcx = af$, & $x = \frac{af}{bc}$.

LII. *Quantitas ex pluribus terminis compoſita* dividitur applicando ſingulos ejus terminos ad diviſorem.

Sic $aa + 3ax - xx$ diviſum per a dat $a + 3x - \frac{xx}{a}$.

At ubi diviſor etiam ex pluribus terminis conſtat, diviſio perinde ac in numeris inſtitui debet (*m*).

Sic ad dividendum

$$a^3 + 2aac - aab - 3abc + bbc \text{ per } a - b.$$

Dic quoties a continetur in a^3, nempe primus terminus diviſoris in primo dividendi? Reſp. aa. Quare ſcribe aa in quoto & ablato $a - b$ in in aa ſive $a^3 - aab$ de dividendo, reſtabit $2aac - 3abc + bbc$ adhuc dividendum.

Dic itaque rurſus quoties a continetur in $2aac$? Reſp. $2ac$. Quare ſcribe etiam $2ac$ in quoto, & ablato $a - b$ in $2ac$ ſive $2aac - 2abc$ de præfato reſiduo, reſtabit etiamnum $- abc + bbc$.

Quamobrem dic iterum quoties a continetur in $- abc$? Reſp. $- bc$. Et proinde ſcribe $- bc$ in quoto, & ablato denuo $a - b$ in $- bc$ ſive $- abc + bbc$ de noviſſimo reſiduo, reſtabit nihil. Quod indicat diviſionem peractam eſſe, prodeunte quoto $aa + 2ac - bc$ (*n*).

LIII. Ceterum ut hujusmodi operationes ad formam, qua in diviſione numerorum uſi ſumus, debite reducantur,

Termini tum dividendæ quantitatis tum diviſoris juxta dimenſiones literæ alicujus, quæ ad hanc rem maxime idonea judicabitur, in ordine diſponendi ſunt.

Ita nempe ut illi primum locum occupent, in quibus litera iſta eſt plurimarum dimenſionum; iique ſecundum, in quibus dimenſiones ejus ad maximas proximæ ſunt; & ſic deinceps usque ad terminos qui per literam iſtam non omnino multiplicantur, adeoque ultimum locum occupabunt.

Sic

(*m*) 139. Liquet ratiocinium Ni. 135. hujus &c. hic facile accommodari poſſe.

(*n*) 140. *Quotum literale tot habet terminos quot ſunt unitates in quoto exſurgente ex diviſione* n (*numeri terminorum quantitatis dividendæ*) *per* m (*numerum terminorum diviſoris*).

Quotus conſtet numero terminorum x. Ergo quotus ductus in diviſorem habebit terminos numero mx (No. 29. hujus). Sed hinc ipſum dividendum (No. 34. hujus). Ergo $mx = n$ & $x = \frac{n}{m}$. Ubi in quantitate dividenda ſeparandi ſunt termini coefficientibus numericis uniti, & reſtituendi termini ſignis contrariis deleti. Sic quantitas $a^2 + 2ab + b^2$ conſtat quatuor terminis, quæ ſi dividatur per $a + b$, dabit quotum duorum terminorum $(a + b)$. Pariter $a^2 - b^2$ conſtat quatuor terminis $a + ab - ab + b^2$, quæ diviſa per $a + b$, dat quotum duorum terminorum $a - b$.

Sic in allato exemplo ſi termini ordinentur juxta dimenſiones literæ a, formam operis exhibebit adjunctum diagramma.

$$
\begin{array}{l}
a - b)\; a^3 \begin{matrix} +2aac \\ -aab \end{matrix} - 3abc + bbc \;(aa + 2ac - bc \\
\underline{a^3 - aab} \\
0 \quad +2aac - 3abc \\
\qquad \underline{2aac - 2abc} \\
\qquad\qquad 0 - abc + bbc \\
\qquad\qquad \underline{- abc + bbc} \\
\qquad\qquad\quad 0 \qquad 0
\end{array}
$$

Ubi videre eſt, quod terminus a^3 (ſive a trium dimenſionum) occupat primum locum dividendæ quantitatis; terminique $\begin{matrix} 2aac \\ -aab \end{matrix}$, in quibus a eſt duarum dimenſionum, ſecundum occupant, & ſic præterea.

Potuit etiam dividenda quantitas ſic ſcribi

$$a^3 \begin{matrix} +2c \\ -b \end{matrix} aa - 3bca + bbc.$$

Ubi termini ſecundum locum occupantes, uniuntur aggregando factores literæ, juxta quam fit ordinatio. Et hoc modo ſi termini juxta dimenſiones literæ b diſponerentur, opus ſicut in proximo diagrammate inſtitui deberet, cujus explicationem adnectere viſum eſt.

$$
\begin{array}{l}
-b + a)\; cbb \begin{matrix} -3ac \\ -aa \end{matrix} b \begin{matrix} +a^3 \\ +2aac \end{matrix} \;(-cb \begin{matrix} +2ac \\ +aa \end{matrix} \\
\underline{cbb - acb} \\
0 \begin{matrix} -2ac \\ -aa \end{matrix} b \begin{matrix} +a^3 \\ +2aac \end{matrix} \\
\underline{\begin{matrix} -2ac \\ -aa \end{matrix} b \begin{matrix} +2aac \\ +a^3 \end{matrix}} \\
\qquad 0 \qquad 0
\end{array}
$$

Dic quoties $-b$ continetur in cbb? Reſp. $-cb$. Quare ſcripto $-cb$ in quoto, aufer

$-b + a$ in $-cb$ ſeu $bbc - abc$

& reſtabit in ſecundo loco

$$\begin{matrix} -2ac \\ -aa \end{matrix} b.$$

Reſiduo huic adnecte, ſi placet, quantitates in ultimo loco, nempe

Digitized by Google

$$\begin{matrix} a^3 \\ * \; +2aac \end{matrix}$$

& dic iterum quoties $-b$ continetur in

$\begin{matrix}-2ac \\ -aa\end{matrix}b$? Reſp. $\begin{matrix}+2ab. \\ +aa.\end{matrix}$

Quare his in quoto ſcriptis, aufer

$-b+a$ in $\begin{matrix}+2ac \\ +a^2\end{matrix}$ ſeu $\begin{matrix}-2ac \\ -aa\end{matrix}b\begin{matrix}+2aac \\ +a^3\end{matrix}$

& reſtabit nihil. Unde conſtat diviſionem peractam eſſe, prodeunte quoto $-cb+2ac+aa$ ut ante.

Atque ita ſi dividere oportet

$$aay^4 - aac^4 + yyc^4 + y^6 - 2y^4cc - a^6 - 2a^4cc - a^4yy$$

per $yy-aa-cc$:

Quantitates juxta literam y ad hunc modum ordino,

$$yy\begin{matrix}-aa \\ -cc\end{matrix}\Big)\; y^6\begin{matrix}+aa \\ -2cc\end{matrix}y^4\begin{matrix}-a^4 \\ +c^4\end{matrix}yy\begin{matrix}-a^6 \\ -2a^4cc. \\ -aac^4\end{matrix}$$

Dein diviſionem ut in ſubjecto diagrammate inſtituo.

Adjiciuntur & alia exempla, de quibus inſuper obſervandum eſt, quod ubi dimenſiones literæ, ad quam ordinatio fit, non in eadem progreſſione arithmetica ſed per ſaltum alicubi procedunt, locis vacuis ſubſtituitur nota *

$$yy\begin{matrix}-aa \\ -cc\end{matrix}\Big)\; y^6\begin{matrix}+aa \\ -2cc\end{matrix}y^4\begin{matrix}-a^4 \\ +c^4\end{matrix}yy\begin{matrix}-a^6 \\ -2a^4cc \\ -aac^4\end{matrix}\Big(\; y^4\begin{matrix}+2aa \\ -cc\end{matrix}yy\begin{matrix}+a^4 \\ +aacc.\end{matrix}$$

$$\begin{array}{l}
y^6\begin{matrix}-aa \\ -cc\end{matrix}y^4 \\
\hline
0\begin{matrix}+2aa \\ -cc\end{matrix}y^4 \\
\hline
\begin{matrix}+2aa \\ -cc\end{matrix}y^4\begin{matrix}-2a^4 \\ -aacc \\ +c^4\end{matrix}yy \\
\hline
\quad 0 \quad \begin{matrix}+a^4 \\ +aacc\end{matrix}yy \\
\hline
\qquad \begin{matrix}+a^4 \\ +aacc\end{matrix}yy\begin{matrix}-a^6 \\ -2a^4cc \\ -aac^4\end{matrix} \\
\hline
\qquad 0 \qquad\quad 0
\end{array}$$

a+

$$a+b)\; aa * - bb\; (a-b$$
$$aa+ab$$
$$0-ab$$
$$-ab-bb$$
$$0 \quad 0$$

$$yy-2ay+aa)\; y^4 * -3\tfrac{1}{2}aayy+3a^3y-\tfrac{1}{2}a^4\; (yy+2ay-\tfrac{1}{2}aa.$$
$$y^4-2ay^3+aayy$$
$$0+2ay^3-4\tfrac{1}{2}aayy$$
$$+2ay^3-4aayy+2a^3y$$
$$0 \quad -\tfrac{1}{2}aayy+a^3y$$
$$-\tfrac{1}{2}aayy+a^3y-\tfrac{1}{2}a^4$$
$$0 \quad 0 \quad 0$$

$$aa+ab\sqrt{2}+bb)\; a^4 * * * +b^4\; (aa-ab\sqrt{2}+bb$$
$$a^4+a^3b\sqrt{2}+aabb$$
$$0-a^3b\sqrt{2}-aabb$$
$$-a^3b\sqrt{2}-2aabb-ab^3\sqrt{2}$$
$$0+aabb+ab^3\sqrt{2}$$
$$+aabb+ab^3\sqrt{2}+b^4$$
$$0 \quad 0 \quad 0$$

Aliqui diviſionem incipiunt ab ultimis terminis, ſed eodem recidit, ſi inverſo terminorum ordine incipiatur a prioribus. Sunt & aliæ methodi dividendi, ſed facillimam & commodiſſimam noſſe ſufficit.

CA-

150. *Si in formula jam inventa pro* $(p-q)^m$ *ubique in exponentibus ponatur* $-m$, *&* *omnes termini, præter primum, ponantur negativi, ſic exhibebitur poteſtas* m *negativa hoc eſt poteſtas* $-m$ *ipſius binomii.*

Jam $\overline{p+q}^{\,-m} = \dfrac{1}{\overline{p+q}^{\,m}}$ (N°. 144. hujus).

Quare binomium hoc ad negativam poteſtatem evectum æquabit unitatem diviſam per $p^m+mp^{m-1}q+\frac{m.\,m-1}{2}p^{m-2}q^2+\frac{m.\,m-1\,m.-2}{2.\;3}p^{m-3}q^3+$ &c.

Sed, per diviſionis regulas dividi debet

Primo, unitas per p^m; unde oritur

$$\frac{1}{p^m}=p^{-m}.$$

Deinde, totus diviſor multiplicandus eſt per hunc quotientem, id eſt dividendus eſt per p^m; ex quo obtinebitur

$$1+mp^{-1}q+\frac{m\,m-1}{2}p^{-2}q^2+\frac{m\,m-1.\,m-2}{2.\;3}p^{-3}q^3+\text{\&c.}$$

Tertio, hoc factum ex dividendo ſubducendum eſt; quod dabit omnes terminos, præter primum, & quidem negativos, & hoc erit novum dividendum.

Quar-

Quarto, primus hujus novi dividendi terminus per primum ipſius diviſoris terminum dividendus eſt; unde fiet quotiens

$$-mp^{-m-1}q.$$

Et ſic ratiocinium proſequens, obſervando diviſionis regulas, invenies binomium $p+q$ evectum ad poteſtatem $-m$ eſſe

$$p^{-m} - mp^{-m-1}q - \frac{m.m-1}{2}p^{-m-2}q^2 - \frac{m\,m-1\,m-2}{2.\,3}p^{-m-3}q^3 - \&c.$$

CAPUT VII.

DE EXTRACTIONE RADICUM. (a)

LIV. CUM numeri alicujus *radix quadratica* extrahi debet, *is in locis alternis, incipiendo ab unitate, punctis notandus eſt; dein figura in quoto ſeu radice ſcribenda, cujus quadratum figuræ vel figuris ante primum punctum aut æquale ſit aut proxime minus. Et ablato illo quadrato, ceteræ radicis figuræ ſigillatim invenientur dividendo reſiduum per duplum radicis eatenus extractæ, & ſingulis vicibus auferendo e reſiduo illo factum a figura noviſſime prodeunte & decuplo prædicti diviſoris figura illa aucti* (b).

Sic

(a) 151. Radix extrahitur e poteſtate data per diviſionem deſtruendo quæ per multiplicationem facta fuerant, ut per ſe patet, & ut melius infra declarabitur.

(b) 152. Quadratum unitatum, aut primum a dextris, aut duo prima loca tenebit. Duo rectangula ex unitatibus in decades, efficiunt aut ſolas decades, aut decades cum centenariis, quare vel tota erunt in ſecunda, aut partim erunt in ſecunda, partim in tertia ſede; quadratum ex decadibus dabit, aut centenarios, aut centenariorum decades, & primo quidem caſu totum erit in tertio loco; ſecundo vero, pars in tertio, pars in quarto.

153. Quod ratiocinium ad ceteros numeros extendere licet. Ex eo ſequitur quod numeri punctis diſtinguendi ſunt, & quidem in binarios, ubi agitur de radice quadrata, incipiendo a dextris. Sic (ſumpta quantitate 316, quæ eſt radix ipſius 99856) quadratum ipſius 6 nempe 36 occupat duo prima loca. Ita & duo rectangula ex 1 in 6, quæ faciunt duodecim decades, tenent ſecundam, & tertiam ſedem, & ſic de ceteris præter ultimum factum, quod, aut ſolum, aut cum aliquo ex præcedentibus, ultimam, aut duas ultimas ſedes occupabit.

154. Unde liquet, quod tot erunt numeri in radice, quot diviſiones in quadrato, & quod ſi, in radice, ſiniſtri numeri quadratum, vel ſolum, vel cum parte duorum rectangulorum ex ſeipſo in ſequentem, occupet duo loca, duo quoque erunt numeri in ſiniſtra quadrati ſede; ſecus vero unus; quod ſufficit, nam puncta ad hoc facta ſunt, ut noſcatur an in una, vel duabus figuris quærendum ſit ſiniſtri radicis numeri quadratum. Ipſa enim operandi ratio deteget, ubi ſint reliquæ quadrati partes.

Cur cetera ſiant facile patebit ex theoremate de quadrato polinomii.

Hæc uno ſaltem exemplo, & quidem ex Auctore deſumpto explicare libet. Extrahenda ſit radix ex 99856: quia in ſiniſtra quadrati ſede unus numerus eſt, is (9) debet continere quadratum ex primo, a ſiniſtra, numero radicis, vel ſolum, vel cum parte dupli rectanguli ex primo numero radicis in ſecundum; ſed ipſe 9 eſt quadratum perfectum, ergo nulla eſt hic dupli rectanguli pars, quamobrem ſumo ejuſdem 9 radicem 3, quam in quoto pono, Hic ergo totum quadratum abſumptum eſt, procedo igitur ad numeros ſequentes. Duo ſequentes numeri 98 debent continere duo facta ex centenis jam inventis, & decadibus, cum quadrato decadum, ſed centena

Digitized by Google

Sic ad extrahendam radicem ex 99856, imprimis nota cum punctis ad hunc modum 9. 98. 56. Dein quære numerum 3 cujus quadratum æquatur primæ figuræ 9, nempe 3; ſcribeque in quoto. Et, de 9 ablato quadrato 3 × 3 ſeu 9, reſtabit 0; cui adnecte figuras ante proximum punctum, nempe 98 pro ſequente opere. Tum neglecta ultima figura 8, dic quoties duplum 3 ſeu 6 continetur in priori 9? Reſp. 1. Quare ſcripto 1 in quoto, aufer factum 1 × 61 ſeu 61 de 98, reſtabit 37, cui adnecte ultimas figuras 56, & fiet 3756, numerus in quo opus denuo inſtitui debet. Quare, & hujus ultima figura 6 neglecta; dic quoties duplum 31 ſeu 62 continetur in 375 (id quod ex initialibus figuris 6 & 37 conjici poteſt, animadvertendo quoties 6 continetur in 37?) Reſp. 6. Et ſcripto 6 in quoto aufer factum 6 × 626 ſeu 3756, & reſtabit nihil. Unde conſtat opus peractum eſſe; prodeunte radice 316.

```
9.98.56 (316
9
----
098
 61
----
 3756
 3756
 ----
    0
```

LV.

tena ducta in decades dant millena, & millenorum locus eſt quartus a dextris, aut ipſius 9, ergo 9 continet duo rectangula ex 3 jam inventis, & quærenda radicis parte: quapropter divido 9 per 6; quotiens eſt unitas, quæ quidem eſt altera radicis pars, & quam pono in quoto; ſed quia 98 debet continere duo rectangula ex duabus radicis partibus jam repertis cum quadrato ultimæ ex inventis, duco ſex centena cum una decade, aut 61 in 1, quod ſubduco ex 98, ut videam quænam pars duorum factorum ex 3, & ex 1, ſit in ipſis 98, quo facto reſtant 37 (centenarii nempe). In dato numero adhuc perquirenda ſunt duo rectangula ex prima radicis parte (3. cent.) in ultimam (unit.) quod dabit aut centenarios, aut centenariorum decades, & duo rectangula ex decadibus, in unitates, unde exſurgunt ſolæ decades, aut centenarii cum decadibus; quare hæc continebuntur in numeris 375, neglectis 6 unitatibus, in quibus duo hæc rectangula certe eſſe nequeunt; quare ſumo duplum tam centenariorum, quam decadum, id eſt 6 cent. & 2 decad., aut 62 decad. per quem numerum divido 375, quotum eſt 6; multiplico 6 in 62 & factum 372 ſubtraho ex 375, ut ex reſiduo noſcam, quænam pars quadrati abſcondat .r in ultima nota 5; reſtat 3, huic addo 6 ultimam notam dati quadrati, quod facit 36 quadratum ipſum ultimæ partis radicis (6) inventæ.

```
9·98·56 ( 316
9
----
098
 61
-----
 375
 372
 ----
   36
   36
  ----
   00
```

Tirones aptare poſſunt ratiocinium ad ſequens exemplum.

LV. Atque ita ſi radicem ex 22178791 extrahere oportet, imprimis facta punctatione, quære numerum, cujus quadratum, (ſiquidem id nequeat æquari,) ſit proxime minus figuris 22 antecedentibus primum punctum, & invenies eſſe 4. Nam 5 × 5 ſive 25 major eſt quam 22, 4 × 4 ſive 16 minor. Quare 4 erit prima figura radicis Et hac itaque in quoto ſcripta, de 22 aufer quadratum 4 × 4 ſeu 16, reſiduoque 6 adjunge deſuper proximas figuras 17, & habebitur 617, cujus diviſione per duplum 4 elicienda eſt ſecunda figura radicis. Nempe, neglecta ultima figura 7, dic quoties 8 continetur in 61? Reſp. 7. Quare ſcribe 7 in quoto, & de 617 aufer factum 7 in 87 ſeu 609, & reſtabit 8, cui adjunge proximas duas figuras 87, & habebitur 887, cujus diviſione per duplum 47 ſeu 94 elicienda eſt tertia figura. Utpote dic quoties 94 continetur in 88? Reſp. 0. Quare ſcribe 0 in quoto, adjungeque ultimas duas figura 91,

```
22·17·87.91 (4709, 43637 &c.
16
——
6 17
6 09
  ——
  88791
  84681
  ——————
   4110.00
   3767 36
  ————————
    342 6400
    282 5649
   —————————
     60075100
     56513196
    ——————————
      356190400
      282566159
     ——————————
      73624231
```

& habebitur 88791, cujus diviſione per duplum 470 ſeu 940 elicienda eſt ultima figura. Nempe dic quoties 940 continetur in 8879? Reſp. 9. Quare ſcribe 9 in quoto, & radicem habebis 4709.

LVI. Ceterum cum factus 9 × 9409 ſeu 84681 ablatus de 88791 relinquat 4110, id indicio eſt numerum 4709 non eſſe radicem numeri 22178791 præciſe, ſed ea paulo minorem exiſtere. Et in hoc caſu aliiſque ſimilibus ſi veram radicem appropinquare placeat, proſequenda eſt operatio in decimalibus numeris, adnectendo ad reſiduum circulos duos in ſingulis operationibus. Sic reſiduum 4110, adnexis circulis, evadit 411000; cujus diviſione per duplum 4709 ſeu 9418 elicietur figura prima decimalis, nimirum

rum 4. Dein ſcripto 4 in quoto, aufer 4 × 94184 ſeu 376736 de 411000 & reſtabit 34264. Atque ita adnexis iterum duobus circulis, opus pro lubitu continuari poteſt, prodeunte tandem radice 4709, 43637, &c.

LVII. Ubi vero radix ad medietatem, aut ultra, extracta eſt, ceteræ figuræ per diviſionem ſolam obtineri poſſunt. Ut in hoc exemplo, ſi radicem ad uſque novem figuras extrahere animus eſſet, poſtquam quinque priores 4709,4 extractæ ſunt, quatuor poſteriores 3637 elici poſſent dividendo reſiduum 34264 per duplum 4704,4. (c)

LVIII. Et ad hunc modum ſi radix ex 32976 ad uſque quinque figuras extrahi debet; poſtquam figuræ punctis notantur, ſcribe 1 in quoto, utpote cujus quadratum 1 × 1 ſeu 1, maximum eſt quod in 3, figura primum punctum antecedente, continetur. Ac de 3 ablato quadrato illo 1, reſtabit 2. Dein huic 2 annexis proximis figuris 29, quære quoties duplum 1 ſeu 2 continetur in 22, & invenies quidem pluſquam 10, ſed nunquam licet diviſorem vel decies ſumere, imo neque novies in hoc caſu quia factus 9 × 29 ſive 261 major eſt quam 129 unde deberet auferri. Quare pone tantum 8. Et perinde ſcripto 8 in quoto, & ablato 8 × 28 ſive 224 reſtabit 5. Huic inſuper annexis figuris 76, quære quoties duplum 18 ſeu 36 continetur in 57, & invenies 1, adeoque ſcribe 1 in quoto ac de 576 ablato 1 × 361 ſeu 361 reſtabit 215. Denique ad ceteras figuras eliciendas divide hunc 215 per duplum 181 ſeu 362 & exibunt figuræ 59, quibus etiam ſcriptis in quoto, habebitur radix 181, 59.

3'267

(c) 155. Nam hæc operatio differt a radicis extractione, tantum quia in hac quadrata ultimarum figurarum ſubducuntur a dato numero, non vero in illa, & hæc omiſſio quotum non mutat, cum hoc pendeat a primis numeris a ſiniſtra, & quadratum ſubducatur ab ultimis. At quælibet diviſio aufert primos numeros, unde fit ut tandem diviſio incipi debeat ab iis numeris, qui olim fuerant ultimi, nempe dextræ propiores, in quibus eſt aliquis error, ob omiſſam quadrati ſubtractionem. Quod ubi evenit, ceſſandum eſt.

Sic in exemplo ſuperiore adde circulum reſiduo 34264, & divide per 9418,8, duplum ipſius 4709,4, invenies 3, ſubdue 3 × 9418,8, reſtat 60076; ſi vero pro diviſione radicem extraxiſſes, duos addere circulos, (unde habuiſſes 3426400,) & poſt diviſionem, per eundem 9418,8 idem quotum 3 × 9418,8, auctum 3 × 3 ſubducere debuiſſes, quod dat 600751, qui differt a ſuperiori ſolum in duabus ultimis notis, unde patet errorem eſſe in numero 6, & ſequentibus, non autem ante eum, quare illum puncto noto, & ſemper notabo. Perge ut in ſchediaſmate, ac eodem ratiocinio uſus, proſpicies quatuor diviſiones te perducere ad incipiendum ex numero 78, ubi tantum error latet, quare eatenus diviſio dedit idem, ac dediſſet radicis extractio.

```
342640 ( 4709,43637.
282564
------
 6007.60
 565128
 -------
  356'320
  282564
  -------
   73'7560
   659316
   -------
   7'8244
```

(d) 156.

3·29·76 (181,59
1
―
229
224
―
576
361
―
362) 215 (59

LIX. Eadem methodo radices etiam e decimalibus numeris extrahuntur (*d*). Sic ex 329,76 radix eſt 18,159. Et ex 3,2976 radix eſt 1,8159. Et ex 0,032976 radix eſt 0,18159. Et ſic præterea. Sed ex 3297,6 radix eſt 57,4245. Et ex 32,976 radix eſt 5,74246. Atque ita ex 9,9856 radix eſt 3,16. Sed ex 0,99856 radix eſt 0,999279, *&c.*

Quemadmodum e ſubjectis diagrammis conſtare poteſt.

32;97·6 (5,74247, &c.
25
―
797
749
―
4860
4576
―
1148,284 (247

0;99·85·6 (0,999279, &c.
81
―
1885
1701
―
18460
17901
―
1998) 559 (279

LX.

(*d*) 156. Radix fractionis æquat radicem numeratoris diviſam per radicem denominatoris.

Siquidem, ut habeatur fractionis poteſtas, ea aliquoties in ſeipſam ducenda eſt, numerator ſcilicet in numeratorem, denominator vero in denominatorem.

157. Hoc poſito liquet, quod quivis numerus compoſitus ex integris & decimalibus, aut ex decimalibus quibuſvis, exponi poteſt per fractionem, cujus numerator eſt numerus datus, denominator autem, numerus exprimens quænam fractio continetur in dextro numero; ſic 329,76 $=\frac{32976}{100}$, & 3,2976 $=\frac{32976}{10000}$.

Multiplica (ſi opus eſt) *numeratorem, & denominatorem, ita ut denominator quadretur; extrahe radicem numeratoris, qua dividi per debet radicem denominatoris, hanc reipſa divide, & habebis radicem quæſitam.*

Sic 329,76 æquat 32976 centeſimas unitatis partes, aut $\frac{32976}{100}$ unit. cujus radix $\frac{181}{10}$, cum 215 reſiduo; ſed $\frac{181}{10} = 18,1$; hæc ergo eſt radix hactenus inventa, tum, ſi libet, perge, res enim non difficilis erit. Eodem pacto, 3,2976 = 32976 decem milles. $=\frac{32976}{10000}$, cujus radix $\frac{181}{100}$ cum 215 reſiduo; ſed $\frac{181}{100} =$ 1,81, ergo &c.

Pariter 0,032976 = 32976 million. =

32976

LX. Extractionem radicis cubicæ & aliarum omnium, regula generali comprehendam, praxi potius intellectu facili quam expeditæ conſulens, ne moram in eo, quod raro uſu-veniet, diſcentibus inferam. Nimirum

Tertia *quæque figura incipiendo ab unitate, primo punctis notanda eſt, ſi radix ſit* cubica; *aut unaquæque* quinta, *ſi ſit* quadrato-cubica, *&c.* (*e*) *Dein figura in quoto ſcribenda eſt cujus maxima poteſtas* (*hoc eſt* cubica *ſi radix ſit* cubica, *aut* quadrato-cubica *ſi radix ſit* quadrato-cubica, *&c.*) *aut æquetur figuræ vel figuris ante primum punctum, aut proxime minor ſit. Et ablata illa poteſtate, figura proxima elicietur dividendo reſiduum proxima numeri reſolvendi figura auctum, per poteſtatem quoti pene-maximam ductam in indicem maximæ poteſtatis, hoc eſt, per* triplum quadratum *quoti, ſi radix ſit* cubica; *aut per* quintuplum quadrato-quadratum, *ſi radix ſit* quadrato-cubica, *&c. Rurſuſque a numero reſolvendo ablata maxima quoti poteſtate, figura tertia invenietur dividendo reſiduum illud proxima numeri reſolvendi figura auctum per poteſtatem quoti pene-maximam ductam in indicem maximæ poteſtatis.* Et ſic in infinitum (*f*).

LXI.

$\frac{32976}{1000000}$, cujus radix $\frac{181}{1000}$, cum 215 reſiduo; ſed $\frac{181}{1000} = 0,181$ &c.

Sed $3297,6 = \frac{32976}{10} = \frac{329760}{100}$ (ut denominator ſit quadratum) cujus radix eſt $\frac{574}{10}$, & 704 reſid. atqui $\frac{574}{10} = 57,4$ &c.

Omnibus his addenda eſt radix reſidui, quæ invenitur (additis circulis) per generalem methodum.

(*e*) 158. Datus numerus punctis diſtinguendus eſt in partes, quarum quæque tot contineat figuras, quot unitates ſunt in poteſtatis indice, quia poteſtas unitatum in dato numero poteſt tot loca occupare.

(*f*) Formula binomii $p+q$ ad ad poteſtatem m elevati eſt $p^m + mp^{m-1}q$

$$+ \frac{m.(m-1)}{2} p^{m-2}q^2 + \frac{m.(m-1).(m-2)}{2.3} p^{m-3}q^3$$

$$+ \frac{m.(m-1).(m-2).(m-3)}{2.3.4} p^{m-4}q^4 + \&c.$$

ut hanc facile numeris accommodes, finge primo radicem poteſtatis ſolum complecti unitates & decades, vel eſſe numerum binomialem.

Inventa ergo radice m ipſius p^m, divide partem ſequentem $mp^{m-1}q$ per mp^{m-1}, reſtabit q altera pars radicis, quam te recte vel male determinaſſe oſtendent ſequentes partes. Si enim numeri, qui ſuperſunt in poteſtate numerali propoſita, ſint revera

$$\frac{m.(m-1)}{2} p^{m-2}q^2;\ \frac{m.(m-1).(m-2)}{2.3} p^{m-3}q^3;$$

$$\frac{m.(m-1).(m-2).(m-3)}{2.3.4} p^{m-4}q^4 \ \&c.$$

manifeſte conſtabit radicem eſſe bene determinatam. Si id non acciderit, patebit radicem eſſe male determinatam, aut eſſe ineffabilem.

Extrahenda ſit radix cubica ex 42875. Hic numerus diviſus in partes, quarum prima tribus numeris conſtet; eſt 42·875. Formula cubi eſt $p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3$. Igitur aut 42 æquat p^3 aut eum continet. Non autem æquat, cum 42 non ſit cubus, continebit igitur. Maximus autem cubus in 42 contentus eſt 27, cujus radix eſt $3 = p$. Nunc $42-27 = 15$, cui ſi adjicias numeros ſequentes, invenies 15875, qui ſimul debent æquare $3p^2q + 3pq^2 + q^3$. Eſt autem $3p^2 = 27$, per quem divide 158, invenies $5 = q$. Sed $3p^2q = 27 . 5 = 135$; reſtat igitur 23, &, adjectis numeris ſequentibus, $2375 = 3pq^2 + q^3$; quod an verum ſit, examinandum eſt. Cum $p = 3$, & $q = 5$,

LXI. Sic ad extrahendrm radicem cubicam ex 13312053, numerus ille primo punctis ad hunc modum 13·312.053 notandus eſt. Deinde in quoto ſcribenda eſt illa figura 2 cujus cubus 8, ſiquidem æquari nequeat, proxime minor ſit figuris 13 antecedentibus primum punctum. Et ablato illo cubo reſtabit 5, quod proxima numeri reſolvendi figura 3 auctum, & per triplum quadratum quoti 2 diviſum, quærendo nempe quoties 3 × 4 ſeu 12 continetur in 53, dat 4 pro ſecunda figura quoti. Sed, cum quoti 24 prodiret cubus 13824 major quam qui auferri poſſet de figuris 13312 antecedentibus ſecundum punctum, ſcribi debet tantum 3 in quoto. Tum quotus 23, in charta aliqua ſeorſim per 23 multiplicatus, dat quadratum 529, quod iterum per 23 multiplicatum dat cubum 12167; & hic de 13312 ablatus relinquit 1145; (*g*) quod proxima reſolvendi numeri figura 0 auctum, &

$q = 5$, erit $3pq^2 = 225$ decadibus, nam p eſt 3 decades; atque $q^3 = 125$ unitatibus, quia q eſt 5 unitates; ſed 225 decades cum 125 unitatibus faciunt 2375. Ergo radix recte aſſignata fuit.

Item extrahenda ſit radix quinta ex numero 6436343. Eum divide in duas partes, quarum prima habeat quinque figuras, ſic 64·36343. Formula quintæ poteſtatis eſt

$$p^5 + 5p^4q + 10p^3q^2 + 10p^2q^3 + 5pq^4 + q^5.$$

Igitur 64 aut æquat aut continet p^5. Non autem æquat, quia nulla radix elevata ad quintam poteſtatem efficit 64, ergo continet. Sed maxima quinta poteſtas infra 64 eſt 32, cujus radix quinta eſt 2. Ergo $2 = p$; & ſupereſt 32, cui adde numerum ſequentem habiturus 323. Eſt autem $p^4 = 16$; & $5p^4 = 80$; divide igitur 323 per 80 invenies 4, & reſtabit 3, quibus addens numeros ſequentes conficies 36343, qui numerus debet æquare

$$10p^3q^2 + 10p^2q^3 + 5pq^4 + q^5.$$

Verum eſt $p^3 = 8$ millibus; nam tertia poteſtas decadis eſt millenarium; & $10p^3 = 80$ millibus; atque $q^2 = 16$ unitatibus, quare $10p^3q^2 = 1280$ millibus.

Item $p^2 = 4$ centenis; $10p^2 = 40$ centenis, $q^3 = 64$ unitatibus, & $10p^2q^3 = 2560$ centenis, quæ addita 1280 millibus ſupra inventis, conficiunt 2536 centena; hic autem numerus ſuperat 363 centena, quæ ſupererant in poteſtate propoſita, quare (4) ſecunda pars radicis male fuit determinata.

Ponamus alteram partem radicis eſſe 3. Erit 3 · 80 = 240, & 323 — 240 = 83; ſupereſt ergo 836343, qui debet æquare $10p^3q^2 + 10p^2q^3 + 5pq^4 + q^5$. Eſt autem $10p^3 = 80$ millibus, & $q^2 = 9$ unitatibus, atque $10p^3q^2 = 720$ millibus.

Pariter $p^2 = 4$ centenis, $10p^2 = 40$ centenis; $q^3 = 27$ unitatibus, & $10p^2q^3 = 1080$ centenis, quæ addita 720 millibus ſupra inventis, faciunt 8280 centena.

Eodem pacto $p = 2$ decadibus, $5p = 10$ decadibus, $q^4 = 81$ unitatibus, & $5pq^4 = 810$ decadibus, quæ additæ 8280 centenis, dant 83610 decades.

Denique $q^5 = 243$ unitatibus, quæ adjectæ 83610 decadibus ſupra repertis, rotundant numerum ipſum 836343.

Si autem poteſtatis propoſitæ radix ſit polynomia, extunde methodo ſupra tradita duas primas figuras radicis; has conſidera tanquam unum numerum, & huic applica quæ jam diximus, ſic reperies tertiam radicis figuram, & ſic deinceps. Exempla deſumemus ex ipſo Auctore.

(*g*) Quanquam Auctor agat methodo paulo diverſa a mea, tamen eodem res recidit. E cubo propoſito 13·312·053, Newtonus primo abſcindit partem 13·312·, cujus radicem cubicam 23 quærit, & ſupereſt 1145. Pone nunc in formula $p = 23$; ergo $1145053 = 3p^2q + 3pq^2 + q^3$ quare diviſus 11450 per $3p^2 = 1587$ dat $7 = q$. Sed 1587 . 7 = 11109, & 21450 — 11109 = 341; ergo debet 34153 æquare $3pq^2 + q^3$; eſt autem $p = 23$ decadibus; $3p = 69$ decadibus; $q^2 = 49$ unitatibus, atque $3pq^2 = 3381$ decadibus, & $q^3 = 343$ unitatibus. Decades autem & unitates ſimul collectæ faciunt 34153, ergo radix bene determinata eſt.

Cete-

& per triplum quadratum quoti 23 diviſum, quærendo nempe quoties 3×529 ſeu 1587 continetur in 11450, dat 7 pro tertia figura quoti. Tum quotus 237 per 237 multiplicatus dat quadratum 56169, quod iterum per 237 multiplicatum dat cubum 13312053. & hic de reſolvendo numero ablatus relinquit nihil. Unde patet radicem quæſitam eſſe 237.

13·312·053 (237

aufer cubum 8.
12) reſtat 53 (4. aut 3.

aufer cubum 12167.
1587) reſtat 11450 (7.

aufer cubum 13312053.
reſtat 0

LXII. Atque ita ad extrahendam radicem quadrato-cubicam ex 364·30820, punctum ponitur ad quintam figuram, & figura 3, cujus quadrato-cubus 243 proxime minor eſt figuris 364 antecedentibus punctum iſtud, ſcribitur in quoto. Dein quadrato-cubo 243 de 364 ablato, reſtat 121, quod proxima reſolvendi numeri figura 3 auctum & per quinquies quadrato-quadratum quoti diviſum, quærendo nempe quoties 5×81 ſeu 405 continetur in 1213, dat 2 pro ſecunda figura. Quotus ille 32 in ſe ter ductus efficit quadrato-quadratum 1048576, & hoc iterum in 32 ductum efficit quadrato-cubum 33554432; qui a numero reſolvendo ablatus relinquit 2876388. Itaque 32 eſt integra pars radicis, ſed non juſta radix, & proinde, ſi opus in decimalibus numeris proſequi animus eſt, reſiduum circulo auctum dividi debet per quinquies prædictum quadrato-quadratum quoti, quærendo quoties 5×1048576 ſeu 5242880 continetur in 2876388,0, & prodibit tertia figura, ſive prima decimalis, 5. Atque ita auferendo quadrato-cubum quoti 32,5 de numero reſolvendo ac dividendo reſiduum per quinquies quadrato-quadratum ejus, erui poteſt quarta figura. Et ſic in infinitum.

364·30829 (32,5

243.
405) 1213. (2

33554432.
5242880) 2876388,0 (5.

LXIII.

Ceterum poteſt etiam diſpici an radix ſit bene determinata, conſiderando quod omnes termini in formula, præter duos primos, dividi poſſunt per q^2; quod aliquanto faciliorem reddet numerorum multiplicationem.

Sic in hoc ultimo exemplo eſſe debet 34153 $= 3pq^2 + q^3 = (3p + q)q^2 = 697.49 = 34153$.

G 3 (h) 179.

LXIII. *Cum radix quadrato-quadratica extrahenda eſt, oportet bis extrahere radicem quadraticam, eo quod $\surd^{4}$ valeat $\surd^{2\cdot 2}$ Et cum radix cubo-cubica extrahenda eſt, oportet extrahere radicem cubicam & ejus radicem quadraticam, eo quod $\surd^{6}$ valeat $\surd^{2\cdot 3}$: Unde aliqui radices haſce non cubo-cubicas ſed quadrato-cubicas dixere.*

Et idem in aliis radicibus, quarum indices non ſunt numeri primi, obſervandum eſt.

LXIV. E ſimplicibus quantitatibus algebricis extractio radicum ex ipſa notatione patet. Quemadmodum

quod $\surd aa$ ſit a,
& quod $\surd aacc$ ſit ac,
& quod $\surd 9aacc$ ſit $3ac$,
& quod $\surd 49a^4xx$ ſit $7aax$.

Atque ita quod $\surd\frac{a^4}{cc}$ ſeu $\frac{\surd a^4}{\surd cc}$ ſit $\frac{aa}{c}$,

& quod $\surd\frac{a^4bb}{cc}$ ſit $\frac{aab}{c}$,

Et quod $\surd\frac{9aazz}{25bb}$ ſit $\frac{3az}{5b}$,

& quod $\surd\frac{4}{9}$ ſit $\frac{2}{3}$.

Et quod $\surd^{3}\frac{8b^6}{27a^3}$, ſit $\frac{2bb}{3a}$,

Et quod $\surd^{4}aabb$ ſit $\surd ab$.

Quin etiam quod

$b\surd aacc$ ſeu b in $\surd aacc$ valeat b in ac ſive abc.

Et quod $\frac{a+3x}{c}\surd\frac{4bbx^4}{81aa}$ valeat $\frac{a+3x}{c}\times\frac{2bxx}{9a}$ ſive $\frac{2abxx+6bx^3}{9ac}$.

Hæc, inquam, patent; ſiquidem propoſitas quantitates e radicibus in ſe ductis produci (ut aa ex a in a, $aacc$ ex ac in ac, $9aacc$ ex $3ac$ in $3ac$, &c.) prima fronte conſtare poteſt. (*b*) Ubi vero quantitates pluribus terminis conſtant, opus perinde ac in numeris abſolvitur.

Sic

(*b*) 159. Radix n ipſius a^m eſt $a^{\frac{m}{n}}$. Sit enim ea a^x ergo, evehendo ad poteſtatem n; $a^{nx} = a^m$; & $nx = m$; atque $\frac{m}{n} = x$. Vel ſic. Radix n ipſium a^m debet eſſe factor, qui n...ies repetitus, debet continua multiplicatione gignere poteſtatem ipſam a^m; atque $\frac{m}{n}+\frac{m}{n}+$ &c., donec numerus fractionum ſit n, dat $\frac{mn}{n} = m$. Ergo &c.

Vel, quia unitas eſt ad radicem, ut radix ad hujus ſecundam poteſtatem &c., uſque ad poteſtatem a^m, ratio unitatis ad radicem erit ſub—n—plicata ejus quam habet unitas ad a^m. Ergo ſcribi debet $a^{\frac{m}{n}}$.

Duæ poſteriores demonſtrationes aperiunt viam ſolvendi difficultates omnes; ideo illas addidi.

Sic ad extrahendam radicem quadraticam ex $aa+2ab+bb$, imprimis radicem primi termini aa, nempe a, ſcribe in quoto.

$$aa+2ab+bb\ (a+b$$
$$aa$$
$$0$$
$$2ab+bb$$
$$0 \quad 0$$

Et ablato ejus quadrato $a\times a$ reſtabit $2ab+bb$ pro elicienda reliqua parte radicis. Dic itaque quoties duplum quoti ſeu $2a$ continetur in primo reſidui termino $2ab$? Reſp. b. Adeoque ſcribe b in quoto, & ablato facto b in $\overline{2a+b}$ ſeu $2ab+bb$ reſtabit nihil. Quod indicat opus peractum eſſe, prodeunte radice $a+b$.

Et ſic ad extrahendam radicem ex

$$a^4+6a^3b+5aabb-12ab^3+4b^4,$$

imprimis pone in quoto radicem primi termini a^4, nempe aa, & ablato ejus quadrato $aa\times aa$ ſeu a^4 reſtabit

$$6a^3b+5aabb-12ab^3+4b^4$$

pro reliqua radice elicienda. Dic itaque quoties $2aa$ continetur in $6a^3b$? Reſp. $3ab$ quare ſcribe in quoto, & ablato facto

$3ab$ in $\overline{2aa+3ab}$ ſeu

$6a^3b+9aabb$ reſtabit etiamnum $-4aabb-12ab^3+4b^4$ pro opere proſequendo. Adeoque

$$a^4+6a^3b+5aabb-12ab^3+4b^4\ (aa+3ab-2bb$$
$$a^4$$
$$0$$
$$6a^3b+9aabb$$
$$0-4aabb$$
$$-4aabb-12ab^3+4b^4$$
$$0 \quad 0 \quad 0$$

dic iterum quoties duplum quoti, nempe $2aa+6ab$ continetur in $-4aabb-12ab^3$; ſive, quod perinde eſt, dic quoties duplum primi termini quoti, ſeu $2aa$, continetur in primo reſidui termino $-4aabb$? Reſp. $-2bb$. Et proinde ſcripto

$-2bb$ in quoto, & ablato facto

$-2bb$ in $2aa+6ab-2bb$ ſeu $-4aabb-12ab^3+4b^4$, reſtabit nihil. Unde conſtat radicem eſſe $aa+3ab-2bb$.

Atque

nempe a, & pone in quoto. Tum, ablato ejus cubo a^3, dic quoties triplum quadratum ejus, ſeu $3aa$, continetur in proximo reſidui termino $3aab$? & prodit b. Quare ſcribe etiam b in quoto, & cubo quoti $a+b$ ablato, reſtabit nihil. Radix itaque eſt $a+b$.

Eodem modo radix cubica, ſi extrahatur ex

$$z^6+6z^5-40z^3+96z-64, \text{ prodit } zz+2z-4.$$

Atque ita in altioribus radicibus (*i*).

CA-

(*i*) *In his quoque inſignis eſt opera Theorematis* Newtoniani, *nam*

160. Extrahere radicem r binomii evecti ad poteſtatem m eſt binomium evehere ad poteſtatem $\frac{m}{r}$. Nempe illud primo evehere ad poteſtatem m, & deinde ex hac poteſtate quærere quantitatem, quæ elata ad poteſtatem r æquet ipſum binomium evectum ad poteſtatem m. Ubi m & r exponunt numeros integros & poſitivos.

161. Sit binomium $p+q$, cujus evecti ad poteſtatem m quærenda ſit radix r. Hoc nihil aliud eſt quam determinare terminos & coefficientes ipſius $\overline{p+q}^{\frac{m}{r}}$. Seu ex dato $\overline{p+q}^{m}$ invenire terminos expreſſos per p & q una cum coefficientibus quantitatis, quæ elata ad poteſtatem r æquet ipſam poteſtatem $\overline{p+q}^{m}$.

Igitur.

162. Quantitatem $\overline{p+q}^{m}$ conſideramus tamquam conſtantem ex radice, quæ r . . es reperita, continua multiplicatione quantitatem ipſam $\overline{p+q}^{m}$ progignit.

163. Omnes termini hujus radicis debent eſſe homogenei. Si enim in ea forent termini non homogenei p^{s}; p^{s+t}; qui, quia ducendi ſunt, tum in ſe, tum unus in alium, darent facta non homogenea p^{2s}; p^{2s+t}; p^{2s+2t}; quæ rurſus darent alia facta non homogenea; tandem deveniretur ad poteſtatem ipſam $\overline{p+q}^{m}$, in qua eſſent termini non homogenei contra N^{m}. 93. hujus.

164. Radicis hujus, & ideo ſingulorum ejus terminorum, exponens debet eſſe $\frac{m}{r}$; quæ enim probavimus ſupra (N°. 159. hujus) ſponte ſe aptant ad polynomia quævis.

165. Si vis primum terminum ipſius $\overline{p+q}^{\frac{m}{r}}$ eſſe aliquam poteſtatem litteræ p, ea debet eſſe $p^{\frac{m}{r}}$. Siquidem $\overline{p+q}^{\frac{m}{r}}$, ſi evehatur ad poteſtatem r debet producere $\overline{p+q}^{m}$ (N°. 160. hujus). Sed poteſtatis $\overline{p+q}^{m}$ primus terminus eſt p^{m} (N°. 112. hujus), qui nullo alio pacto conficitur quam aliquoties repetita multiplicatione primi termini radicis, (ut patet ex Art. XVII., & N°. 88. hujus) & c $p^{\frac{m}{r}} \times p^{\frac{m}{r}} \times p^{\frac{m}{r}} \times$ &c., donec numerus factorum ſit r, dat p^{m} (N°. 88. hujus). Ergo &c.

166. Ideo dixi *ſi vis primum terminum ipſius* $\overline{p+q}^{\frac{m}{r}}$ *eſſe aliquam poteſtatem literæ* p, *ea* &c.; quia penes te eſt incipere a ſimbolo q, & tunc primus terminus eſſet $q^{\frac{m}{r}}$. Infra videbimus quando ad arbitrium incipere poſſis ab alterutra ſpecie, & quando debeas ab hac potius quam ab illa initium ducere. Interea ſupponemus nos incipere a p, quæ litera exponet ambigue illam, a qua ſtatuimus initium facere.

167. *Termini ipſius* $\overline{p+q}^{\frac{m}{r}}$ *erunt quales invenimus ſupra* (N°. 124. hujus) *pro* m *ponendo* $\frac{m}{r}$; *nempe*

$$p^{\frac{m}{r}};\ p^{\frac{m}{r}-1}q;\ p^{\frac{m}{r}-2}q^2;\ p^{\frac{m}{r}-3}q^3;\ p^{\frac{m}{r}-4}q^4;\ \&c.$$

Quantitas $\overline{p+q}^{\frac{m}{r}}$ eſt radix r poteſtatis m ortæ a binomio $p+q$. Sunt autem bini termini ipſius $\overline{p+q}^{m}$ ut p ad q (N°. 116. hujus). Scilicet bini termini poteſtatis ſunt ut bini termini radicis. Ergo bini termini radicis r ipſius $\overline{p+q}^{m}$ ſunt ut bini termini poteſtatis $\overline{p+q}^{m}$; nempe ut p ad q. Atqui primus terminus hujus radicis eſt $p^{\frac{m}{r}}$ (N°. 174. hujus). Igitur, quærendo quartam poſt p; q; $p^{\frac{m}{r}}$; ea erit $\frac{p^{\frac{m}{r}}q}{p} = p^{\frac{m}{r}-1}q$; qui erit ſecundus terminus. Tertius Terminus erit quarta proportionalis poſt $p; q; p^{\frac{m}{r}-1}q$; ideſt $\frac{p^{\frac{m}{r}-1}q^2}{p} = p^{\frac{m}{r}-2}q^2$.

168. *Radix m polynomii cujuſvis, tot habere poteſt terminos quot ſunt unitates in radice m numeri terminorum in polynomio.*

Habeat polynomium terminos numero t; radix autem terminos numero x. Erit $x^m = t$ (N°. 92. & 115. hujus). Ergo $x = t^{\frac{1}{m}}$. Si ergo extrahi poteſt radix m ipſius t, & ſi polynomium propoſitum eſt rationale, inventus & definitus erit numerus terminorum, quibus conſtare debet radix, quæ alioquin ſe extendet ad infinitum terminorum numerum; ſcilicet radix accurate reperiri non poterit, ſed quædam terminorum ſeries, quæ quo magis producetur, eo propius ad veritatem accedet.

169. Ut habeatur numerus terminorum, quibus conſtat polynomium propoſitum, iidem termini, qui per coefficientem in unum coacti ſunt, pro pluribus ſunt computandi, ratione habita ad coefficientem. Sic in $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ ſunt octo termini. Cum ergo numerus terminorum, quibus radix conſtat, ſit indefinitus, & tamen hæc radix evehenda ſit ad poteſtatem r, res redit ad infinitinomium ad poteſtatem datam elevandum.

170. *Terminus generalis ipſius $\overline{p+q}^{\frac{m}{r}}$ habebit eundem coefficientem ac terminus generalis ipſius $\overline{1+q}^{m}$, ſi modo pro 1; 2; 3, ex m, demas r. 2r. 3r. &c.*

Jam termini erunt $p^{\frac{m}{r}}$; $p^{\frac{m}{r}-1}q$; $p^{\frac{m}{r}-2}q^2$; &c. Coefficientes determinandi ſunt A; B; C; D; E; F; G; &c., ita ut tota quantitas $\overline{p+q}^{\frac{m}{r}}$ evadat

$$p^{\frac{m}{r}} + Ap^{\frac{m}{r}-1}q + Bp^{\frac{m}{r}-2}q^2 + Cp^{\frac{m}{r}-3}q^3 + Dp^{\frac{m}{r}-4}q^4 + \&c.$$

Nunc $\overline{p+q}^{m}$; id eſt

$$p^m + mp^{m-1}q + \frac{m.\overline{m-1}}{1.2}p^{m-2}q^2 + \frac{m.\overline{m-1}.\overline{m-2}}{1.2.3}p^{m-3}q^3 + \&c.$$

debet æquare ipſam $\overline{p+q}^{\frac{m}{r}}$ evectam ad poteſtatem r. Nempe

$$\begin{aligned}
&p^m + rAp^{m-1}q + \\
&+ \left.\begin{array}{l} r\,Bp^{m-1}q^2 \\ \frac{r.\overline{r-1}}{1.2}A^2p^{m-2}q^2 \end{array}\right\} \\
&+ r\,Cp^{m-3}q^3 \\
&+ r.\overline{r-1}\,ABp^{m-3}q^3 \\
&+ \frac{r.\overline{r-1}.\overline{r-2}}{1.2.3}A^3p^{m-3}q^3 \\
&+ r\,Dp^{m-4}q^4 + \&c. \\
&+ r.\overline{r-1}\,ACp^{m-4}q^4 + \&c. \\
&+ \frac{r.\overline{r-1}}{1.2}B^2p^{m-4}q^4 + \&c. \\
&+ \frac{r.\overline{r-1}.\overline{r-2}}{1.2}A^2Bp^{m-4}q^4 + \&c. \\
&+ \frac{r.\overline{r-1}.\overline{r-2}.\overline{r-3}}{1.2.3.4}A^4p^{m-4}q^4 + \&c.
\end{aligned}$$

Sed quantitates ipſæ p^m; $p^{m-1}q$; $p^{m-2}q^2$ &c, æquales ſunt in $\overline{p+q}^{m}$ & in $\overline{p+q}^{\frac{m}{r}}$ evecta ad poteſtatem r; poteſtates ipſæ debent eſſe æquales, quare & coefficientes ſunt æquales. Fit igitur

r A

$rA = m$; & $A = \frac{m}{r}$

$rB + \frac{r.\overline{r-1}}{1.2}A^2 = \frac{m.\overline{m-1}}{1.2}$; aut

$2rB + \overline{r^2 - r} \times \frac{m^2}{r^2} = m^2 - m$,

vel

$2r^2B + m^2r - m^2 = m^2r - mr$;

$2rB = m^2 - mr$; atque $B = \frac{m.\overline{m-r}}{1.2.r^2}$

Et ſic de ſingulis. Quare conſtat propoſitum.

191. Ergo terminus generalis ipſius $\overline{p+q}^{\frac{m}{r}}$ eſt

$$\frac{m.\overline{m-r}.\overline{m-2r}\ldots\ldots\overline{m-rs+r}}{r.2r.3r\ldots\ldots\overline{mr-sr}}\, p^{\frac{m}{r}-s} q^s$$

ex quo facile poteſt deduci formula pro qualibet radice cujuſvis poteſtatis extrahenda, dummodo pro s ponas per vices 0; 1; 3; &c; & obſerves in determinatione coefficientium quæ obſervata fuerunt (N°. 124. &c. hujus).

Iſta autem formula eſt hujuſmodi

$$p^{\frac{m}{r}} + \frac{m}{r}p^{\frac{m}{r}-1}q + \frac{m.\overline{m-r}}{r.2r.}p^{\frac{m}{r}-2}q^2$$

$$+ \frac{m.\overline{m-r}.\overline{m-2r}}{r.2r.3r}p^{\frac{m}{r}-3}q^3 + \&c.$$

ſive

$$p^{\frac{m}{r}} + \frac{m}{r}p^{\frac{m}{r}-1}q + \frac{\frac{m}{r}.\overline{\frac{m}{r}-1}}{1.2}p^{\frac{m}{r}-2}q^2$$

$$+ \frac{\frac{m}{r}.\overline{\frac{m}{r}-1}.\overline{\frac{m}{r}-2}}{1.2.3}p^{\frac{m}{r}-3}q^3 + \&c.$$

quæ priorem recuperat formam pro $\frac{m}{r}$ ponendo m, quod ſimbolum poteſt exponere numeros fractos æque ac integros.

CAPUT OCTAVUM.

DE REDUCTIONE FRACTIONUM ET RADICALIUM.

Præcedentibus operationibus inſervit reductio fractarum & radicalium quantitatum, idque vel ad minimos terminos vel ad eandem denominationem.

ARTICULUS I.

DE REDUCTIONE FRACTIONUM *ad minimos terminos.*

LXV. *Fractiones ad minimos terminos reducuntur dividendo numeratores ac denominatores per maximum communem diviſorem* (*k*).

Sic

(*k*) 171. Hic Canon ſupponit denominatorem, ac numeratorem ductos eſſe in eandem quantitatem, id eſt, reliquam fractionem ductam in fractionem, cujus denominator, & numerator ſunt æquales, atqui quantitas in ſe ipſa ſemel continetur, aut per ſe ipſa diviſa dat unitatem, quæ multiplicans quantitatem, eam non mutat, ergo poſt hanc reductionem fractiones eædem manent.

Sic

Sic fractio $\frac{aac}{bc}$ reducitur ad ſimpliciorem $\frac{aa}{b}$ dividendo utrumque aac & bc per c;
& $\frac{203}{667}$ reducitur ad ſimpliciorem $\frac{7}{23}$ dividendo utrumque 203 & 667 per 29;
& $\frac{203aac}{667bc}$ reducitur ad $\frac{7aa}{23b}$ dividendo per $29c$.

Atque ita $\frac{6a^3 - 9acc}{6aa + 3ac}$ evadit $\frac{2aa - 3cc}{2a + c}$ dividendo per $3a$.

Et $\frac{a^3 - aab + abb - b^3}{aa - ab}$ evadit $\frac{aa + bb}{a}$ dividendo per $a - b$.

Et hac methodo termini poſt multiplicationem vel diviſionem plerumque abbreviari poſſunt. Quemadmodum ſi multiplicare oportet $\frac{2ab^3}{3ccd}$ per $\frac{9acc}{bdd}$, vel id dividere per $\frac{bdd}{9acc}$, prodibit $\frac{18aab^3cc}{3bccd^3}$, & per reductionem, $\frac{6aabb}{d}$. Sed in hujuſmodi caſibus præſtat ante operationem concinnare terminos, dividendo per maximum communem diviſorem quos poſtea dividere oporteret. Sic in allato exemplo ſi dividam $2ab^3$ & bdd per communem diviſorem b, & $3ccd$ ac $9acc$ per communem diviſorem $3cc$; emerget fractio $\frac{2abb}{d}$ multiplicanda per $\frac{3a}{dd}$ vel dividenda per $\frac{dd}{3a}$, prodeunte tandem $\frac{6aabb}{d}$ ut ſupra. Atque ita $\frac{aa}{c}$, in $\frac{c}{b}$ evadit $\frac{aa}{1}$ in $\frac{1}{b}$ ſeu $\frac{aa}{b}$. Et $\frac{aa}{c}$ diviſa per $\frac{b}{c}$ evadit aa diviſa per b ſeu $\frac{aa}{b}$. Et $\frac{a^3 - axx}{xx}$ in $\frac{cx}{aa + ax}$ evadit $\frac{a - x}{x}$ in $\frac{c}{1}$ ſeu $\frac{ac}{x} - c$. Et 28 diviſ. per $\frac{7}{3}$ evadit 4 diviſ. per $\frac{1}{3}$, ſeu 12.

ARTICULUS II.

De inventione Diviſorum. (*l*)

LXVI. HUc ſpectat inventio diviſorum per quos quantitas aliqua dividi poſſit.

Si quantitas ſimplex eſt, divide eam per minimum ejus diviſorem, & quotum per minimum diviſorem ejus, donec quotus reſtet indiviſibilis, & omnes quantitatis

Sic $\frac{aac}{bc} = \frac{aa}{b} \times \frac{c}{c}$; ſed $\frac{c}{c} = 1$,
ergo $\frac{aac}{bc} = \frac{aa}{b} \times 1 = \frac{aa}{b}$

Hæc regula pendet etiam ex EUCLID. 35. VII.

(*l*) 172. Quantitates, in quas alia quantitas reſolvi poteſt, dicuntur ejus *Diviſores.*

173. Hos voco *ſimplices*, cum dividi nequeunt.

174. Unitas eſt ſemper inter diviſores.

175. *Compoſitos* appello diviſores, qui adhuc dividi poſſunt.

176

tatis diviſores primos habebis (m). *Dein horum diviſorum ſingulos binos, ternos, quaternos*, &c. *duc in ſe, & habebis etiam omnes diviſores compoſitos.*

Ut ſi numeri 60 diviſores omnes deſiderentur, divide eum per 2, & quotum 30 per 2, & quotum 15 per 3 & reſtabit quotus indiviſibilis 5. Ergo diviſores primi ſunt 1, 2, 2, 3, 5: Ex binis compoſiti 4, 6, 10, 15: Ex ternis 12, 20, 30, ex omnibus 60 (*n*). Rurſus ſi quantitatis $21abb$ diviſores omnes deſiderentur, divide eam per 3, & quotum $7abb$ per 7, & quotum abb per a, & quotum bb per b & reſtabit quotus primus b. Ergo diviſores primi ſunt 1, 3, 7, a, b, b; ex binis compoſiti 21, $3a$, $3b$, $7a$, $7b$, ab, bb; ex ternis $21a$, $21b$, $3ab$, $3bb$, $7ab$, $7bb$, ; abb; ex quaternis $21ab$, $21bb$, $3abb$, $7abb$; ex quinis $21abb$ (*o*) Eodem modo ipſius $2abb - 6aac$ diviſores omnes ſunt 1, 2, a, $bb - 3ac$, $2a$, $2bb - 6ac$, $abb - 3aac$, $2abb - 6aac$.

LXVII.

176 Hi ergo in ſimplices reſolvi poſſunt, & iis conſtant.

(*m*) 177. Hujus regulæ ratio patet per ſe; dico nunc, quod ſi duo, aut plures ex diviſoribus ſimplicibus, invicem ducantur, hoc factum dividet quantitatem datam.

Data quantitas ſit p, ejus diviſores ſimplices a, b, c, f, erit ergo $p = abcf$, quæ dividi poteſt per ab, abc, $abcf$.

(*n*) 178. Quære diviſores omnes ſimplices ſcribe unitatem, unum ex diviſoribus repetitis, ſi qui ſunt, ejus quadratum, &c., uſque ad ejus maximam poteſtatem, hæc facta duc in alium ex diviſoribus repetitis, ſi adeſt; unde habebis ſecundam ſeriem, hanc ſeriem duc in eundem diviſorem; & ſic toties quoties habetur hic diviſor; hinc omnia hæc facta per alterum &c.

Sic in exemplo præcedente diviſor 2 bis invenitur, ſcribo ergo in prima ſerie 1, 2, 2×2. quam ſeriem duco in 3, habeo ſecundam ſeriem 3, 2×3, $2 \times 2 \times 3$, & quia hic numerus ſemel reperitur, ambas duco in 5, invenio 5, 2×5, $2 \times 2 \times 5$, 3×5, $2 \times 3 \times 5$, $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$.

Series	
I.	$1 \,.\, 2 \,.\, 2 \times 2$
II.	$3 \,.\, 2 \times 3 \,.\, 2 \times 2 \times 3$
III.	$5 \,.\, 2 \times 5 \,.\, 2 \times 2 \times 5 \,.\, 3 \times 5 \,.\, 2 \times 3 \times 5 \,.\, 2 \times 2 \times 3 \times 5$.

(*o*) 179 Sic ſecundi exempli diviſores ſimplices ſunt 3, 7, a, b, ergo ſcribo in prima ſerie 1, b, bb. hanc duco per 3, habeo ſecundam, has duas per 7 quod efficit tertiam, has tres per a, unde exſurgit quarta.

Series	
I.	$1 \,.\, b \,.\, bb$
II.	$3 \,.\, 3b \,.\, 3bb$
III.	$7 \,.\, 7b \,.\, 7bb \,.\, 21 \,.\, 21b \,.\, 21bb$.
IV.	$a \,.\, ab \,.\, abb \,.\, 3a \,.\, 3ab \,.\, 3abb \,.\, 7a \,.\, 7ab \,.\, 7abb \,.\, 21a \,.\, 21ab \,.\, 21abb$.

Detur quantitas a^3bbcc, ſcribo in prima ſerie 1, a, a^2, a^3, quia a in data quantitate evecta eſt ad tertiam poteſtatem; hanc primam ſeriem duco in b, & habeo ſecundam b, ab, aab, a^3b, tum quia b eſt duarum dimentionum, ſecundam hanc rurſus duco in b, unde excudo tertiam bb, abb, $aabb$, a^3bb, has tres duco in c quod procreat quartam c, ac, aac, a^3c, bc, abc, $aabc$, a^3bc, bbc, $abbc$, $aabbc$, a^3bbc, & hanc rurſus in c ex quo fit quinta cc. acc. $aacc$. a^3cc. bcc. $abcc$. $aabcc$. a^3bcc. $bbcc$. $abbcc$. $aabbcc$. a^3bbcc.

Series	
I.	$1 \,.\, a \,.\, aa \,.\, a^3$
II.	$b \,.\, ab \,.\, a^2b \,.\, a^3b$
III.	$b^2 \,.\, ab^2 \,.\, a^2b^2 \,.\, a^3b^2$.
IV.	$c \,.\, ac \,.\, a^2c \,.\, a^3c$. $bc \,.\, abc \,.\, a^2bc \,.\, a^3bc$. $b^2c \,.\, ab^2c \,.\, a^2b^2c \,.\, a^3b^2c$.
V.	$c^2 \,.\, ac^2 \,.\, a^2c^2 \,.\, a^3c^2$. $bc^2 \,.\, abc^2 \,.\, a^2bc^2 \,.\, a^3bc^2$. $b^2c^2 \,.\, ab^2c^2 \,.\, a^2b^2c^2 \,.\, a^3b^2c^2$.

Ut perſpici poſſit, utrum omnes diviſores ſic inventi ſint, libet demonſtrare ſequens theorema.

180. *Numerus omnium diviſorum ipſius* $a^m b^n c^p$, &c. *eſt* $(m+1)(n+1)(p+1)$ &c.

Nam

LXVII. *Si quantitas poſtquam diviſa eſt per omnes ſimplices diviſores manet compoſita & ſuſpicio eſt eam compoſitum aliquem diviſorem habere, diſpone eam ſecundum dimenſiones literæ alicujus quæ in ea eſt, & pro litera illa ſubſtitue ſigillatim tres vel plures terminos hujus progreſſionis arithmeticæ,* 3, 2, 1, 0, -1, -2, *ac terminos totidem reſultantes una cum omnibus eorum diviſoribus ſtatue e regione correſpondentium terminorum progreſſionis, poſitis diviſorum ſignis tam affirmativis quam negativis. Dein e regione etiam ſtatue progreſſiones arithmeticas, quæ per omnium numerorum diviſores percurrant pergentes a majoribus terminis ad minores eodem ordine, quo termini progreſſionis* 3, 2, 1, 0, —1, —2 *pergunt, & quarum termini differunt vel unitate vel numero aliquo qui dividit altiſſimum terminum propoſitæ quantitatis. Si qua occurrit ejuſmodi progreſſio, iſte terminus ejus, qui ſtat e regione termini* 0 *progreſſionis primæ, diviſus per differentiam terminorum, & cum ſigno ſuo annexus litteræ præfatæ, componet quantitatem per quam diviſio tentanda eſt.*

Ut ſi quantitas ſit $x^3 - xx - 10x + 6$; pro x ſubſtituendo ſigillatim terminos progreſſionis 1, 0, —1, orientur numeri —4, 6, +14, quos cum omnibus eorum diviſoribus colloco e regione terminorum progreſſionis 1, 0, —1 hoc modo.

1	4	1.2.4.	+ 4.
0	6	1.2.3.6	+ 3.
— 1	14	1.2.7.14	+ 2.

Dein quoniam altiſſimus terminus x^3 per nullum numerum, præter unitatem, diviſibilis eſt, quæro in diviſoribus progreſſionem cujus termini differunt unitate, & a ſuperioribus ad inferiora pergendo decreſcunt perinde ac termini progreſſionis lateralis 1, 0, —1. Et hujuſmodi progreſſionem unicam tantum invenio nempe 4, 3, 2, cujus itaque terminum +3 ſeligo qui ſtat e regione termini 0 progreſſionis primæ 1, 0, —1, tentoque diviſionem per $x + 3$. Et res ſuccedit, prodeunte $xx - 4x + 2$.

Rurſus ſi quantitas ſit $6y^4 - y^3 - 21yy + 3y + 20$; pro y ſubſtituo ſigillatim 2, 1, 0, —1, —2, & numeros reſultantes 30, 7, 20, 3, 34 cum omnibus eorum diviſoribus e regione colloco ut ſequitur.

2	30	1.2.3.5.6.10.15.30	+ 10.
1	7	1.7	+ 7.
0	20	1.2.4.5.10.20	+ 4.
—1	3	1.3	+ 1.
—2	34	1.2.17.34	— 2.

Et

D E-

Nam ex regula, termini primæ ſeriei erunt numero $m + 1$: hæc ſeries totidem dabit ſibi æquales, quot ſunt unitates in n, vel tot, quot ſunt unitates in $(m + 1)\ n$, cui adde terminos primæ ſeriei, habebis pro numero omnium $(m + 1)\ n + (m + 1)$, ſed $m + 1 = 1\ (m + 1)$, erit ergo hi numerus $(m + 1)(n + 1)$ $(m + 1) = (m + 1)\ (n + 1)$ (EUCL. 1. II.) atqui hæc ſeries rurſum totidem ſeries dabit ſibi numero terminorum æquales, quot ſunt unitates in p; erunt ergo termini ultimæ ſeriei $(m + 1).\ (n + 1)\ p$, his adde terminos ſecundæ, ac primæ, & erit omnium numerus $(m + 1)\ (n + 1)\ p + 1\ (m + 1)\ (n + 1) = (m + 1)\ (n + 1)\ (p + 1.)$ Q. E. D.

Et in diviſoribus hanc ſolam eſſe animadverto decreſcentem progreſſionem arithmeticam $+10, +7, +4, +1, -2$. Hujus terminorum differentia 3 dividit altiſſimum quantitatis terminum $6y^4$. Quare terminum $+4$ qui ſtat e regione termini o, diviſum per differentiam terminorum 3 adjungo literæ y, tentoque diviſionem per $y+\frac{4}{3}$, vel, quod perinde eſt, per $3y+4$, & res ſuccedit prodeunte $2y^3 - 3yy - 3y + 5$.

Atque ita ſi quantitatas ſit

$$24a^5 - 50a^4 + 49a^3 - 140aa + 64a + 30;$$

operatio erit ut ſequitur.

2	42	1.2.3.4.5.6.7.14.21.42	+ 3. + 3. + 7.
1	23	1.2.3.	+ 1. — 1. + 1.
0	30	1.2.3.5.6.10.15.30.	— 1. — 5. — 5.
—1	297	1.3.9.11.27.33.99.297.	— 3. — 9. — 11.

Tres occurrunt hic progreſſiones, quarum termini $-1. -5. -5$ diviſi per differentias terminorum 2, 4, 6, dant tres diviſores tentandos $a-\frac{1}{2}$, $a-\frac{1}{4}$ & $a-\frac{1}{6}$. Et diviſio per ultimum diviſorem $a-\frac{5}{6}$. ſeu $6a-5$ ſuccedit prodeunte $4a^4 - 5a^3 + 4aa - 20a - 6$ (*p*).

Si

DEMONSTRATIO.

CLAR. DAN. BERNOULLI.

(*p*) 181. Sit diviſor unius dimenſionis inveniendus hujus quantitatis

$$(A)\ 2x^3 + xx + 5,$$

ponatur ille diviſor

$$(B)\ mx + n,$$

ubi m, & n, quantitates denotant incognitas, & determinandas. Poſitis nunc ſucceſſive in quantitatibus (A), & (B), loco ipſius x numeris progreſſionem arithmeticam formantibus, puta 2. 1. 0. — 1, dabit numeros ſequentes 11. 6. — 9. — 10, & (B) acquiret hos valores $2m+n$, $1m+n$, $0m+n$, $-1m+n$, (ubi patet coefficientes ipſius m eſſe numeros aſſumptos 2. 1. 0. — 1.). Cum vero quantitas (B) generaliter dividere debeat quantitatem (A), neceſſe eſt ut diviſio illa quoque ſuccedat in omni caſu particulari, unde oportet ut,

$$P\left\{\begin{matrix} 2m+n \\ 1m+n \\ 0m+n \\ -1m+n \end{matrix}\right\} \text{ ſit æqualis uni ex diviſoribus numeri } \left\{\begin{matrix} 11 \\ 6 \\ -9 \\ -10 \end{matrix}\right. \text{ qui ſunt } Q\left\{\begin{matrix} 11.\ 1.\ 0. -1. -11. \\ 6.\ 3.\ 2.\ 1.\ 0. -1. -2. -3.\ 6. \\ 9.\ 3.\ 1.\ 0. -1. -3. -9. \\ 10.\ 5.\ 2.\ 1.\ 0. -1. -2. -5. -10. \end{matrix}\right.$$

ſed quantitates P ſunt arithmetice proportionales, (quia numeri 2. 1. 0. — 1., per conſtructionem ſunt tales,) ergo, & numeri ex prima ſecunda, tertia, & quarta claſſe eligendi debent eſſe arithmetice proportionales; quod eſt primum NEWTONI aſſertum. Deinde quia tertius numerus $0\,m + n$, nihil aliud eſt, quam n, ſequitur numerum e regione cyphræ exiſtentem eſſe æqualem ipſi n, ſeu numero, quo x aliquoties ſumptum augeri debet, quod eſt alterum NEWTONI aſſertum.

Tandem ſi ſubtrahis $1m+n$, ex $2m+n$, remanet m, quod proin æquale eſt differentiæ numerorum arithmetice proportionalium, & ex numeris (Q) ſelectorum, id quod tertium format aſſertum NEWTONI, dicentis ipſum x in diviſore quæſito toties eſſe ſumendum, quot unitatibus primus terminus progreſſionis ex (Q) deſumtæ ſecundum ſuperat. *Q. E. D.*

SCHOLIUM.

182. *In noſtro exemplo numeri arithmetice proportionales, qui ex prima, ſecunda, tertia, & quarta claſſe numerorum (Q) deſumi poſſunt, ſunt* -1, $+1$, $+3$, $+5$, *quorum ter-*

tius

Si nullus occurrit hac methodo diviſor, vel nullus qui dividit propoſitam quantitatem; concludendum erit quantitatem illam non admittere diviſorem unius dimenſionis. Poteſt tamen fortaſſe, ſi plurium ſit quam trium dimenſionum, diviſorem admittere duarum. Et ſi ita, diviſor ille inveſtigabitur hac methodo.

In quantitate illa pro litera ſubſtitue, ut ante, quatuor vel plures terminos progreſſionis hujus.

$$3,\ 2,\ 1,\ 0,\ -1,\ -2,\ -3,$$

Diviſores omnes numerorum reſultantium ſigillatim adde & ſubduc quadratis correſpondentium terminorum progreſſionis illius ductis in diviſorem aliquem numeralem altiſſimi termini quantitatis propoſitæ, & ſummas differentiaſque e regione progreſſionis colloca. Dein progreſſiones omnes collaterales nota, quæ per iſtas ſummas differentiaſque percurrunt. Sit $\pm C$ *terminus iſtiuſmodi progreſſionis qui ſtat e regione termini* 0 *progreſſionis primæ,* $\pm B$ *differentia quæ oritur ſubducendo* $\pm C$ *de termino proxime ſuperiori qui ſtat e regione termini* 1 *progreſſionis primæ,* A *prædictus termini altiſſimi diviſor numeralis, & l litera quæ in quantitate propoſita eſt, & erit* $All \pm Bl \pm C$ *diviſor tentandus.*

Ut ſi quantitas propoſita ſit

$$x^4 - x^3 - 5xx + 12x - 6,$$

pro x ſcribo ſucceſſive $3; 2; 1; 0; -1; -2;$ & prodeuntes numeros

$$39; 6; 1; -6; -21; -26,$$

una cum eorum diviſoribus e regione diſpono, addoque & ſubduco diviſores terminis progreſſionis illius quadratis ductiſque in diviſorem numeralem termini x^4, qui unitas eſt, videlicet terminis $9; 4; 1; 0; 1; 4;$ & ſummas differentiaſque e latere pariter diſpono. Dein progreſſiones, quæ in iiſdem obveniunt, e latere etiam ſcribo, ut ſequitur. Harum progreſſionum terminos 2 & -3, qui ſtant e regione termini 0 progreſſionis illius quæ in columna prima eſt, uſurpo ſucceſſive pro $\pm C$, differentias quæ oriuntur

3139

tius 3 ſtat e regione cyphra, ſeu $0m + n$, *unde ſequitur* $n = 3$, *& ſubtrahendo ſecundum a primo habetur* -2, *qui erit valor ipſius* m, *eſt ergo diviſor quæſitus* $-2x + 3$.

Notandum eſt progreſſionem arithmeticam, cujus termini ſunt æquales, uti ſemper eſſet 1. 1. 1. 1, *nunquam eſſe conſiderandam, quia inde ſequetur* $m = 0$, *quod nunquam contingere poteſt; ſed, ſi præter talem, adhuc aliæ progreſſiones arithmeticæ ex numeris* (Q) *elici potuiſſent, plures quam quatuor ſubſtitutiones pro* x *facienda ſunt, donec nulla talis, præter utilem, progreſſio formari poſſit. Si numeri* (Q) *prorſus nullam ſuppeditant, indicium eſt quantitatem propoſitam non admittere diviſorem unius dimenſionis. Si, non obſtantibus pro* x *ſubſtitutionibus, plures arithmeticæ progreſſiones ex numeris* (Q) *deduci poſſunt, ſuſpicandum plures quoque diviſores propoſito ſatisfacere. Miror quod* NEWTONUS *ſemper in recenſione numerorum* (Q) *cyphras omiſerit, omnes terminos dividentes, & quandoque neceſſario conſiderandas.*

3	39	1.3.13.39.	9	—30.—4.6.8.10.12.22.48.	—4.	6.
2	6	1.2. 3. 6.	4	— 2. 1.2.3.5. 6. 7.10	—2.	3.
1	1	1.	1	0. 2.	0.	0.
0	6	1.2. 3. 6.	0	— 6.—3—2.—1.1.2.3.6.	2.	—3.
—1	21	1.3. 7.21.	1	—20.—6.—2.0.2.4.8.22.	4.	—6.
—2	26	1.2.13.26.	4	—22.—9.2.3 .5.6.17.30.	6.	—9.

ſubducendo hos terminos de terminis ſuperioribus 0 & 0, nempe —2 & +3, uſurpo reſpective pro $\pm B$; unitatem item pro A; & x pro l. Et ſic pro $All \pm Bl \pm C$, habeo diviſores duos tentandos

$$xx + 2x - 2 \ \& \ xx - 3x + 3,$$

per quorum utrumque res ſuccedit.

Rurſus ſi proponatur quantitas

$$3y^5 - 6y^4 + y^3 - 8yy - 14y + 14,$$

Operatio erit ut ſequitur. Primo rem tento addendo & ſubducendo diviſores quadratis terminorum progreſſionis 2, 1, 0, 1 uſurpato 1 pro A, ſed res non ſuccedit. Quare pro A uſurpo

3	170		27		—7.	17
2	38	1.2.19.38.	12	—26.—7.10.11.13.14.31.50.	—7.	11
1	10	1.2. 5.10.	3	— 7.—2. 1. 2. 4. 5. 8.13.	—7.	5
0	14	1.2. 7.14.	0	—14.—7.—2.—1. 1. 2. 7.14	—7.	—1
—1	10	1.2. 5.10.	3	— 7.—2. 1. 2. 4. 5. 8.13.	—7.	—7
—2	190		12		—7.	—13

3, alterum nempe termini altiſſimi $3y^5$ diviſorem numeralem, & quadratis iſtis multiplicatis per 3, hoc eſt numeris 12; 3; 0; 3; addo ſubducoque diviſores; & progreſſiones in terminis reſultantibus haſce duas invenio —7; —7; —7; —7; & 11; 5; —1; —7. Expeditionis gratia neglexeram diviſores extimorum numerorum 170 & 190. Quare continuatis progreſſionibus ſumo proximos earum hinc inde terminos, videlicet —7 & 17 ſuperius, & —7, & —13 inferius, ac tento ſi ſubductis his de numeris 27 ac 12, qui ſtant e regione in quarta columna, differentiæ dividunt iſtos 170 & 190 qui ſtant e regione in columna ſecunda. Et quidem differentia inter 27 & —7, id eſt 34, dividit 170; & differentia 12 & —7, id eſt 19, dividit 190. Item differentia inter 27 & 17, id eſt 10, dividit 170, ſed differentia inter 12 & —13, id eſt 25, non dividit 190. Quare poſteriorem progreſſionem rejicio. Juxta priorem $\pm C$ eſt —7, & $\pm B$ nihil; terminis progreſſionis nullam habentibus differentiam. Quare diviſor ten-

 tandus

tandus $All \pm Bl \pm C$ erit $3yy + 7$. Et diviſio ſuccedit, prodeunte $y^3 - 2yy - 2y + 2$. (q)

LXIX.

(q) 183. Sequitur nunc methodus NEWTONI inveniendorum diviſorum duarum dimenſionum demonſtranda. Sit propoſita quantitas

$$(C)\ 3x^5 + 2x^4 + 2xx + 3x - 5,$$

cujus diviſor inveniendus ſit

$$(D)\ fxx + gx + h$$

(ubi f, g, h, ſunt quantitates incognitæ, & determinandæ.) Poſitis nunc iterum ſucceſſive pro x numeris arithmetice proportionalibus, ut $1, 0. -1. -2$, habebuntur pro quantitate (C) $5. -5. -11. -115$, & pro quantitate (D) habebuntur quantitates $1f + 1g + h$. $0f + 0g + h$. $1f - 1g + h$. $4f - 2g + h$ (ubi probe notandum eſt coefficientes ipſius f eſſe quadrata numerorum aſſumptorum $1; 0; -1; -2$, & coefficientes ipſius g, eſſe ipſos hos numeros). Cum autem quantitas (D) generaliter debeat dividere quantitatem (C), oportet, ut diviſio illa quoque ſuccedat in omni caſu particulari, unde

quantitates æquabunt unum ex diviſoribus numeri

$$1f + 1g + h$$
$$0f + 0g + h$$
$$1f - 1g + h$$
$$4f - 2g + h$$

qui ſunt

$5.1.0. -1. -5.$

$5.1.0. -1. -5.$

$11.1.0. -1. -11.$

$115.23.5.1.0. -1. -5. -23. -115.$

& ideo quantitates

$$F \begin{cases} 1g + h \\ 0g + h \\ 1g + h \\ -2g + h \end{cases}$$

æquabunt

H		vel	vel	vel	vel
	$5 - 1f.$	$1 - 1f.$	$0 - 1f.$	$-1 - 1f.$	$-5 - 1f.$
	$5 - 0f.$	$1 - 0f.$	$0 - 0f.$	$-1 - 0f.$	$-5 - 0f.$
	$11 - 1f.$	$1 - 1f.$	$0 - 1f.$	$-1 - 1f.$	$-11 - 1f.$
	$115 - 4f.$	$23 - 4f.$	$5 - 4f.$	$1 - 4f.$	$0 - 4f.$

vel

$-1 - 4f. \mid -5 - 4f. \mid -23 - 4f. \mid -115 - 4f.$

Sed quantitates (F) ſunt arithmetice proportionales, ergo & quantitates ex (H) ſeligendæ, debent eſſe tales; patet inſuper quod f eſſe debeat numerus ſubmultiplus ipſius ternarii, ſeu (ut generaliter rem exprimam) numeri maximo termino quantitatis (C) præfixi, unde ſuppono primum $f = 1$, & quæro diviſorem, ut ſupra; ſed nullum invenio. Ex quo judico quod f nequit eſſe $= 1$, ergo ſuppono $f = 3$, quo facto, eruo ex quantitatibus (H) numeros arithmetice proportionales hos 2. 5. 8. 11. quorum ſecundus e regione quantitatis $0g + h$ exiſtentis, eſt $= h$, & differentia inter primum, & ſecundum, quæ eſt $-3 = g$, atque proin

$$fxx + gx + h = 3xx - 3x + 5,$$

quæ omnia NEWTONI regulæ ſunt conformia. Q. E. D.

SCHOLIUM.

184. *Cum quantitas* f *hoc modo, non niſi tentando eruatur, clarum eſt regulam hanc tam eſſe operoſam, ut ad praxin revocari nequeat quandoque; ſic ſi proponeretur quantitas, cujus maximo termino præfixus foret numerus* 60, *ejusque quantitatis diviſor dimenſionum duarum quærendus eſſet, undecim ſubſtitutiones pro* f *faciendæ eſſent, antequam præciſa reſponſio dari poſſet: dein raro ſufficiunt quatuor ſubſtitutiones pro* x, *ut nulla alia progreſſio arithmetica, præter utilem, ex quantitatibus* (H) *deduci poſſit, unde plures ſæpe ſubſtitutiones pro* x *ponendæ, quæ omnia, ut in effectum deducerentur, infinitum quaſi laborem requirerent.*

Notandum hic quamlibet progreſſionem arithmeticam, ſive differentia ejus ſit nulla ſive aliqua, ſubſiſtere poſſe, nihil enim impedit, quominus ſecundus diviſoris quæſiti terminus æqualis eſſe poſſit cyphræ.

185. NEWTONUS, adhibitis hiſce duabus regulis, addit methodum ſuam etiam ad altiores diviſores inveniendos ſe extendere. Verum illud eſt, & demonſtratio facile ex hucusque dictis patet, ſed non termini arithmetice proportionales eſſent quærendi ex quantitatibus (H), alio etiam modo conſtruendis, ſed termini quorum differentiæ primæ, ſecundæ, &c. ſint arithmetice proportionales. Cum vero tales numeri non in oculos currant, ſicut numeri ſimpliciter arithmetice proportionales; imo, quaſi omni adhibita opera dignoſci nequeant, impoſſibile eſſet regulas illas in effectum deducere. Operæ pretium tamen erit, oſtendere regulam a modo dicta diverſam, qua diviſor

LXIX. Si nullus inveniri poteſt hoc pacto diviſor qui ſuccedit, concludendum eſt quantitatem propoſitam non admittere diviſorem duarum dimenſionum. Poſſet eadem methodus extendi ad inventionem diviſorum dimenſionum plurium, quærendo in prædictis ſummis differentiiſque progreſſiones non arithmeticas quidem, ſed alias quaſdam quarum terminorum differentiæ primæ, ſecundæ, tertiæ, *&c.* ſunt in arithmetica progreſſione: At in his Tyro non eſt detinendus.

LXX. *Ubi in quantitate propoſita duæ ſunt literæ, & omnes ejus termini ad dimenſiones æque altas aſcendunt; pro una iſtarum literarum pone unitatem, per regulas præcedentes quære diviſorem, ac diviſoris hujus comple deficientes dimenſiones reſtituendo literam illam pro unitate.*

Ut ſi quantitas ſit

$$6y^4 - cy^3 - 21ccyy + 3c^3y + 20c^4$$

ubi termini omnes ſunt quatuor dimenſionum; pro c pono 1, quantitas evadit

$$6y^4 - y^3 - 21yy + 3y + 20,$$

cujus diviſor duarum dimenſionum eruitur, & quidem ſcientifice, id eſt abſque ut neceſſe ſit numerum f tentando determinare, quo ipſo ſimul patebit quomodo NEWTONUS progreſſiones terminorum, quorum differentiæ ſunt arithmetice proporionales applicare poſſet.

Sit itaque quantitas.

$$(S)\ 4x^3 + 2xx - 16x + 7$$

(talem quantitatem commoditatis calculi cauſa eligo, quamvis proprie quantitas plurium dimenſionum aſſumenda eſſet, quia quantitas trium dimenſionum diviſa per quantitatem unius dimenſionis, eo ipſo, pro quotiente exhibet diviſorem duarum dimenſionum) cujus diviſor quæſitus ſit (T) $fxx + gx + h$, dico f, g, h tali modo determinari poſſe. Ponatur x ſucceſſive æqualis numeris arithmetice proportionalibus, & (quod in hac regula eſſentiale eſt, ſecus ac in præcedentibus, unitate differentibus). Sint numeri hi, 2. 1. 0. — 1. — 2, qui collocentur uti in appoſita figura videre eſt.

C	2	+ 15	15.5 3 +
	1	— 3	3.1.0. —
	0	+ 7	7.1.0. —
	— 1	+ 21	21.7.3. +
	— 2	+ 15	15.5.3. +

1.0. — 1. — 3. — 5. — 15.	B	5	A	
1 — 3.		— 3		8
1. — 7.		— 7		4
1.0. — 1. — 3. — 7. — 21.		— 7		0
1.0. — 1. — 3. — 5. — 15.		— 3		— 4

quibus apponantur numeri ex quantitate S poſt ſubſtitutionem reſultantes nempe 15; — 3; + 7, + 21; + 15, poſtea apponantur horum numerorum diviſores, uti in præſente ſchediasmate. Ex hiſce diviſorum claſſibus eligantur tales numeri, ut eorum differentiæ ſint arithmetice proportionales, iique ponantur in latere: tales numeri in noſtro exemplo ſunt 5; — 3; — 7; — 7; — 3, quorum differentiæ arithmetice proportionales 8. 4. 0. — 4, iterum ad latus ponantur, ſed uno loco inferius, quo facto erit f æqualis dimidiæ differentiæ terminorum arithmetice proportionalium, poſteaque inventus valor ipſius f ſi ſubtrahatur a termino progreſſionis (A) e regione cyphræ progreſſionis (C) exiſtente, erit reſiduum æquale ipſi g, & tandem h erir æqualis termino progreſſionis (B) e regione cyphræ progreſſionis (C) exiſtenti, unde in noſtro exemplo $f = \frac{8 - 4}{2} = 2$, $g = 4 - 2 = 2$, & $h = -7$, adeoque diviſor quæſitus eſt $2xx + 2x - 7$, qui revera quantitatem propoſitam dividit. Hæc regula longe eſſet præferenda regulæ NEWTONI, niſi difficulter admodum termini progreſſionis (B) eruerentur.

cujus diviſor, ut ſupra, eſt $3y+4$, & completa deficiente dimenſione poſterioris termini per dimenſionem, c, fit $3y+4c$ diviſor quæſitus. Ita ſi quantitas ſit

$$x^4 - bx^3 - 5bbxx + 12b^3x - 6b^4;$$

poſito 1 pro b, & quantitatis reſultantis

$$x^4 - x^3 - 5xx + 12x - 6$$

invento diviſore $xx+2x-2$, compleo ejus deficientes dimenſiones per dimenſiones b, & ſic habeo diviſorem quæſitum $xx+2bx-2bb$.

LXXI. Ubi in quantitate propoſita tres vel plures ſunt literæ, & ejus termini omnes ad eaſdem dimenſiones aſcendunt; poteſt diviſor per præcedentes regulas inveniri; ſed expeditius hoc modo:

Quære omnes diviſores terminorum omnium in quibus literarum aliqua non eſt, item terminorum omnium in quibus alia aliqua literarum non eſt, pariter & omnium in quibus tertia litera, quartaque, & quinta non eſt, ſi tot ſunt literæ. Et ſic percurre omnes literas. Et e regione literarum colloca diviſores reſpective. Dein vide ſi in ſerie aliqua diviſorum per omnes literas pergente, partes omnes unicam tantum literam involventes tot vicibus reperiantnr quot ſunt literæ una dempta in quantitate propoſita: Et partes duas literas involventes tot vicibus quot ſunt literæ demptis duabus in eadem quantitate. Si ita eſt; partes iſtæ omnes ſub ſignis ſuis ſemel ſumptæ erunt diviſor quæſitus.

Ut ſi proponatur quantitas

$$12x^3 \begin{array}{l} -14b \\ +9c \end{array} x^2 \begin{array}{l} -12bb \\ -6bc \\ +8cc \end{array} x \begin{array}{l} +8b^3 \\ -12b^2c \\ -4bc^2 \\ +6c^3 \end{array}$$

termiporum

$$8b^3 - 12bbc - 4bcc + 6c^3$$

in quibus non eſt x, diviſores unius dimenſionis per præcedentes regulas inventi erunt $2b-3c$ & $4b-6c$;

terminorum

$$12x^3 + 9cxx + 8ccx + 6c^3$$

in quibus non eſt b, diviſor unicus $4x+3c$;

ac terminorum

$$12x^3 - 14bxx - 12bbx + 8b^3$$

in

in quibus non eſt c, diviſores $2x - b$ & $4x - 2b$. Hos diviſores e regione literarum x, b, c diſpono ut hic vides.

$$\begin{array}{c|l} x & 2b - 3c.\ 4b - 6c. \\ b & 4x + 3c. \\ c & 2x - b.\ 4x - 2b. \end{array}$$

Cum tres ſint literæ & diviſorum partes ſingulæ non niſi ſingulas literas involvant, in ſerie diviſorum debent partes illæ bis reperiri. At diviſorum $4b - 6c$ & $2x - b$ partes $4b$, $6c$, $2x$, b non niſi ſemel occurrunt. Extra diviſorem illum, cujus ſunt partes, non reperiuntur. Quare diviſores illos negligo. Reſtant tantum tres diviſores $2b - 3c$, $4x + 3c$ & $4x - 2b$. Hi in ſerie ſunt per omnes literas x, b, c pergente, & eorum partes ſingulæ $2b$, $3c$, $4x$, bis reperiuntur in ipſis ut oportuit, idque cum ſignis iiſdem, ſi modo ſigna diviſoris $2b - 3c$ mutentur, & ejus loco ſcribatur $-2b + 3c$. Nam ſigna diviſoris cujuſvis mutare licet. Sumo itaque horum partes omnes $2b$, $3c$, $4x$ ſemel ſub ſignis ſuis, & aggregatum $-2b + 3c + 4x$ diviſor erit quem invenire oportuit. Nam ſi per hunc dividas quantitatem propoſitam prodibit $3xx - 2bx + 2cc - 4bb$.

Rurſus ſi quantitas ſit

$$12x^5 \begin{array}{l} -10a \\ -9b \end{array} x^4 \begin{array}{l} -26aa \\ +12ab \\ +6bb \end{array} x^3 \begin{array}{l} +24a^3 \\ -8a^2b \\ -8ab^2 \\ -24b^3 \end{array} x^2 \begin{array}{l} -4a^3b \\ +6a^2b^2 \\ -12ab^3 \\ +18b^4 \end{array} x \begin{array}{l} +12a^4b \\ +32a^2b^3 \\ -12b^5 \end{array}$$

diviſores terminorum, in quibus x non eſt, colloco e regione x; illos terminorum, in quibus a non eſt, e regione a; & illos terminorum, quibus b non eſt, e regione b, ut hic vides.

$$\begin{array}{c|l} x & b,\ 2b,\ 4b,\ aa + 3bb,\ 2aa + 6bb,\ 4aa + 12bb,\ bb - 3aa, \\ & 2bb - 6aa,\ 4bb - 12aa. \\ a & 4xx - 3bx + 2bb,\ 12xx - 9bx + 6bb. \\ b & x,\ 2x,\ 3x - 4a,\ 6x - 8a,\ 3xx - 4ax,\ 6xx - 8ax, \\ & 2xx + ax - 3aa,\ 4xx + 2ax - 6aa. \end{array}$$

Dein illos omnes qui ſunt unius dimenſionis rejiciendos eſſe ſentio, quia ſimplices b, $2b$, $4b$, x, $2x$, & partes compoſitorum $3x - 4a$, $6x - 8a$, non niſi ſemel in omnibus diviſoribus reperiuntur; tres autem ſunt literæ in quantitate propoſita, & partes illæ unicam tantum involvunt, atque adeo bis reperiri deberent. Similiter diviſores duarum dimenſionum $aa + 3bb$, $2aa + 6bb$, $4aa + 12bb$, $bb - 3aa$ & $4bb - 12aa$ rejicio, quia partes eorum aa, $2aa$, $4aa$, bb & $4bb$, unicam tantum literam a vel b involventes, non niſi ſemel reperiuntur. Diviſoris autem $2bb - 6aa$, qui ſolus reſtat e regione x, partes $2bb$ & $6aa$ quæ ſimiliter unicam tantum literam involvunt, iterum reperiuntur, nempe pars $2bb$ in diviſore

$4xx - 3bx + 2bb$, & pars $6aa$ in diviſore $4xx + 2ax - 6aa$. Quin etiam hi tres diviſores in ſerie ſunt, ſtantes e regione trium literarum x, a, b; & omnes eorum partes $2bb, 6aa, 4xx$, quæ unicam tantum literam involvunt, bis reperiuntur in ipſis, idque ſub propriis ſignis; partes vero $3bx, 2ax$, quæ duas literas involvunt, non niſi ſemel occurrunt in ipſis. Quare horum trium diviſorum partes omnes diverſæ $2bb, 6aa, 4xx, 3bx, 2ax$ ſub ſignis ſuis connexæ, diviſorem deſideratum

$$2bb - 6aa + 4xx - 3bx + 2ax$$

conflabunt. Per hunc itaque divido quantitatem propoſitam & oritur $3x^3 - 4axx - 2aab - 6b^3$.

LXXII. *Si quantitatis alicujus termini omnes non ſunt æque alti, complendæ ſunt dimenſiones deficientes per dimenſiones literæ cujuſvis aſſumptæ, dein per præcedentes regulas invento diviſore, litera aſſumpta delenda eſt.*

Ut ſi quantitas ſit

$$12x^3 \begin{array}{l} -14b \\ +9 \end{array} x^2 \begin{array}{l} -12b^2 \\ -6b \\ +8 \end{array} x \begin{array}{l} +8b^3 \\ -12b^2 \\ -4b \\ +6 \end{array}.$$

aſſume literam quamvis c, & per dimenſiones ejus comple dimenſiones quantitatis propoſitæ ad hunc modum

$$12x^3 \begin{array}{l} -14b \\ +9c \end{array} x^2 \begin{array}{l} -12b^2 \\ -6bc \\ +8c^2 \end{array} x \begin{array}{l} +8b^3 \\ -12b^2c \\ -4bc^2 \\ +6c^3 \end{array}$$

Dein hujus diviſore $4x - 2b + 3c$ invento, **dele** c; & habebitur diviſor deſideratus $4x - 2b + 3$.

LXXIII. Aliquando diviſores facilius quam per has regulas inveniri poſſunt. Ut ſi litera aliqua in quantitate propoſita ſit unius tantum dimenſionis; quærendus erit maximus communis diviſor terminorum, in quibus litera illa reperitur, & reliquorum terminorum, in quibus non reperitur: nam diviſor ille totam dividet. Et ſi nullus eſt ejuſmodi communis diviſor, nullus erit diviſor totius. Exempli gratia, ſi proponatur quantitas

$$x^4 \begin{array}{l} -3a \\ +c \end{array} x^3 \begin{array}{l} -8aa \\ -ac \end{array} x^2 \begin{array}{l} +18a^3 \\ -8aac \end{array} x \begin{array}{l} +6a^3c \\ -8a^4 \end{array}$$

quæratur communis diviſor terminorum

$+cx^3$

$$+ cx^3 - acxx - 8aacx + 6a^3c$$

in quibus c unius eſt tantum dimenſionis, & terminorum reliquorum

$$x^4 - 3ax^3 - 8aaxx + 18a^3x - 8a^4$$

ac diviſor ille, nempe $xx + 2ax - 2aa$, dividet totam quantitatem.

LXXIV. *Ceterum maximus duorum numerorum diviſor communis, ſi prima fronte non innoteſcit, invenitur perpetua ablatione minoris de majori & reliqui de ablato. Nam quæſitus erit diviſor qui tandem nihil relinquit.* *

Sic ad inveniendum maximum communem diviſorem numerorum 203 & 667, aufer ter 203 de 667, & reliquum 58 ter de 203, & reliquum 29 bis de 58, reſtabitque nihil: quod indicat 29 eſſe diviſorem quæſitum.

LXXV. *Haud ſecus in ſpeciebus communis diviſor, ubi compoſitus eſt, invenitur ſubducendo alterutram quantitatem, aut multiplicem ejus de altera: Si modo & quantitates illæ & reſiduum juxta literæ alicujus dimenſiones, ut in diviſione oſtenſum eſt, ordinentur, & qualibet vice concinnentur dividendo ipſas per ſuos omnes diviſores qui aut ſimplices ſunt, aut ſingulos terminos, inſtar ſimplicium, dividunt.*

Sic ad inveniendum communem diviſorem numeratoris ac denominatoris fractionis hujus.

$$\frac{x^4 - 3ax^3 - 8aaxx + 18a^3x - 8a^4}{x^3 - axx - 8aax + 6a^3},$$

multiplica denominatorem per x, ut primus ejus terminus evadat idem cum primo termino numeratoris. Dein aufer, & reſtabit $-2ax^3 + 12a^3x - 8a^4$, quod concinnatum dividendo per $-2a$, evadit $x^3 - 6aax + 4a^3$. Hoc aufer de denominatore & reſtabit $-axx - 2aax + 2a^3$. Quod idem per $-a$ diviſum fit $xx + 2ax - 2aa$. Hoc autem per x multiplica, ut ejus primus terminus evadat idem cum primo termino noviſſimi ablati $x^3 - 6aax + 4a^3$, de quo auferendum eſt; & reſtabit $-2axx - 4aax + 4a^3$, quod per $-2a$ diviſum fit etiam $xx + 2ax - 2aa$. Et hoc cum idem ſit ac ſuperius reſiduum, proindeque ablatum relinquat nihil, quæſitus erit diviſor per quem fractio propoſita, facta numeratoris ac denominatoris diviſione, reduci poteſt ad ſimpliciorem, nempe ad $\frac{xx - 5ax + 4aa}{x - 3a}$.

Atque ita ſi habeatur fractio

* Eucl. 2. VII.

$$\frac{6a^5 + 15a^4b - 4a^3cc - 10aabcc}{9a^3b - 27aabc - 6abcc + 18bc^3},$$

termini ejus imprimis abbreviandi ſunt dividendo numeratorem per aa ac denominatorem per $3b$ Dein ablato bis

$$3a^3 - 9aac - 2acc + 6c^3 \text{ de } 6a^3 + 15aab - 4acc - 10bcc,$$

reſtabit

$$\begin{matrix} 15b \\ +18c \end{matrix}\, aa \,\begin{matrix} -10bcc \\ -12c^3 \end{matrix}.$$

Quod concinnatum dividendo terminum utrumque per $5b + 6c$ perinde ac ſi $5b + 6c$ ſimplex eſſet quantitas, evadit $3aa - 2cc$. Hoc multiplicatum per a aufer de $3a^3 - 9aac - 2acc + 6c^3$ & ſecunda vice reſtabit $-9aac + 6c^3$ quod itidem concinnatum per applicationem ad $-3c$, evadit etiam $3aa - 2cc$ ut ante. Quare $3aa - 2cc$ quæſitus eſt diviſor. Quo invento, divide per eum partes fractionis propoſitæ & obtinebitur
$\frac{2a^3 + 5aab}{3ab - 9bc}$.

LXXVI. Quod ſi diviſor communis hoc pacto non inveniatur, certum eſt nullum omnino exiſtere, niſi forſan e terminis prodeat per quos numerator ac denominator fractionis abbreviantur. Ut ſi habeatur fractio

$$\frac{aadd - ccdd - aacc + c^4}{4aad - 4acd - 2acc + 2c^3},$$

ac terminis ejus juxta dimenſiones litteræ d diſponantur, ita ut evadat

numerator

$$\begin{matrix} aa \\ -cc \end{matrix}\, dd \,\begin{matrix} -aacc \\ +c^4 \end{matrix}$$

denominator

$$\begin{matrix} 4aa \\ -4ac \end{matrix}\, d \,\begin{matrix} -2acc \\ +2c^3 \end{matrix}.$$

Hos imprimis oportet abbreviare dividendo utrumque numeratoris terminum per $aa - cc$ & utrumque denominatoris per $2a - 2c$ perinde ac ſi $aa - cc$ & $2a - 2c$ eſſent ſimplices quantitates. Atque ita vice numeratoris

toris emerget $dd - cc$, & vice denominatoris $2ad - cc$, ex quibus ſic præparatis nullus communis diviſor obtineri poteſt. Sed e terminis $aa - cc$ & $2a - 2c$, per quos numerator ac denominator abbreviati ſunt, prodit ejuſmodi diviſor, nempe $a - c$, cujus ope fractio ad hanc

$$\frac{add + cdd - acc - c^3}{4ad - 2cc}$$

reduci poteſt. Quod ſi neque termini $aa - cc$ & $2a - 2c$ communem diviſorem habuiſſent, fractio propoſita fuiſſet irreducibilis.

LXXVII. Et hæc generalis eſt methodus inveniendi communes diviſores:

Sed plerumque expeditius inveniuntur quærendo omnes alterutrius quantitatis diviſores primos, hoc eſt, qui per alios dividi nequeunt, ac dein tentando ſiqui alteram divident abſque reſiduo.

Sic ad reducendum $\frac{a^3 - aab + abb - b^3}{aa - ab}$ ad minimos terminos, inveniendi ſunt diviſores quantitatis $aa - ab$ nempe a & $a - b$. Dein tentandum eſt an alteruter a vel $a - b$ dividat etiam $a^3 - aab + abb - b^3$ abſque reſiduo.

Regulam generalem tradidit Cel. Nicol. Bernoullius, quam vide in commercio epiſtolico Leibnitii & Bernoullii. T. 2. p. 189. &c.

ARTICULUS III.

DE REDUCTIONE FRACTIONUM

ad communem denominatorem.

LXXVIII. F*ractiones ad communem denominatorem reducuntur multiplicando terminos utriuſque per denominatorem alterius* (r).

Sic habitis $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$, duc terminos unius $\frac{a}{b}$ in d, & viciſſim terminos alterius $\frac{c}{d}$ in b, & evadent $\frac{ad}{bd}$ & $\frac{bc}{bd}$, quarum communis eſt denominator

(r) Eucl. 17. VII. Vel ſic

186. Fractiones $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ habebunt eundem denominatorem ſi ambarum denominator ſit bd; hoc efficiendum eſt, ita ut fractiones valorem non mutent; fractio $\frac{a}{b}$ ſic dividitur per d, & ideo minor fit, quare eſt ducenda in d, ne valorem mutet, ſiquidem $\frac{ad}{bd} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{d} = \frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b}$. Idem dicendum de reliqua.

tor bd. Atque ita a & $\frac{ab}{c}$ ſive $\frac{a}{1}$ & $\frac{ab}{c}$ evadunt $\frac{ac}{c}$ & $\frac{ab}{c}$. Ubi vero denominatores communem habent diviſorem, ſufficit multiplicare alterne per quotientes. Sic fractiones $\frac{a^3}{bc}$ & $\frac{a^3}{bd}$ ad haſce $\frac{a^3d}{bcd}$ & $\frac{a^3c}{bcd}$ reducuntur, multiplicando alterne per quotientes c ac d ortos diviſione denominatorum per communem diviſorem b.

LXXIX. Hæc autem reductio præcipue uſui eſt in additione & ſubductione fractionum, quæ, ſi diverſos habent denominatores, ad eundem reducendæ ſunt antequam uniri poſſunt.

Sic $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$ per reductionem evadit $\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}$, ſive $\frac{ad+bc}{bd}$.

$$\text{Et } a+\frac{ab}{c} \text{ evadit } \frac{ac+ab}{c}.$$

$$\text{Et } \frac{a^3}{bc}-\frac{a^3}{bd} \text{ evadit } \frac{a^3d-a^3c}{bcd} \text{ vel } \frac{d-c}{bcd}a^3.$$

$$\text{Et } \frac{c^4+x^4}{cc-xx}-cc-xx \text{ evadit } \frac{2x^4}{cc-xx} \text{ (s).}$$

Atque ita $\frac{2}{3}+\frac{5}{7}$ evadit $\frac{14}{21}+\frac{15}{21}$ ſive $\frac{14+15}{21}$ hoc eſt $\frac{29}{21}$.

Et $\frac{11}{6}-\frac{3}{4}$ evadit $\frac{22}{12}-\frac{9}{12}$ ſive $\frac{13}{12}$.

Et $\frac{3}{4}-\frac{5}{12}$ evadit $\frac{9}{12}-\frac{5}{12}$ ſive $\frac{4}{12}$ hoc eſt $\frac{1}{3}$.

Et $3\frac{4}{7}$ ſive $\frac{3}{1}+\frac{4}{7}$ evadit $\frac{21}{7}+\frac{4}{7}$ ſive $\frac{25}{7}$.

Et $25\frac{1}{2}$ evadit $\frac{51}{2}$.

LXXX. Fractiones, ubi plures, ſunt gradatim uniri debent.

Sic habito $\frac{aa}{x}-a+\frac{2xx}{3a}-\frac{ax}{a-x}$, ab $\frac{aa}{x}$ aufer a & reſtabit $\frac{aa-xa}{x}$, huic adde $\frac{2xx}{3a}$ & prodibit $\frac{3a^3-3aax+2x^3}{3ax}$ unde aufer denique $\frac{ax}{a-x}$ & reſtabit $\frac{3a^4-6a^3x+2ax^3-2x^4}{3aax-3axx}$.

At-

(s) 187. Nam reducendo has fractiones $\frac{c^4+x^4}{cc-xx}$, $\frac{cc}{1}$; $\frac{xx}{1}$ ad eundem denominatorem, habetur, $\frac{c^4+x^4;\ c^4-ccxx;\ ccxx-x^4}{cc-xx}$; ſed duæ ſecundæ ſubducendæ ſunt a primis, ergo erit $\frac{c^4+x^4-c^4+ccxx-ccxx+x^4}{cc-xx}$ $=\frac{2x^4}{cc-xx}$.

Atque iſa ſi habeatur $3\frac{4}{7} - \frac{2}{3}$, imprimis aggregatum $3\frac{4}{7}$ inveniendum eſt nempe $\frac{25}{7}$ dein ab hoc auferendum $\frac{2}{3}$ & reſtabit $\frac{61}{21}$ (*t*).

ARTICULUS IV.

DE REDUCTIONE RADICALIUM;

ad minimos terminos.

LXXXI. R*Adicalis, ubi totius radix extrahi nequit, plerumque concinnatur extrahendo radicem diviſoris alicujus.*

Sic $\sqrt{aabc}$ extrahendo radicem diviſoris aa fit $a\sqrt{bc}$ (*u*).
Et $\sqrt{48}$ extrahendo radicem diviſoris 16 fit $4\sqrt{3}$.
Et $\sqrt{48aabc}$ extrahendo radicem diviſoris $16aa$ fit $4a\sqrt{3bc}$.
Et $\sqrt{\frac{a^3b - 4aabb + 4ab^3}{cc}}$ extrahendo radicem diviſoris $\frac{aa - 4ab + 4bb}{cc}$ fit $\frac{a - 2b}{c}\sqrt{ab}$.

Et $\sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz} + \frac{4aam^3}{pzz}}$ extrahendo radicem diviſoris $\frac{aamm}{ppzz}$ fit $\frac{am}{pz}$ in $\sqrt{oo + 4mp}$.

Et $6\sqrt{\frac{72}{74}}$ extrahendo radicem diviſoris $\frac{4}{49}$ fit $\frac{2}{7}\sqrt{\frac{2}{3}}$, ſive $\frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{9}}$ radicemque denominatoris adhuc extrahendo, fit $\frac{2}{7}\sqrt{6}$.

Et ſic $a\sqrt{\frac{b}{a}}$ ſive $a\sqrt{\frac{ab}{aa}}$ extrahendo radicem denominatoris fit $\sqrt{ab}$ (*x*).

Et $\sqrt[3]{:8a^3b + 16a^4}$ extrahendo radicem cubicam diviſoris $8a^3$ fit $2a$ in $\sqrt[3]{:b + 2a}$.

Haud ſecus $\sqrt[4]{:a^3x}$ extrahendo radicem quadraticam diviſoris aa fit $\sqrt{a}$ in $\sqrt[4]{ax}$ (*y*) vel extrahendo radicem quadrato-quadraticam diviſoris a^4 fit $a\sqrt[4]{\frac{x}{a}}$ (*z*).

At-

(*t*) 188. Nam $3\frac{4}{7} = \frac{3 \cdot 7 + 4}{7} = \frac{25}{7}$; & $\frac{25}{7}$; $\frac{2}{3}$ ad eundem denominatorem reductæ dant $\frac{75 \text{ \& } 14}{21}$ quarum differentia $= \frac{61}{21}$.

(*u*) 189. Siquidem $\sqrt{aabc} = \sqrt{bc} \cdot \sqrt{aa}$ (192. hujus) ſed $\sqrt{aa} = a$, ergo &c.

(*x*) Ductis denominatore, ac numeratore in a, fit $a\sqrt{\frac{b}{a}} = a\sqrt{\frac{ab}{aa}} = a\sqrt{\frac{1}{aa}}\cdot\sqrt{ab} = \frac{a}{a}\sqrt{ab}$ (quia $\sqrt{\frac{1}{aa}} = \frac{1}{a}$) $= \sqrt{ab}$.

(*y*) Nam $\sqrt[4]{a^3x} = \sqrt[4]{a^2} \cdot \sqrt[4]{ax} = \sqrt{a} \cdot \sqrt[4]{ax}$ (ex $\sqrt[4]{a^2}$ extracta radice quadrata).

(*z*) Item $\sqrt[4]{a^3x} = \sqrt[4]{\frac{a^4x}{a}} = \sqrt[4]{a^4} \cdot \sqrt[4]{\frac{x}{a}} = a\sqrt[4]{\frac{x}{a}}$.

Atque ita $\sqrt[6]{:a^7x^5}$ convertitur in $a\sqrt[6]{:ax^5}$, (*a*) vel in $ax\sqrt[6]{:\frac{a}{x}}$ (*b*) vel in $\sqrt[3]{ax}\,.\,\sqrt[3]{:axx}$ (*c*).

LXXXII. Ceterum hæc reductio non tantum concinnandis radicalibus inſervit, ſed & earum additioni & ſubductioni, ſi modo ex parte radicali conveniant ubi ad formam ſimpliciſſimam reducuntur. Tunc enim uniri poſſunt, quod aliter non fit.

Sic $\sqrt{48}+\sqrt{75}$ per reductionem evadit $4\sqrt{3}+5\sqrt{3}$ hoc eſt $9\sqrt{3}$.

Et $\sqrt{48}-\sqrt{\frac{16}{27}}$ per reductionem evadit $4\sqrt{3}-\frac{4}{9}\sqrt{3}$ hoc eſt $\frac{32}{9}\sqrt{3}$ (*d*).

Et ſic $\sqrt{\frac{4ab^3}{cc}}+\sqrt{\frac{a^3b-4aabb+4ab^3}{cc}}$ extrahendo quicquid eſt rationale, evadit $\frac{2b}{c}\sqrt{ab}+\frac{a-2b}{c}\sqrt{ab}$ (*e*) hoc eſt $\frac{a}{c}\sqrt{ab}$.

Et $\sqrt[3]{:\overline{8a^3b+16a^4}}-\sqrt[3]{:\overline{b^4+2ab^3}}$ evadit $2a\sqrt[3]{:\overline{b+2a}}-b$ in $\sqrt[3]{:\overline{b+2a}}$ (*f*) hoc eſt $\overline{2a-b}\ \sqrt[3]{:\overline{b+2a}}$.

ARTICULUS V.

DE REDUCTIONE RADICALIUM ad eandem denominationem.

LXXXIII. Cum in radicalibus diverſæ denominationis inſtituenda eſt multiplicatio vel diviſio, oportet omnes ad eandem denominationem reducere, idque præfigendo ſignum radicale, cujus index eſt minimus numerus, quem earum indices dividunt abſque reſiduo, & ſuffixas quan-

(*a*) Enim $\sqrt[6]{a^7x^5}=\sqrt[6]{a^6}\,.\,\sqrt[6]{ax^5}=a\sqrt[6]{ax^5}$.

(*b*) Pariter $\sqrt[6]{a^7x^5}=\sqrt[6]{\frac{a^7x^6}{x}}=\sqrt[6]{a^6x^6}.\sqrt[6]{\frac{a}{x}}=ax\sqrt[6]{\frac{a}{x}}$.

(*c*) Denique $\sqrt[6]{a^7x^5}=\sqrt[6]{a^3x^3}\,.\,\sqrt[6]{a^4x^2}$. Cum vero ex harum nulla extrahere poſſim radicem ſextam, & prima quantitas ſit cubica ſecunda quadrata, e prima cubicam, e ſecunda quadratam radicem extraho, & invenio $\sqrt[3]{ax}\,.\,\sqrt[3]{a^2x}$.

(*d*) Jam $\sqrt{48}=\sqrt{16}\,.\,\sqrt{3}=4\sqrt{3}$. quærenda eſt igitur quantititas ducta in $\sqrt{3}$ & æqualis ipſi $\sqrt{\frac{16}{27}}$: ſit hæc x, ergo $x\sqrt{3}=\sqrt{\frac{16}{27}}$ & omnibus diviſis per $\sqrt{3}$, $x=\sqrt{\frac{16}{27\cdot3}}=\sqrt{\frac{16}{81}}=\frac{4}{9}$ quare $\frac{4}{9}\sqrt{3}=\sqrt{\frac{16}{27}}$.

(*e*) Siquidem $\sqrt{\frac{4ab^3}{cc}}=\sqrt{\frac{4b^2}{c^2}}.\sqrt{ab}=\frac{2b}{c}\sqrt{ab}$, & $\sqrt{\frac{(a^3b-4aabb+4ab^3)}{cc}}=\sqrt{\frac{(a^2-4ab+4b^2)}{cc}}\sqrt{ab}=\frac{(a-2b)}{c}\sqrt{ab}$.

(*f*) Eſt enim $\sqrt[3]{(8a^3b+16a^4)}=\sqrt[3]{8a^3}.\sqrt[3]{(b+2a)}=2a\sqrt[3]{(b+2a)}$ & $\sqrt[3]{(b^4+2ab^3)}=\sqrt[3]{b^3}.\sqrt[3]{(b+2a)}=b\sqrt[3]{(b+2a.)}$

Digitized by Google

quantitates toties, dempta una vice, in ſe ducendo quoties index ille jam major evaſerit (*g*).

Sic enim $\sqrt{ax}$ in $\sqrt[3]{:aax}$ evadit $\sqrt[6]{:a^3x^3}$ in $\sqrt[5]{:a^4xx}$ hoc eſt $\sqrt[6]{:a^7x^5}$.
Et $\sqrt{a}$ in $\sqrt[4]{:ax}$ evadit $\sqrt[4]{:aa}$ in $\sqrt[4]{:ax}$ hoc eſt $\sqrt[4]{:a^3x}$.
Et $\sqrt{6}$ in $\sqrt[4]{:\frac{5}{6}}$ evadit $\sqrt[4]{:36}$ in $\sqrt[4]{:\frac{5}{6}}$ hoc eſt $\sqrt[4]{:30}$.
Eadem ratione $a\sqrt{bc}$ evadit $\sqrt{aa}$ in $\sqrt{bc}$ hoc eſt $\sqrt{aabc}$.
Et $4a\sqrt{3bc}$ evadit $\sqrt{16aa}$ in $\sqrt{3bc}$ hoc eſt $\sqrt{48aabc}$.
Et $2a\sqrt[3]{(b+2a)}$ evadit $\sqrt[3]{:8a^3}$ in $\sqrt[3]{(b+2a)}$ hoc eſt $\sqrt[3]{(8a^3b+16a^4)}$.

Atque ita $\frac{\sqrt{ac}}{b}$ fit $\frac{\sqrt{ac}}{\sqrt{bb}}$ ſive $\sqrt{\frac{ac}{bb}}$.

Et $\frac{6abb}{\sqrt{18ab^3}}$ fit $\frac{\sqrt{36aab^4}}{\sqrt{18ab^3}}$ ſive $\sqrt{2ab}$. Et ſic in aliis.

ARTICULUS VI.

DE REDUCATIONE RADICALIUM.

ad ſimpliciores radicales per extractionem radicum.

LXXXIV. **R**Adices quantitatum quæ ex integris & radicalibus quadraticis componuntur ſic extrahe.

Deſignet A *quantitatis alicujus partem majorem*, B *partem minorem*: *Et erit* $\frac{A+\sqrt{(AA-BB)}}{2}$ *quadratum majoris partis radicis*; & $\frac{A-\sqrt{(AA-BB)}}{2}$ *qua-*

(*g*) 191. In ſequentibus radices notabimus, ut dictum eſt (N°. 159. hujus) commodo Typothetharum inſervientes.

Radicum eundem denominatorem habentium jam tradita eſt multiplicatio (XLIV. hujus) & diviſio (XLIX hujus): cum vero diverſum habent denominatorem ad eundem ſunt reducendæ. Sumamus $a^{\frac{n}{p}}$; $b^{\frac{m}{q}}$. Jam patet $a^{\frac{nq}{pq}} = a^{\frac{n}{p}}$, & $b^{\frac{mq}{pq}} = b^{\frac{m}{q}}$, quare reductio facta eſt.

Si vero *p*, & *q*, communem habeant menſuram. *ex. gr.* ſi $p = rs$, & $q = rt$, haberemus $a^{\frac{nrt}{rrst}}$ & $b^{\frac{mrs}{rrst}}$, indices fracti reducantur ad minimos terminos per LXV. hujus, fiat $a^{\frac{nt}{rst}}$, & $b^{\frac{ms}{rst}}$ eundem habentes denominatorem, (quod erat faciendum) & prioribus ſimpliciores (quod ſemper eſt quærendum) quam ob rem *inveniatur* rst *minimus numerorum, quos duo dati metiuntur* (EUCL. 27. VII.) *hic dividatur per* rs *indicem unius ex radicalibus, unde habetur* t; *elevetur* a^n *ad poteſtatem* t, & *ex ea extrahatur radix* rst. *Idem fiat de ſecunda*, & voti compotes facti erimus.

Sic minimus numerus quem 2, & 3 metiuntur eſt 6; $\frac{6}{2} = 3$, ergo *ax* elevanda ad tertiam poteſtatem, unde a^3x^3, & ejus radix ſexta $a^{\frac{3}{6}}x^{\frac{3}{6}} = \sqrt{ax}$: ſed $\frac{6}{3} = 2$, quare eleva *aax* ad quadratum, habiturus a^4xx, & $a^{\frac{4}{6}}x^{\frac{2}{6}} = \sqrt[3]{aax}$.

quadratum partis minoris, quæ quidem majori adnectenda eſt cum ſigno ipſius B (*b*).

Ut

(*b*) 192. Ad hanc regulam intelligendam obſerva tacite ſupponere Auctorem.

193. Quod termini, quibus conſtat quantitas complexa reducenda, ſint incommenſurabiles, & quidem ita ut commenſurabiles fieri nullo pacto queant.

Hinc excluduntur quantitates huiusmodi $a+\sqrt{b^2}$; quia $\sqrt{b^2}=b$; atque a & b ſunt commenſurabiles; aut $\sqrt{a^2c}+\sqrt{b^2c}=a\sqrt{c}+\sqrt{c}$ (art. LXXXI. hujus) $=(a+b)\sqrt{c}$ (art. LXXXII. hujus): aut denique $\sqrt{a}+\frac{b}{\sqrt{a}}=\frac{a+b}{\sqrt{a}}$ (art. XLIV. LXXVIII. & LXXIX. hujus).

194. Quod quantitas reducenda conſtet ex integris & radicalibus, & quidem *quadraticis*, aut ex quantitatibus quæ ad integras & radicales quadraticas reduci poſſint; ut melius videbimus infra N°. 203. 204. 205.

195. Quod omnes quantitates commenſurabiles pro una ſumantur.

Sic infra, ubi quantitatem $aa+5ax-2a\sqrt{(ax+4xy)}$ reducendam proponit NEWTONUS, commenſurabiles aa & $5ax$ pro una ſumit.

Eodem pacto ſi haberemus $100+\sqrt{3267}+\sqrt{867}$, quantitates $\sqrt{3267}$, & $\sqrt{867}$ reducendæ eſſent ad minimos terminos per (art. LXXXI. hujus); quo facto obtinebimus $33\sqrt{3}$ & $17\sqrt{3}$, quæ conjunctæ (art. LXXXII. hujus) dabunt $100+50\sqrt{3}$.

196. Quod omnia quadrata ſimplicia ſint commenſurabilia, non autem rectangula cum quadratis.

197. In hoc articulo quantitas complexa vocabitur *binomium*, ſi conſtat duabus partibus incommenſurabilibus; *trinomium* ſi ex tribus; *quadrinomium* ſi ex quatuor &c.; & in genere *polynomium* ſi ex pluribus, quamvis pars integra ſit complexa.

198. *Quadratum radicis polynomiæ, (niſi plures termini coaluerint) continet tot terminos quot ſunt unitates in dimidiato numero terminorum radicis ducto in eundem numerum unitate auctum.*

Sit numerus terminorum in radice $=m$.

In quadrato numerus terminorum æquat numerum terminorum radicis ductum in ſe, (N°. 92. hujus). Eſt ergo mm. Tot autem ſunt quadrata ſimplicia, quot ſunt termini in radice: igitur eorum numerus eſt m; qui ſi dematur ex numero terminorum omnium, ſupererit $mm-m$ pro numero rectangulorum. Sed bina quæque rectangula ſunt æqualia & in unum coeunt; quare, hac reductione facta, eorum numerus erit $\frac{mm-m}{2}$. Redde numerum quadratorum, & fiet numerus terminorum diſtinctorum $\frac{mm-m}{2}+m=\frac{mm-m+2m}{2}$ (Art LXXIX. hujus) $=\frac{mm+m}{2}=\frac{m}{2}(m+1.)$

Hinc facile dignoſcemus utrum in polynomio, quod tanquam quadratum proponitur, omnes termini adſint, an aliqui coaluerint, & quot. Pone tantum pro m ſucceſſive numeros naturales 1, 3, 4 &c. & diſpice num $\frac{m}{2}(m+1)$ det numerum terminorum polynomii propoſiti. Si hoc ſit, omnes termini aderunt. Secus vero, ex variis numeris, qui oriuntur ex $\frac{m}{2}(m+1)$ ſume numerum proxime majorem numero terminorum polynomii; hunc ex illo ſubduc; differentiæ adde unitatem, & habebis numerum terminorum qui in unum coiverunt.

Habeat, *ex. gr.* polynomium propoſitum quinque terminos. Pone $m=2$; erit $\frac{m}{2}=1$; & $m+1=3$; ergo $\frac{m}{2}(m+1)=1.3$. Nunc pone $m=3$; erit $=\frac{3}{2}$ & $m+1=4$; & $\frac{m}{2}(m+1)=\frac{3\cdot4}{2}=\frac{12}{2}=6$; qui numerus ſuperat datum terminorum numerum unitate; huic differentiæ adde unitatem, & duos terminos coaluiſſe reperies.

Eſt quidem directa methodus inveniendi utrum numerus terminorum aſſignatus poſſit æquare $\frac{m}{2}(m+1)$; ſed cum ea pendeat ab articulo XI. Sect. II. infra legendo; & cum me-

Digitized by Google

methodus indirecta non nimis ſit difficilis, hac nos decet eſſe contentos.

199. Si, præter bina rectangula, omnia quadrata in unum coierint; erit numerus terminorum $\frac{mm-m}{2}+1$.

200 Binomium oritur ex radice binomiali, & duæ quadrati partes in unam coaluerunt.

201. *Si quadratum radicis polynomia involvit radicales, & omnia quadrata ſunt commenſurabilia, quadratum hoc erit factum polynomii compoſiti ex integris & radicalibus quadraticis in aliam quamvis radicalem.*

Sit radix polynomia $a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{m}}+c^{\frac{1}{r}}+$ &c., ejus quadratum erit $a^{\frac{2}{n}}+2a^{\frac{1}{n}}b^{\frac{1}{m}}+2a^{\frac{1}{n}}c^{\frac{1}{r}}+b^{\frac{2}{m}}+2b^{\frac{1}{m}}c^{\frac{1}{r}}+c^{\frac{2}{r}}+$ &c. Jam, ut quadrata ſint commenſurabilia, opus eſt ut, ſaltem, revocari poſſint ad eundem radicalem. Sit ergo

$$a^{\frac{2}{n}}=yx^{\frac{1}{s}};\ b^{\frac{2}{m}}=zx^{\frac{1}{s}};\ c^{\frac{2}{r}}=ux^{\frac{1}{s}}.$$

&c.

Erit, extrahendo radices quadraticas, (N°. 161. huius)

$$a^{\frac{2}{n}}=y^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2s}};\ b^{\frac{1}{m}}=z^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2s}};\ c^{\frac{1}{r}}=u^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2s}}$$

& ſuperius quadratum fiet

$$yx^{\frac{1}{s}}+2y^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{s}}+2y^{\frac{1}{2}}u^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{s}}+zx^{\frac{1}{s}}+2z^{\frac{1}{2}}u^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{s}}+ux^{\frac{1}{s}}+\&c.$$

id eſt

$$(y+z+u+\&c.+2y^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}}+2y^{\frac{1}{2}}u^{\frac{1}{2}}+2z^{\frac{1}{2}}u^{\frac{1}{2}}+\&c.)\,x^{\frac{1}{s}}$$

Ergo &c.

Ita $\sqrt[3]{3087}+\sqrt[6]{139968}=(7+2\sqrt{3})\sqrt[3]{9}$; eſt enim, quæſitis diviſoribus, $3087=3.3.7.7.7$, & $\sqrt[3]{3087}=\sqrt[3]{7.7.7}\,\sqrt[3]{3.3}=7\sqrt[3]{9}$

&

$139968=2.2.2.2.2.2.3.3.3.3.3.3.3$;

atque

$$\sqrt[6]{139968}=\sqrt[6]{2.2.2.2.2.2.}\,\sqrt[6]{3.3.3.3.}$$
$$\overline{3.3.3}=2.\sqrt[3]{9}.\sqrt{3}.$$

202. Quin & hujuſmodi quadratorum radices recidunt in polynomia compoſita ex radicalibus quadraticis ductis in eandem radicalem quamlibet, cujus radicalis exponens eſt par. Si quidem ea radix ſit

$$y^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2s}}+z^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2s}}+u^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2s}}+\&c.$$
$$=(\sqrt{y}+\sqrt{z}+\sqrt{u})\sqrt{x}^{\frac{1}{s}}.$$

203. Ubi omnia quadrata ſunt inter ſe commenſurabilia, rectangula fieri commenſurabilia nequeunt. Nam, ut $\sqrt{yz}$, & $\sqrt{yu}$ fiant commenſurabilia, opus eſt ut vel

1°. Quadrata ſint z, & u & quidem ex radicibus commenſurabilibus; ſit $z=\alpha\alpha$, & $u=\beta\beta$; tunc polynomium N°. 201. fit

$(y+\alpha\alpha+\beta\beta+(2\alpha+2\beta)\sqrt{y}+2\alpha\beta)\,x^{\frac{1}{s}}$; & ejus radix deſcripta N° 202. evadit

$(\sqrt{y}+\alpha+\beta)\,x^{\frac{1}{2s}}$; cum autem α & β ſint commenſurabiles; radix trinomia fit binomia, contra hypotheſim.

2°. Sit $\sqrt{yz}=\alpha\sqrt{\beta}$, & $\sqrt{yu}=\kappa\sqrt{\beta}$; & ſint commenſurabiles α & κ; erit quadrando, $yz=\alpha\alpha\beta$; & $yu=\kappa\kappa\beta$, & $y=\frac{\alpha\alpha\beta}{z}=\frac{\kappa\kappa\beta}{u}$; ergo multiplicando in crucem & dividendo per β, $\alpha\alpha u=\kappa\kappa z$, & $z=\frac{\alpha\alpha u}{\kappa\kappa}$, quare $yz=\frac{y\alpha\alpha u}{\kappa\kappa}=\alpha\alpha\beta$, & dividendo $\frac{y\alpha\alpha u}{\kappa\kappa}$ & $\alpha\alpha\beta$ per $\alpha\alpha$; fiet $\frac{yu}{\kappa\kappa}=\beta$; ac multiplicando per $\kappa\kappa$ & dividendo per u, $y=\frac{\kappa\kappa\beta}{u}$; quocirca radix deſcripta N°. 202. fiet $(\kappa\sqrt{\frac{\beta}{u}}+\frac{\alpha}{\kappa}\sqrt{u}+\sqrt{u})$

$\sqrt{u}) \, x^{\frac{1}{2s}}$ aut reducendo $\frac{\alpha}{u}\sqrt{u}$, & $\sqrt{u}$ ad eundem denominatorem $(u\sqrt{\frac{\beta}{u}} + \frac{\alpha+z}{u}$ in $\sqrt{u}) \, x^{\frac{1}{2s}}$, quæ iterum eſt binomia.

204. Non ergo neceſſe eſt ut quantitas reducenda nullas contineat radicales præter quadraticas, ſed ut ad integras & quadraticas quantitates reduci poſſit.

205. Hoc evenit etiam ubi $s = 2$; id eſt ubi nullæ ſunt radices niſi quadraticæ, tunc enim quadratum fit

$$(y + z + u + 2\sqrt{yz} + 2\sqrt{yu} + 2\sqrt{yu})\sqrt{x}.$$

Sic infra proponit Auctor reducendam quantitatem $\sqrt{32} - \sqrt{24}$, quæ abit in $(4 - 2\sqrt{3}) . \sqrt{2}$, eſt enim $32 = 2 . 16$, & $\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$, atque $24 = 4 . 2 . 3$, & $\sqrt{24} = 2\sqrt{2} . \sqrt{3}$.

Eodem pacto $\sqrt{12} + \sqrt{24}$ fit $2\sqrt{3} + 2\sqrt{2} . \sqrt{3} = (2 + 2\sqrt{2})\sqrt{3}$.

206. Hac diviſione facta, radicales reſiduæ ſunt quævis duplum rectangulum; ergo dividi ſingulæ poterunt per $\sqrt{4} = 2$; alioquin fruſtra quæretur radix quantitatis propoſitæ.

207. Si radicales, quibus conſtat quiſque quadrati terminus ad eundem exponentem reducantur, radicales rectangulorum habebunt exponentem duplum exponentis radicalium in quadratis.

208. *In quadrato binomii ſumma quadratorum major eſt ſumma rectangulorum.*

Primum quadratum eſt ad rectangulum ut rectangulum ad alterum quadratum (Eucl. 1. VI. aut 17. VII. vel 11. VIII.). Harum quantitatum media non poteſt eſſe neque maxima neque minima (ut facile deducitur ex Eucl. def. 5. & 7. aut prop. 14. V.); ergo quadratorum alterum erit quantitas maxima, alterum minima; & ſemper ſumma quadratorum major quam ſumma rectangulorum (Eucl. 25. V.) Q. E. E. D.

209. Si ergo, facta reductione de qua Nis. 203. 204. 205. quantitas integra minor ſit quantitate radicali, fruſtra adhibebis Regulam Newtoni.

Quamvis autem quantitas reducenda revocari poſſit ad polynomium conſtans ex integris & radicalibus quadraticis, & quavis radicalis dividi poſſit per $\sqrt{4} = 2$; &, in binomio, quantitas integra major ſit radicali, non ſemper tamen ea quantitas reduci poteſt, quia non ſemper eſt quadratum. Igitur Regula ſupponit quantitatem reducendam eſſe quadratum.

Nunc demonſtremus regulam Auctoris.

Sit primo quantitas reducenda binomium.

Quoniam, ex hypotheſi, $A + B$ eſt quadratum, concipi poteſt ejus radix, quæ erit binomialis, nam ex radice ſimplici oritur quadratum ſimplex, & ex radice binomiali quadrinomium (N°. 92.). Quadratum autem radicis binomiæ continet quadratum primæ partis radicis, duo rectangula ex prima parte in ſecundam, & quadratum ſecundæ (N°. 122. hujus & Eucl. 4. II. & A exponit aggregatum quadratorum ex hypotheſi; ergo B exprimit duo rectangula. Quamobrem quadratum ipſius A continebit quadrato-quadratum primæ partis radicis, duo facta ex quadrato primæ partis in quadratum ſecundæ, & quadrato-quadratum ſecundæ; & quadratum ipſius B erit quater factum ex quadrato primæ partis radicis in quadratum ſecundæ. Igitur differentia quadratorum ex A & ex B continebit quadrato-quadratum. primæ partis radicis, & quadrato-quadratum ſecundæ multata bis facto ex quadrato primæ partis radicis in quadratum ſecundæ; cujus aggregati radix eſt differentia quadratorum primæ partis radicis & ſecundæ (Eucl. 7. 2.). Huic adde A, vel ambo quadrata, & habebis bis quadratum primæ partis; quod erat primum.

Ex ambobus quadratis deme eorum differentiam, ſupererit bis quadratum ſecundæ partis, quod erat alterum.

Hoc ratiocinium ita ſimbolis poni ſub oculis poteſt. Eſto radix quantitatis reducendæ $x + y$. Quantitas ipſa æquivalebit huic

$$xx + 2xy + yy = A + B.$$

Jam eſt

$$A = xx + yy \text{ ergo } AA = x^4 + 2x^2y^2 + y^4$$

&

$$B = 2xy;\ BB = 4x^2y^2; \text{ quare}$$
$$AA - BB = x^4 - 2x^2y^2 + y^4,$$

quapropter

$$\sqrt{(AA - BB)} = x^2 - y^2;$$
$$A + \sqrt{(AA - BB)} = x^2 + y^2 + x^2 - y^2 = 2x^2$$

at-

Ut ſi quantitas ſit $3 + \sqrt{8}$, ſcribendo 3 pro A, & $\sqrt{8}$ pro B, erit $\sqrt{(AA - BB)} = 1$, indeque quadratum majoris partis radicis $\frac{3+1}{2}$ id eſt 2, & quadratum minoris partis $\frac{3-1}{2}$ id eſt 1. Ergo radix eſt $1 + \sqrt{2}$.

Rurſus ſi ex $\sqrt{32} - \sqrt{24}$ radix extrahenda ſit, ponendo $\sqrt{32}$ pro A & $\sqrt{24}$ pro B erit $\sqrt{(AA - BB)} = \sqrt{8}$, & inde $\frac{\sqrt{32} + \sqrt{8}}{2}$ & $\frac{\sqrt{32} - \sqrt{8}}{2}$ hoc eſt $3\sqrt{2}$ & $\sqrt{2}$ (*i*) quadrata partium radicis. Radix itaque eſt $\sqrt[4]{18} - \sqrt[4]{2}$.

Eodem modo ſi de $aa + 2x\sqrt{(aa - xx)}$ radix extrahi debet, pro A ſcribe aa, & pro B $2x\sqrt{(aa - xx)}$ & erit $AA - BB = a^4 - 4aaxx + 4x^4$. Cujus radix eſt $aa - 2xx$. Unde quadratum unius partis radicis erit $aa - xx$; illud alterius xx; adeoque radix $x + \sqrt{(aa - xx)}$.

Rurſus ſi habeatur $aa + 5ax - 2a\sqrt{(ax + 4xx)}$, ſcribendo $aa + 5ax$ pro A & $2a\sqrt{(ax + 4xx)}$ pro B, fiet $AA - BB = a^4 + 6a^3x + 9aaxx$, cujus radix eſt $aa + 3ax$. Unde quadratum majoris partis radicis erit $aa + 4ax$, illud minoris ax, & radix $\sqrt{(aa + 4ax)} - \sqrt{ax}$.

De-

atque

$A - \sqrt{(AA - BB)} = x^2 + y^2 - x^2 + y^2 = 2y^2$; $\frac{A + \sqrt{(AA - BB)}}{2} = x^2$; $\frac{A - \sqrt{(AA - BB)}}{2} = y^2$.

Vel, cum A ſit aggregatum duorum quadratorum, & B ſumma duorum rectangulorum; & cum primum quadratum ſit ad rectangulum ut rectangulum ad alterum quadratum; ita in duas partes dividenda eſt quantitas A ut prima pars ſit ad dimidium B, ut dimidium B eſt ad alteram partem;

Sit ergo $A = 2x$, & prima pars (nempe quadratum maximæ partis radicis) ſit $x + y$: reliqua pars, (ſcilicet quadratum minimæ partis radicis;) erit $A - x - y = 2x - x - y = x - y$. Eſt ergo $x + y . \frac{B}{2} :: \frac{B}{2} . x - y$, & $xx - yy = \frac{BB}{4}$; ſed $AA = 4xx$, & $\frac{AA}{4} = xx$; quare $\frac{AA}{4} - yy = \frac{BB}{4}$; aut (addendo hinc inde yy) $\frac{AA}{4} = \frac{BB}{4} + yy$; & (utrinque demendo $\frac{BB}{4}$) $\frac{AA - BB}{4} = yy$; & extracta radice, $\frac{1}{2}\sqrt{(AA - BB)} = y$. Sed $x = \frac{A}{2}$; quapropter $\frac{A + \sqrt{(AA - BB)}}{2} = x + y$; quod eſt quadratum primæ partis radicis, & $\frac{A - \sqrt{(AA - BB)}}{2} = x - y$, quod eſt quadratum ſecundæ partis radicis.

Cetera, quæ pertinent ad polynomia reducenda, leguntur infra ſuo loco.

(*i*) Eſt enim,
$32 = 16.2$, & $\sqrt{32} = \sqrt{16} . \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$. Item $8 = 4.2$, & $\sqrt{8} = \sqrt{4} . \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.

ideo

$\frac{\sqrt{32} + \sqrt{8}}{2} = \frac{4\sqrt{2} + 2\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$; pariter $\frac{\sqrt{32} - \sqrt{8}}{2} = \frac{4\sqrt{2} - 2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$.

Denique ſi habeatur $6 + \sqrt{8} - \sqrt{12} - \sqrt{24}$, ponendo $6 + \sqrt{8} = A$ & $- \sqrt{12} - \sqrt{24} = B$, fiet $AA - BB = 8$. Unde radicis pars major $\sqrt{(3 + \sqrt{8})}$ hoc eſt (ut ſupra) $1 + \sqrt{2}$, & pars minor $\sqrt{3}$, atque adeo radix ipſa $1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}$ (k).

Ce-

(k) 210. Polynomium $6 + \sqrt{8} - \sqrt{12} - \sqrt{24}$ habet quatuor terminos; ergo certe non oritur a radice binomiali. Quamobrem ponamus in formula Ni. 198. $m = 3$. Erit

$$mm = 9;\ mm - m = 9 - 3 = 6;$$
$$\frac{mm - m}{2} = 3;\ \frac{mm - m}{2} + 1 = 4.$$

Unde ſequitur radicem trinomialem præbere quadratum conſtans quatuor terminis, ſi quadrata omnia in unum fuerint coacta; quæ eſt noſtra hypotheſis.

211. *Si in quadrato radicis trinomialis omnia quadrata ſimplicia in unum redacta ſint, dico quod alterum terminorum par, quomodocumque ſumptum, continet quadratum duarum partium radicis junctim ſumptarum una cum quadrato reliqua.*

Sit radix trinomalis $x + y + z$; cujus quadratum erit

$$x^2 + 2xy + 2xz + y^2 + 2yz + z^2.$$

Eſto, ſecundum hypotheſim, $x^2 + y^2 + z^2 = u^2$, & fiet

$$x^2 + 2xy + 2xz + y^2 + 2yz + z^2 = u^2 + 2xy + 2xz + 2yz.$$

Nunc ſumere potes

aut $u^2 + 2xy$; au $u^2 + 2xz$; aut $u^2 + 2yz$

Nam, ſi inde ſumis duo rectangula quævis, ſemper hinc reſtabit u^2 cum altero rectangulo.

Eſt autem

$$u^2 + 2xy = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy = z^2 + (x + y)^2$$

&

$$u^2 + 2xz = x^2 + y^2 + z^2 + 2xz = y^2 + (x + z)^2$$

atque

$$u^2 + 2yz = x^2 + y^2 + z^2 + 2yz = x^2 + (y + z)^2$$

Ego, &c.

212. Si igitur concipis quadratum binomii $x + y$, vel $x + z$, vel $y + z$, tanquam unum quadratum, demonſtratio regulæ *Newtonianæ*, quam pro binomiis reducendis tradidimus, extendetur ud quadrinomia.

213. *Quamquam hoc Theorema non ſupponat reductionem* N°. 201., *tamen ſine ea vix, ac ne vix quidem, fieri poteſt reductio quadrinomiorum radicalium.*

Proponatur, exempli gratia, reducendum quadrinomium

$$\sqrt[3]{4000} + \sqrt[6]{221184} + \sqrt[6]{1024000} + \sqrt[6]{3456000}$$

& ſit

$$A = \sqrt[3]{4000} + \sqrt[6]{3456000} = \sqrt[6]{16000000} + \sqrt[6]{3456000}$$

&

$$B = \sqrt[6]{221184} + \sqrt[6]{1024000}$$

erit

$$AA = \sqrt[3]{1600000} + 2\sqrt[6]{55296000000000} + \sqrt[3]{3456000}$$

atque

$$BB = \sqrt[3]{221184} + 2\sqrt[6]{226492416000} + \sqrt[3]{1024000}$$

unde $AA - BB$ erit quantitas ſex nominum, quæ multo difficilius reduci poteſt quam propoſita.

Sed præliminaris reductio noſtra Ni. 201, oſtendit eſſe

$$\sqrt[3]{4000} = 10\sqrt[3]{4}$$

&

$$\sqrt[6]{221184} = \sqrt[6]{16}.\sqrt[6]{13824} = \sqrt[3]{4}.\sqrt{24}$$
$$= \sqrt[3]{4}.\sqrt{4}.\sqrt{6} = 2\sqrt{6}.\sqrt[3]{4}$$

atque

$$\sqrt[6]{1024000} = \sqrt[6]{16}.\sqrt[6]{640000} = \sqrt[3]{4}.\sqrt{40}.$$
$$= \sqrt[3]{4}.\sqrt{4}.\sqrt{10} = 2\sqrt{10}.\sqrt[3]{4}$$

deni-

Ceterum ubi plures ſunt hujuſmodi termini radicales, poſſunt partes radicis citius inveniri dividendo factum quarumvis duarum radicalium per tertiam aliquam radicalem quæ producit quotum rationalem & integrum. Nam dupli quoti iſtius radix erit duplum partis radicis quæſitæ *(l)*. Ut in exemplo noviſſimo $\frac{\sqrt{8}.\sqrt{12}}{\sqrt{24}} = 2$, $\frac{\sqrt{8}.\sqrt{24}}{\sqrt{12}} = 4$, $\frac{\sqrt{12}.\sqrt{24}}{\sqrt{8}} = 6$.

Er-

denique

$$\sqrt[6]{3456000} = \sqrt[6]{16}.\sqrt[6]{216000} = \sqrt[3]{4}.\sqrt{60}$$
$$= \sqrt[3]{4}\,\sqrt{4}\,\sqrt{15} = 2\sqrt{15}.\sqrt[3]{4}$$

quapropter polynomium propoſitum evadit

$$(10 + 2\sqrt{6} + 2\sqrt{10} + 2\sqrt{15})\sqrt[3]{4}$$

Sit nunc

$$A = 10 + 2\sqrt{6} \qquad B = 2\sqrt{10} + 2\sqrt{15}$$

erit

$$AA = 100 + 40\sqrt{6} + 24 = 124 + 40\sqrt{6}\ \&$$
$$BB = 40 + 8\sqrt{150} + 60 = 100 + 40\sqrt{6}$$
nam $150 = 25.6$; $\sqrt{150} = \sqrt{25}.\sqrt{6} = 5\sqrt{6}$, & $8\sqrt{150} = 40\sqrt{6}$

quocirca

$$AA - BB = 24 = 4.6 \text{ atque } \sqrt{(AA - BB)} = \sqrt{4}.\sqrt{6} = 2\sqrt{6}$$

unde

$$\frac{A + \sqrt{(AA - BB)}}{2} = \frac{10 + 2\sqrt{6} + 2\sqrt{6}}{2} = 5 + 2\sqrt{6}$$

ſed

$$\frac{A - \sqrt{(AA - BB)}}{2} = \frac{10 + 2\sqrt{6} - 2\sqrt{6}}{2} = 5$$

& hinc conficitur alteram quæſitæ radicis partem eſſe $\sqrt{5}$. Reliquæ duæ inveſtigantur quærendo radicem quadratam binomii $5 + 2\sqrt{6}$.

Sit ergo

$A = 5$; $B = 2\sqrt{6}$; erit $AA = 25$; $BB = 24$; $AA - BB = 1$; $1 = \sqrt{(AA - BB)}$

&

$$\frac{A + \sqrt{(AA - BB)}}{2} = \frac{5 + 1}{2} = 3, \text{ atque}$$
$$\frac{A - \sqrt{(AA - BB)}}{2} = \frac{5 - 1}{2} = 2$$

qua de cauſa duæ reſiduæ partes radicis erunt $\sqrt{2}$; & $\sqrt{3}$ atque radix tota

$$(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})\sqrt[3]{2}, \text{ nam } \sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{4}.$$

Sed in polynomiis non raro incideret in perplexas & arduas rationes ſubducendas qui vellet uti hac methodo. Sequens facilior eſt.

(l) 214. Quælibet pars polynomii, quod ſumitur pro quadrato, aut eſt quadratum alicujus partis radicis, aut duplum factum ex una parte radicis in alteram. Facta reductione Ni. 201. omnia quadrata ſimul conficiunt quantitatem integram; quae ſingulæ radicales ſunt duplum factum ex una parte radicis in alteram; & duæ radicales invicem multiplicatæ quadruplum factum eſt quatuor partibus radicis, aut, (ſi eadem pars radicis occurrat in utraque radicali,) quadruplum factum ex quadrato unius partis radicis in duas alias; quod ſi dividas per aliam radicalem quæ ſit hoc ipſum factum ex duabus aliis partibus radicis, quotus erit duplum quadratum alterius partis radicis, & hujus quoti duplum erit quadruplum quadratum, cujus radix eſt dupla pars radicis.

215. Sicui magis placeat rationes ſubducere, en ſuperius ratiocinium calculis explicatum.

Quadratum ipſius $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} + \sqrt{u} + \sqrt{t}$ &c. eſt.

$$x + 2\sqrt{xy} + 2\sqrt{xz} + 2\sqrt{xu} + 2\sqrt{xt} + y + 2\sqrt{yz} + 2\sqrt{yu} + 2\sqrt{yt} + z + 2\sqrt{zu} + 2\sqrt{zt} + u + 2\sqrt{ut} + t \text{ \&c.}$$

ſit $x + y + z + u + t$ &c, $= s$, quadratum ſuperius fiet

$$s + 2\sqrt{xy} + 2\sqrt{xz} + 2\sqrt{xu} + 2\sqrt{xt} + 2\sqrt{yz} + 2\sqrt{yu} + 2\sqrt{yt} + 2\sqrt{zu} + 2\sqrt{zt} + 2\sqrt{ut}$$

duc, exempli gratia $2\sqrt{xy}$ in $2\sqrt{xt}$, habebis $4\sqrt{x^2yt}$; hanc divide per $2\sqrt{yt}$, reſtabit $2\sqrt{x^2}$, cujus duplum eſt $4\sqrt{x^2}$, hujus radix $2\sqrt{x}$, dupla pars radicis quæſitæ.

Ergo partes radicis ſunt 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ ut ſupra (*m*).

LXXXV.

(*m*) 216. Si omnes radicales dividas per $\sqrt{4} = 2$, (quod ſemper fieri poteſt ſi quantitas propoſita eſt quadratum, (N°. 206.) facilior erit uſus hujus regulæ. Sic in exemplo propoſito fit

$$6 + \sqrt{8} - \sqrt{12} - \sqrt{24} = 6 + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{3} - 2\sqrt{5}$$

tum autem ſume pro multiplicatione & diviſione imperata radicales ipſas, omiſſo coefficiente 2, & quotus erit quadratum partis radicis. Itaque

$$\sqrt{2}.\sqrt{3} = \sqrt{6};\ \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = 1;\ \text{pariter}\ \sqrt{2}.\sqrt{6} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3};\ \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 2$$

cujus radix eſt $\sqrt{2}$. Eodem pacto

$$\sqrt{3}.\sqrt{6} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2};\ \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 3,$$

cujus radix eſt $\sqrt{3}$.

Haud aliter facillime reduces polynomium

$$\sqrt{3179} - \sqrt{264} + \sqrt{440} + \sqrt{616} + \sqrt{660} + \sqrt{1540}$$

ſi animadvertas eſſe

$$\sqrt{3179} = 17\sqrt{11};\ \sqrt{264} = \sqrt{24}.\sqrt{11} = 2\sqrt{6}.\sqrt{11};\ \sqrt{440} = \sqrt{40}.\sqrt{11} = 2\sqrt{10}.\sqrt{11}$$

&

$$\sqrt{616} = \sqrt{56}.\sqrt{11} = 2\sqrt{14}.\sqrt{11};\ \sqrt{660} = \sqrt{60}.\sqrt{11} = 2\sqrt{15}.\sqrt{11}$$

atque

$$\sqrt{1540} = \sqrt{140}.\sqrt{11} = 2\sqrt{35}.\sqrt{11}$$

unde polynomium propoſitum fit

$$(17 + 2\sqrt{6} + 2\sqrt{10} + 2\sqrt{14} + 2\sqrt{15} + 2\sqrt{35})\sqrt{11}$$

Eſt autem

$$\sqrt{6}.\sqrt{10} = \sqrt{60} = 2\sqrt{15};\ \frac{2\sqrt{15}}{\sqrt{15}} = 2,$$

cujus radix eſt $\sqrt{2}$.

Item

$$\sqrt{6}.\sqrt{15} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10};\ \frac{3\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = 3;$$

cujus radix eſt $\sqrt{3}$.

Pariter

$$\sqrt{10}.\sqrt{15} = \sqrt{150} = 5\sqrt{6};\ \frac{5\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = 5,$$

cujus radix eſt $\sqrt{5}$.

Denique

$$\sqrt{14}.\sqrt{35} = \sqrt{490} = 7\sqrt{10};\ \frac{7\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = 7,$$

cujus radix eſt $\sqrt{7}$.

quare tota radix eſt

$$(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7}).\sqrt[4]{11}$$

217. Sed, inventis omnibus partibus radicis præter ultimam, hæc facile invenitur per ſubtractionem. Nam, quantitas integra eſt aggregatum omnium quadratorum. Hinc ergo deme quadrata omnium partium inventarum, reſtabit quadratum partis quæſitæ.

Sic in exemplo propoſito eſt $17 - 2 - 3 - 5 = 7$.

218. ***Si radix eſt polynomia, fieri non poteſt ut in ejus quadrato tot rectangula coeant quot ſunt radicis partes.***

Sit q numerus terminorum ſeu partium in radice. Quadratum continebit $\frac{q}{2}$ rectangula nullam literam communem habentia. Nam duo termini diverſi dant unum rectangulum. Ergo in q rectangulis, aut quivis terminus radicis bis, aut aliquis ſæpius repetitus & ſemper in terminum diverſum ductus invenietur.

Sint ergo $a^{\frac{1}{m}} b^{\frac{1}{n}}$; $a^{\frac{1}{m}} c^{\frac{1}{r}}$ duo rectangula in quibus adeſt idem radicis terminus $a^{\frac{1}{m}}$. Jam $a^{\frac{1}{m}} b^{\frac{1}{n}}$ ad $a^{\frac{1}{m}} c^{\frac{1}{r}}$ ut $b^{\frac{1}{n}}$ ad $c^{\frac{1}{r}}$, ſunt autem commenſurabiles quantitates $a^{\frac{1}{m}}$. $b^{\frac{1}{n}}$, & $a^{\frac{1}{m}} c^{\frac{1}{r}}$ per hypotheſin, ergo & $b^{\frac{1}{n}}$ atque $c^{\frac{1}{r}}$ (Eucl. 10. X.).

Eodem pacto $c^{\frac{1}{r}}$ probabitur commenſurabilis alteri radicis termino, & ſic in infinitum; Ergo omnes termini radicis erunt commenſura-

Digitized by Google

LXXXV. Eſt & regula extrahendi altiores radices ex quantitatibus numeralibus duarum potentia commenſurabilium partium.

Sit quantitas $A \pm B$. *Ejus pars major* A. *Index radicis extrahendæ* c. *Quære minimum numerum* n, *cujus poteſtas* n^c *dividitur per* $AA - BB$ *ſine reſiduo, & ſit quotus* Q. *Computa* $\sqrt[c]{((A+B)\sqrt{Q})}$ *in numeris integris proximis. Si illud* r. *Divide* $A\sqrt{Q}$ *per maximum diviſorem rationalem: Sit quotus* s, *ſitque* $\frac{r+\frac{n}{r}}{2s}$ *in numeris integris proximis* t. *Et erit* $\frac{ts \pm \sqrt{(ttss-n)}}{\sqrt[2c]{Q}}$ *radix quæſita, ſi modo radix extrahi poteſt.*

Ut

rabiles (Eucl. 12. X.) contra hypotheſim.

219. Quot rectangula ſunt in quadrato commenſurabilia, ſive coaleſcunt, tot in radice termini ſunt commenſurabiles, & coeunt.

Si q, numerus terminorum in radice, eſſet impar, ex eo deme unitatem, & $\frac{q-1}{2}$ erit numerus rectangulorum diverſorum; ut patet; quocirca idem radicis terminus ſaltem ter reperitus eſſet in quadrato. Qua hypotheſi ratiocinium noſtrum confirmatur & fortius evadit.

220. *Si radix eſt polynomia, fieri non poteſt ut in quadrato alterum quadratum ſimplex, & tot rectangula, quot ſunt partes radicis, una demta, coeant, niſi hæc rectangula ſint in eadem ratione.*

Quoniam, ſi q eſt numerus terminorum in radice, numerus rectangulorum nullam literam communem habentium eſt in quadrato $\frac{q}{2}$; in $q-1$ rectangulis quivis terminus radicis ſaltem bis repetetur, niſi $\frac{q}{2} = q - 1$, aut $q = 2$; & tunc polynomium recideret in binomium, in quo eſt primum quadratum ad rectangulum ut rectangulum ad alterum quadratum (Eucl. 1. VI. aut 17. VII., vel 11. VIII.) ſed, ex hypotheſi alterum quadratum & rectangulum ſunt commenſurabilia, ergo & rectangulum atque reliquum quadratum (Eucl. 12. X.). Quare totum polynomium coaleſcet,

Sit ergo $q-1$ major quam $\frac{q}{2}$; & rectangula commenſurabilia inter ſe & cum quadrato ipſius $a^{\frac{1}{m}}$, ſint

$$b^{\frac{1}{n}} c^{\frac{1}{r}};\ f^{\frac{1}{t}} g^{\frac{1}{p}};\ c^{\frac{1}{r}} f^{\frac{1}{t}};\ b^{\frac{1}{n}} g^{\frac{1}{p}};\ \&c.$$

quæ non habent eandem rationem. Jam eſt

$$b^{\frac{1}{n}} c^{\frac{1}{r}} \text{ ad } c^{\frac{1}{r}} f^{\frac{1}{t}} \text{ ut } b^{\frac{1}{n}} \text{ ad } f^{\frac{1}{t}}$$
$$b^{\frac{1}{n}} c^{\frac{1}{r}} \text{ ad } b^{\frac{1}{n}} g^{\frac{1}{p}} \text{ ut } c^{\frac{1}{r}} \text{ ad } g^{\frac{1}{p}}$$
$$f^{\frac{1}{t}} g^{\frac{1}{p}} \text{ ad } c^{\frac{1}{r}} f^{\frac{1}{t}} \text{ ut } g^{\frac{1}{p}} \text{ ad } f^{\frac{1}{t}}$$

Et rectangula ſunt commenſurabilia per hypotheſim; commenſurabiles ergo ſunt quantitates $b^{\frac{1}{n}};\ c^{\frac{1}{r}};\ f^{\frac{1}{t}};\ g^{\frac{1}{t}};$ &c.; id eſt omnes termini radicis, ſaltem præter $a^{\frac{1}{m}}$, erunt commenſurabiles, & radix fiet binomia, contra hypotheſim.

Nunc rectangula commenſurabilia ſint in eadem ratione, puta,

$$b^{\frac{1}{n}} c^{\frac{1}{r}};\ b^{\frac{1}{n}} g^{\frac{1}{p}};\ f^{\frac{1}{t}} c^{\frac{1}{r}};\ f^{\frac{1}{t}} g^{\frac{1}{p}};\ \&c.$$

Probabitur, ut ſupra, eſſe $c^{\frac{1}{r}}$ & $g^{\frac{1}{p}}$; $b^{\frac{1}{n}}$ & $f^{\frac{1}{t}}$ commenſurabiles binæ inter ſe, ſed non omnes. Unde conficietur radicem quidem habere minorem terminorum numerum, quam ſupponebatur, ſed non eſſe binomiam.

Ut ſi radix cubica extrahenda ſit ex $\sqrt{968} + 25$; erit $AA - BB = 343$; (*n*) ejus diviſores 7, 7, 7, ergo $n = 7$ & $Q = 1$. Porro $(A + B)\sqrt{Q}$, ſeu $\sqrt{968} + 25$, extracta prioris partis radice, fit paulo major quam 56; ejus radix cubica in numeris proximis eſt 4 (*o*). Ergo $r = 4$. Inſuper $A\sqrt{Q}$ ſeu $\sqrt{968}$ extrahendo quicquid rationale eſt fit $22\sqrt{2}$ (*p*). Ergo $\sqrt{2}$, ejus pars radicalis, eſt s, & $\dfrac{r + \frac{n}{r}}{2s}$ ſeu $\dfrac{5\frac{3}{4}}{2\sqrt{2}}$ in numeris integris proximis eſt 2 (*q*). Ergo $t = 2$. Denique ts eſt $2\sqrt{2}$, $\sqrt{ttss - n}$ eſt 1 & $\sqrt[2c]{Q}$ ſeu $\sqrt[6]{1}$ eſt 1. Ergo $2\sqrt{2} + 1$ eſt radix quæſita ſi modo radix extrahi queat. Tento itaque per multiplicationem ſi cubus ipſius $2\sqrt{2} + 1$ ſit $\sqrt{968} + 25$ & res ſuccedit.

Rurſus ſi radix cubica extrahenda ſit ex $68 - \sqrt{4374}$; erit $AA - BB = 250$ (*r*). Cujus diviſores ſunt 5, 5, 5, 2. Ergo $n = 5 \cdot 2 = 10$, & $Q = 4$ (*s*). Et $\sqrt[c]{((A + B)\sqrt{Q}}$ ſeu $\sqrt[3]{((68 + \sqrt{4374})\,2}$ in numeris proximis integris eſt $7 = r$. Inſuper $A\sqrt{Q}$ ſeu $68\sqrt{4}$ extrahendo quicquid rationale eſt fit $136\sqrt{1}$. Ergo $s = 1$, & $\dfrac{r + \frac{n}{r}}{2s}$ ſeu $\dfrac{7 + \frac{10}{7}}{2}$ in numeris integis proximis eſt $4 = t$ (*t*): Ergo $ts = 4$, $\sqrt{(ttss - n)} = \sqrt{6}$ & $\sqrt[2c]{Q} = \sqrt[6]{4}$ ſeu

(*n*) Pone $A = \sqrt{968}$, & $B = 25$; & erit $AA = 968$, $BB = 625$, unde $AA - BB = 968 - 625 = 343$.

(*o*) Siquidem quadratum proximum ipſi 968 eſt 961, cujus radix eſt 31; & $31 + 25 = 56$. cui proximus cubus eſt 64, hujusque radix $= 4 = r$.

(*p*) Nam $\sqrt{968} = \sqrt{484} \cdot \sqrt{2}$, & $\sqrt{484} = 22$.

(*q*) Eſt enim $r + \frac{n}{r} = 4 + \frac{7}{4} = 5\frac{3}{4}$. $= \sqrt{5\frac{3}{4}} \cdot \sqrt{5\frac{3}{4}} = \sqrt{(25 + \frac{30}{4} + \frac{9}{16})} = \sqrt{33\frac{1}{16}}$; quæ diviſa per $2s = 2\sqrt{2} = \sqrt{8}$ dat $\sqrt{4\frac{17}{128}}$; negligo $\frac{17}{128}$; quia quæritur numerus integer, reſtat $\sqrt{4} = 2 = t$.

(*r*) Fac $A = 68$; $B = \sqrt{4374}$; ergo $AA = 4624$; $BB = 4374$.

(*s*) Nempe quia $n^3 = 1000$, & $\dfrac{n^3}{A^2 - B^2} = \dfrac{1000}{250} = 4$.

(*t*) Quadratum proximum ipſi 4374 eſt 4356, cujus radix $= 66$, & $(68 + 66)\,2 = 268$; cui proximi cubi ſunt 343, aut 216, illius radix $= 7$; hujus $= 6$; alterutram ſume; ſi primam, erit $r = 7$, & $\dfrac{r + \frac{n}{r}}{2s} = \dfrac{7 + \frac{10}{7}}{2} = \frac{59}{14} = 4 = t$; ſi ſecundam erit $r = 6$, & $\dfrac{r + \frac{n}{r}}{2s} = \dfrac{6 + \frac{10}{6}}{2} = \frac{23}{6} = 4 = t$; nimis enim a vero aberrabis ſi pro $\frac{23}{6}$ ponas 3.

ſeu $\sqrt[3]{2}$ atque adeo radix tendanda $\frac{4 - \sqrt{6}.}{\sqrt[3]{2}}$.

Iterum ſi radix quadrato-cubica extrahenda ſit ex $29\sqrt{6} + 41\sqrt{3}$; erit $AA - BB = 3$, adeoque $n = 3$, $Q = 81$, $r = 5$, $s = \sqrt{6}$, $t = 1$, $ts = \sqrt{6}$, $\sqrt{(ttss - n)} = \sqrt{3}$ & $\sqrt[20]{Q} = \sqrt[10]{81}$ ſeu $\sqrt[5]{9}$ (*u*) atque adeo radix tendanda $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{3}}{\sqrt[5]{9}}$ (*x*).

LXXXVI.

(*u*) Sit $A = 29\sqrt{6}$; $B = 41\sqrt{3}$; $AA = 5046$; $BB = 5043$; $AA - BB = 3 = n$; $\frac{n^5}{AA - BB} = \frac{243}{3} = 81 = Q$; $\sqrt{Q} = 9 : (A + B)\sqrt{Q} = 261\sqrt{6} + 369\sqrt{3} = \sqrt{408726} + \sqrt{408483} = 639 + 639$ (ſcilicet in numeris integris promis,) quare $\sqrt[5]{(A + B)\sqrt{Q}} = \sqrt[5]{1278}$; proximiores poteſtates quintæ ſunt 3125; & 1024 illius radix $= 5$ hujus $= 4$; ſumpta prima habes $\frac{r + \frac{n}{r}}{2s} = \frac{5 + \frac{3}{5}}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{(31 + \frac{9}{25})}}{\sqrt{24}} = 1 = t$ in numeris integris; ſumpta ſecunda reperies $\frac{r + \frac{n}{r}}{2s} = \frac{4 + \frac{3}{4}}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{(22 + \frac{9}{16})}}{\sqrt{24}} = 1$. (in numeris integris).

(*x*) 221. *In geometrica propertione continua deſcendente* a. b :: b. c, *dico quod* a — b *differentia inter primum, & ſecundum terminum ſuperat* $\frac{a - c}{2}$ *ſemiſſem differentia inter primum, & tertium*

Nam $a + c$ ſuperat $2b$. (Eucl. 25. V.); ergo a ſuperat $2b - c$, & $a - 2b$ ſuperat $- c$, & addita utrinque a, $2a - 2b$ ſuperat $a - c$, ac dividendo per 2, $a - b$ ſuperat $\frac{a - c}{2}$

222. *Si dua continua proportiones geometrica* a. b :: b. c, *&* f. b :: b, g, *habuerint eandem mediam* b, *& ſit* a *major quam* f, *erit vice verſa* g *major quam* c.

Siquidem $ac = bb = gf$, ergo $a. g :: f. c$ (Eucl. 16. VI,), ſed per hypotheſin a major quam f, ergo g major quam c (Eucl. 16. V.)

223. *Si duæ geometricæ proportiones continuæ decreſcentes* a. b :: b. c, *&* f. b :: b. g, *habeant communem mediam* b, *dico* (a — f) *differentiam inter primos terminos majorem eſſe* (c — g) *differentia inter ultimos.*

Eſt enim $a. g :: f. c$ (N°. 222. huius) ergo $a - f. g - c :: f. c$ (Eucl. 19. V.) ſed quia proportiones decreſcunt f major quam b, & b major quam c; ergo &c.

224. *Si* $\sqrt[m]{p}$ *ſit quantitas ſurda, & ſumatur in integris numeris poteſtas perfecta* a^m, *illi proxima, ita ut* $p = a^m \pm b$, *dico* a *differre a vera radice* $\sqrt[m]{(a^m + b)}$ *& quidem quantitate poſitiva, ſed differentiam unitate minorem eſſe.*

Sit x quævis quantitas, ita ut $(a \pm x)^m = a^m \pm b$, oſtendendum eſt eſſe x minorem unitate.

Jam a^m minor quam $a^m + b$, at $a^m + b$ ponitur $= (a + x)^m$, ergo a^m minor quam $(a + x)^m$ & a minor quam $a + x$: Item $a^m - b$ minor quam a^m, ſed $a^m - b = (a - x)^m$, igitur a major quam $a - x$; quare ſemper x major quam $a - a$, id eſt nihilo, adeoque x eſt quantitas poſitiva.

Rurſus $a^m \pm b$ minor quam $(a \pm 1)^m$, ſecus enim a^m non eſſet poteſtas in numeris integris omnium proxima ipſi $a^m \pm b$, ac ob eandem rationem $a^m \pm b$ major quam $(a - 1)^m$, ergo $\sqrt[m]{(a^m \pm b)}$, aut $a \pm x$ minor quam $a + 1$, & major quam $a - 1$, igitur $a + 1$ minus

Digitized by Google

LXXXVI. Ceterum in hujuſmodi operationibus ſi quantitas fractio ſit, vel partes ejus communem habeant diviſorem; radices denominatoris & facto-

minus differt ab $a \pm x$, quam ab $a - 1$, id eſt $a + 1 - a \mp x$ minor quam $a + 1 - a + 1$, aut $1 \mp x$ minor quam 2, aut $\mp x$ minor quam $2 - 1$, id eſt, unitate.

225. *Si duæ geometricæ proportiones continuæ* $\sqrt[m]{(a^m + b)} . c :: c . f$, *&* $a . c :: c . g$, *habeant mediam communem* c, *& ſit* $\sqrt[m]{(a^m + b)} - c$ *major unitate; a vero ſit radix proxima ipſi* $\sqrt[m]{(a^m + b)}$, *in numeris integris, dico quod* a *eſt major quam* c.

Eſt ex hyp. $\sqrt[m]{(a^m + b)} - c$, major unitate; ergo $\sqrt[m]{(a^m + b)} - 1$ major quam c, ſed $\sqrt[m]{(a^m + b)} - a$ eſt minor unitate, aut a eſt major quam $\sqrt[m]{(a^m + b)} - 1$, ergo fortius a major eſt quam c.

226. *Si ad poteſtatem* c, *elevetur binomium* $a + b$, *& hujus poteſtatis*

$$a^c + ca^{c-1}b + \frac{c.c-1}{2} a^{c-2}b^2 + \frac{c.c-1.c-2}{2.3.} a^{c-3} b^3 + \frac{c.c-1.c-2.c-3}{2.3.4} a^{c-4} b^4 \text{ \&c.}$$

termini

$$a^c + \frac{c.c-1}{2} a^{c-2}b^2 + \frac{c.c-1.c-2.c-3}{2.3.4} a^{c-4}b^4, \text{ \&}$$

$$ca^{c-1}b + \frac{c.c-1.c-2}{2.3} a^{c-3} b^3 \text{ \&c.}$$

alternatim ſumantur, dico quod

$$\left(a^c + \frac{c.c-1}{2} a^{c-2} b^2 \text{ \&c.}\right)^2 - \left(ca^{c-1}b + \frac{c.c-1.c-2}{2.3} a^{c-3}b^3 \text{ \&c.}\right)^2$$

differentia nempe quadratorum partium

$$= (aa - bb)^c.$$

Pone $a^c + \frac{c.c-1}{2} a^{c-2}b^2$ &c. $= f$,

& $ca^{c-1}b + \frac{c.c-1.c-2}{2.3} a^{c-3}b^3$ &c. $= g$

erit tota poteſtas

$$a^c + ca^{c-1}b + \frac{c.c-1}{2} a^{c-2} b^2 \text{ \&c.} = (a+b)^c = f + g,$$

& partium differentia

$$a^c - ca^{c-1}b + \frac{c.c-1}{2} a^{c-2}b^2 - \frac{c.c-1.c-2}{2.3} a^{c-3}b^3 \text{ \&c.}$$

$$= (a-b)^c = f - g$$

ſed &

$$\left(a^c + \frac{c.c-1}{2} a^{c-2}b^2\right)^2 \text{ \&c.} = ff, \text{ atque}$$

$$\left(ca^{c-1}b + \frac{c.c-1.c-2}{2.3.} a^{c-3}b^3\right)^2 \text{ \&c.} = gg,$$

quapropter

$$\left(a^c + \frac{c.c-1}{2} a^{c-2}bb\right)^2 - \left(ca^{c-1}b - \frac{c.c-1.c-2}{2.3} a^{c-3}b^3\right)^2 = ff - gg$$

& eſt

$$ff - gg = (f+g).(f-g) = (a+b)^c.(a-b)^c = (aa-bb)^c.$$ (EUCL. 5. II.).

227. *In numeris, ſi* a *ſuperat* b, *&* c *ſit nu-*

me-

ſtorum ſeorſim extrahe. Ut ſi ex $\sqrt{242} - 12\frac{1}{2}$ radix cubica extrahenda ſit; hoc, reductis partibus ad communem denominatorem, fiet $\frac{\sqrt{968} - 25}{2}$.

Dein

merus impar, erit $(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})^{c}$ *binomium, cujus membrum majus ductum eſt in* $\sqrt{a}$, *& minus in* $\sqrt{b}$.

Cum c ſit impar, erit $c - 1$ par. Ponatur $c - 1 = 2n$. Erit

$$c = 2n + 1;\ c - 2 = 2n - 1;$$
$$c - 3 = 2n - 2;\ c - 4 = 2n - 3;$$
$$c - 5 = 2n - 4 \text{ \&c.}$$

Jam, $(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})^{c}$, neglectis ſignis & coefficientibus, (de quibus hic non agitur) fit

$$\sqrt{a^{c}};\ \sqrt{a^{c-1}}.\sqrt{b};\ \sqrt{a^{c-2}}.b;$$
$$\sqrt{a^{c-3}}.b\sqrt{b};\ \sqrt{a^{c-4}}.bb;$$
$$\sqrt{a^{c-5}}.bb\sqrt{b} \text{ \&c.}$$

aut, poſitis pro c; $c-1$; $c-2$; &c. valoribus ſupra determinatis,

$$\sqrt{a^{2n+1}};\ \sqrt{a^{2n}}.\sqrt{b};\ \sqrt{a^{2n-1}}.b;$$
$$\sqrt{a^{2n-2}}.b\sqrt{b};\ \sqrt{a^{2n-3}}.bb;$$
$$\sqrt{a^{2n-4}}.bb\sqrt{b} \text{ \&c.}$$

eſt autem

$$\sqrt{a^{2n+1}} = a^{n}\sqrt{a};\ \sqrt{a^{2n}} = a^{n};$$
$$\sqrt{a^{2n-1}} = \frac{a^{n}}{\sqrt{a}}.$$
$$= \frac{a^{n-1}.\sqrt{a}.\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = a^{n-1}\sqrt{a};$$
$$\sqrt{a^{2n-2}} = a^{n-1} \text{ \&c.}$$

Igitur termini ſuperiores mutabuntur in

$$a^{n}\sqrt{a};\ a^{n}\sqrt{b};\ a^{n-1}b\sqrt{a};\ a^{n-1}b\sqrt{b};$$
$$a^{n-2}bb\sqrt{a};\ a^{n-2}bb\sqrt{b} \text{ \&c.}$$

quare termini alternatim ducti ſunt in $\sqrt{a}$; & $\sqrt{b}$; ſi ergo alternatim excerpantur, habebitur numerus rationalis ductus in $\sqrt{a}$ unum terminum efficiens, ut alter pariter rationalis ductus in $\sqrt{b}$.

Item bini termini proximi habent $a^{n}\sqrt{a}$, $a^{n}\sqrt{b}$ &c., ſcilicet habent eandem quantitatem rationalem, tantum ergo irrationali differunt; ſed $\sqrt{a}$ major eſt $\sqrt{b}$, ergo $a^{n}\sqrt{a}$ major eſt $a^{n}\sqrt{b}$, & ſic de ceteris.

228. Si pro $\sqrt{a}$, aut $\sqrt{b}$, habeatur quantitas rationalis f, membrum quod nunc eſt ductum in $\sqrt{a}$, aut $\sqrt{b}$, erit rationale, eritque rationale membrum poteſtatis altero majus, ſi rationalis terminus radicis alterum ſuperet.

229. *Iiſdem poſitis, ſi numerus* c *fuerit par, poteſtas orio binomium, cujus membrum unum rationale, alterum erit ductum in* $\sqrt{ab}$.

Nam tunc $c = 2m$, & $a^{\frac{c}{2}} = a^{m}$;

$$a^{\frac{c-1}{2}}\sqrt{b} = a^{m-\frac{1}{2}}\sqrt{b} = a^{m-1}\sqrt{a}.\sqrt{b}$$
$$= a^{m-1}\sqrt{ab},\ a^{c-2}b = a^{m-1}b,$$
$$a^{\frac{c-3}{2}}b\sqrt{b} = a^{m-1}b\sqrt{ab} \text{ \&c.}$$

230. Si pro $\sqrt{a}$, aut $\sqrt{b}$ ſcribatur quantitas rationalis f, irrationale binomii membrum ducetur tantum in quantitate irrationali, quæ ſupereſt.

231. Tunc ergo $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^{c}$ $= (\sqrt{a} + \sqrt{b})^{2m}$, ſed $\sqrt{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^{2m}}$ $= (\sqrt{a} + \sqrt{b})^{m}$ (N°. 159. hujus). Tunc igitur poteſt extrahi radix quadrata ex binomio propoſito.

232. Poteſtas continens radices quadratas habet radicem compoſitam pariter ex radicibus quadratis.

233. *Non poteſt ex binomio radix* c *extrahi, niſi differentia quadratorum partium habeat radicem* c *rationalem.*

Radix, ſi poteſt exprimi, continet ſolum radices quadratas, ſit ergo hæc $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, ita ut binomium datum æquet $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^{c}$, differentia quadratorum partium eſt $(a - b)^{c}$ (N°. 226. hujus) cujus radix c eſt $a - b$.

Dein extracta ſeorſim numeratoris ac denominatoris radice cubica orietur $\frac{2\sqrt{2}-1}{\sqrt[3]{2}}$. Rurſus ſi ex $\sqrt[3]{3993}+\sqrt[6]{17578125}$ radix aliqua extrahenda ſit;

234. *Non poteſt ex binomio* $A+B$ *radix* c *extrahi, cum* c *eſt par, &* $=2m$, *niſi rationale binomii membrum* A, *ſit altero majus.*

Ponamus $A+B=(\sqrt{a}+\sqrt{b})^c$ $=(\sqrt{a}+\sqrt{b})^{2m}$, ergo $\sqrt{(A+B)}$ $=(\sqrt{a}+\sqrt{b})^m$. Facio $=(\sqrt{a}+\sqrt{b})^m=$ $f\sqrt{a}+g\sqrt{b}$; igitur quadrando $A+B$, $=ffa+2fg\sqrt{ab}+ggb$, quare $A=ffa+ggb$, & $B=2fg\sqrt{ab}$, ſed $ffa.\ fg\sqrt{ab}::fg\sqrt{ab},\ ggb$ (EUCL. 11. VIII.) & $ffa+ggb$ ſuperat $2fg\sqrt{ab}$, ergo A ſuperat B.

His poſitis ſic demonſtratur Auctoris regula

235. Binomium datum eſt $A\pm B$; n detegitur, & Q determinatur, ita ut $AAQ-BBQ$ $=n^c$.

Non binomii dati, ſed hujus $A\sqrt{Q}\pm B\sqrt{Q}$, radicem quærit Auctor, & ubi hanc detectam habet, ipſam dividit per $\sqrt[c]{}$ ipſius $\sqrt{Q}$, id eſt, per $\sqrt[2c]{Q}$, ut habeat radicem binomii dati $A\pm B$.

Præparatione hac binomium acquirit conditiones, ſine quibus ipſius radix exprimi non poſſet, (N°. 233. hujus); eſt nunc n^c differentia quadratorum membrorum $A\sqrt{Q}$, & $B\sqrt{Q}$, ex qua ſi $\sqrt[c]{}$ extrahatur, habemus rationalem numerum n.

Ponamus $x\sqrt{y}\pm\sqrt{z}$ exprimere radicem quæſitam binomii $A\sqrt{Q}\pm B\sqrt{Q}$, & $x\sqrt{y}$, eſſe partem majorem. Cum nunc de de fractionibus non agatur, de quibus Auctor ſeparatim tractat, erunt x, y, z, numeri integri, nam cum in poteſtate propoſita non dentur fractiones, neque in radice dantur.

Differentia quadratorum membrorum binomii $x\sqrt{y}\pm\sqrt{z}$ elevati ad poteſtatem c, id eſt differentia quadratorum $A\sqrt{Q}$, & $B\sqrt{Q}$, eſt $(xxy-z)^c$ (N°. 226. hujus) ergo $(xxy-z)^c$ $=AAQ-BBQ=n^c$, & $xxy-z=n$.

Ex hac æquatione deducimus decreſcentem proportionem $x\sqrt{y}+\sqrt{z}.\ \sqrt{n}::\sqrt{n}.\ x\sqrt{y}-\sqrt{z}$.

Sed $r.\ \sqrt{n}::\sqrt{n}.\ \frac{n}{r}$; & r ſuperat $\sqrt{n}$ (N°. 234. hujus) ergo $\sqrt{n}$ ſuperat $\frac{n}{r}$, & $\frac{n}{r}$ ſuperat $x\sqrt{y}-\sqrt{z}$, aut o ſuperat $x\sqrt{y}-\sqrt{z}$ $-\frac{n}{r}$, ſi $x\sqrt{y}+\sqrt{z}$ ſuperat r, aut vice verſa (N°. 222. hujus) & $x\sqrt{y}+\sqrt{z}-r$ minor 1, (N°. 223. hujus) & $x\sqrt{y}-\sqrt{z}$ $-\frac{n}{r}$ minor o, ergo $2x\sqrt{y}-r-\frac{n}{r}$, (differentia inter $2x\sqrt{y}$, & $r+\frac{n}{r}$, multo minor unitate, quare $x\sqrt{y}-\frac{r-\frac{n}{r}}{2}$ minor $\frac{1}{2}$.

His poſitis quatuor caſus examinandi ſunt, nam $A\sqrt{Q}$, eſt aut rationalis, aut ſurda, & in utroque caſu, c eſt par, aut impar.

I. Rationalis eſt quantitas $A\sqrt{Q}$, & c impar.

In hoc caſu $x\sqrt{y}$ pars major radicis eſt rationalis, (N°. 228. hujus); eſt ergo numerus integer; non enim hic, ut jam monuimus, agitur de fractionibus, idcirco $\frac{r+\frac{n}{r}}{2}$ eſt ipſum membrum maximum radicis; nam numeri integri ad minimum unitate differunt, & quantitas hæc non $\frac{1}{2}$ differt a membro maximo.

Tunc etiam $s=1$, & ideo $\frac{r+\frac{n}{r}}{2}$ $=\frac{r+\frac{n}{r}}{2s}=s=ss$, & membrum maximum bene per regulam Auctoris determinatum eſt.

II. Irrationalis eſt quantitatis $A\sqrt{Q}$, & numerus c impar.

Eſt nunc $x\sqrt{y}$ numerus ſurdus, & quantitas $A\sqrt{Q}$ ad minimos terminos reducta eandem radicalem habet cum $x\sqrt{y}$ (N°. 227. hujus) radicalem hanc Auctor quærit, & vocat s, ergo $s=\sqrt{y}$.

Vi-

ſit; divide partes per communem diviſorem $\sqrt[3]{3}$; & emerget $11+\sqrt{125}$

Vidimus $\frac{r+\frac{n}{r}}{2}$ ab $x\sqrt{y}$ non differre $\frac{1}{2}$, minus differunt ſi per s, aut $\sqrt{y}$ dividantur, quia quantitas hæc ſuperat unitatem. Idcirco $\frac{r+\frac{n}{r}}{2s}$, & x, minus differunt $\frac{1}{2}$, & ideo x eſt numerus integer proximus ipſi $\frac{r+\frac{n}{r}}{2s}$, id eſt $t = x$.

Sed jam habuimus $s = \sqrt{y}$, ergo $ts = x\sqrt{y}$, & bene radicis membrum fuit determinatum.

III. Rationalis eſt quantitas $B\sqrt{Q}$, & c numerus par.

In hoc caſu, non ut *caſu* 1., conſtat $x\sqrt{y}$ eſſe rationale (N°. 229. hujus): ideo caſus hic tertius in duos ſubdividitur.

Quando $x\sqrt{y}$ eſt rationale, demonſtratio caſus primi locum habet, & detegitur pars major radicis.

Si vero $x\sqrt{y}$ ſit ſurda quantitas, methodus ad veram radicem non conducit, nam propter rationalem $A\sqrt{Q}$, ſemper $s = 1$, & non $\sqrt{y}$, quod deſideratur ut in *caſu* 2. demonſtravimus.

IV. Irrationalis eſt quantitas $A\sqrt{Q}$, & c numerus par.

Ex hac quantitate radix quæſita non poteſt extrahi (N°. 234. hujus) & inutile foret Auctoris regulam, aut aliam quamcunque, tali quantitati applicare.

Dato nunc $x\sqrt{y}$ maximo membro radicis æquale ts, demonſtramus $\sqrt{z} = \sqrt{(ttss - n)}$, id eſt $z = ttss - n$.

Habemns

$$x\sqrt{y} = ts \text{ \& } xxy = tts$$

ſed, ut ſuperius vidimus, $xxy - z = n$.

Ergo ſubtrahendo æquationem ultimam ex præcedenti.

$$xxy - xxy + z = z = ttss - n.$$

Quod demonſtraudum erat.

Eodem ſigno radicis membra jungenda eſſe, quo membra quantitatis propoſitæ junguntur, clarum eſt.

Radicem detectam tentandam eſſe dicit auctor, quia demonſtratio ponit, radicem poſſe exprimi per $x\sqrt{y} \pm \sqrt{z}$, & ideo locum tantum habet quando radix extrahi poteſt; ſed minime ex demonſtratione ſequitur ſemper poſſe.

Ex demonſtratis ſequentia deducimus corollaria, quibus methodus auctoris illuſtratur.

236. Quando c eſt numerus impar, ſemper methodus Auctoris conducit ad veram radicem, quando hæc extrahi poteſt.

237. Quando c eſt par, & radix extrahi poteſt, detegitur hæc ſi alterutrum membrorum radicis fuerit rationale.

Conſtat hoc eſt demonſtratis, ſi rationale fuerit membrum majus radicis (N°. 234. hujus); ſed ſi membrum hoc irrationale fuerit, detegitur radix ſi $B\sqrt{Q}$ adhibeatur in detegendo s, non $A\sqrt{Q}$, ut hoc patet hiſce caſibus applicando demonſtrata, conſtat enim in hoc caſu etiam eſſe $s = \sqrt{y}$ (N°. 230. hujus).

Unde deducimus, cum ante initam operationem non poſſimus prævidere utrum membrum radicis rationale ſit majus an minus, ſi radix per methodum Auctoris detecta, quæ ſemper habebit majus membrum rationale, non ſit vera, aliam quærendam eſſe, in qua majus membrum ſit irrationale.

238. Si nulla ex ambabus radicibus in corollario præcedenti memoratis vera ſit, neque inde poterimus concludere radicem extrahi non poſſe.

Si enim membra ambo radicis fuerint irrationalia $x\sqrt{y}$, & $\sqrt{z}$, erit tamen $A\sqrt{Q}$ rationale (N°. 234. hujus), & $s = 1$ (Caſ. I. hujus), per methodum Auctoris. Si juxta obſervata in corollario præcedenti, in ſubſidium vocemus $B\sqrt{Q}$ erit $s = \sqrt{yz}$, (N°. 229. hujus) & non inficias ire poſſumus in hoc caſu fallere Auctoris methodum, qui defectus tamen uſum ipſius methodi non minuit, ſi, ut in ſua methodo præſcribit VAN SCHOOTEN, extractione radicis qnadratæ, per methodum notiſſimam, problema reducamus ad extractionem radicis, cujus index eſt numerus impar.

239. Quando index radicis eſt numerus par, & majus membrum binomii propoſiti eſt irrationale, non poteſt radix exprimi, & non quærenda eſt, ut jam monuimus (Caſ. IV. hujus).

Hac

(*y*). Unde quantitas propoſita valet $\sqrt[3]{3}$ in $(11+\sqrt{125})$ cujus radix invenietur extrahendo ſeorſim radicem factoris utriusque $\sqrt[3]{3}$ & $11+\sqrt{125}$.

Hæc demonſtratio eſt Clariſſimi s'GRAVESANDE, *quam pauliſper mutavimus propter principia a nobis jam poſita.*

(*y*) Nam $\frac{\sqrt[3]{3993}}{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[3]{1331} = 11$; & $\sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{9}$, atque $\frac{\sqrt[6]{17578125}}{\sqrt[6]{9}} = \sqrt[6]{1953125} = \sqrt{125}$.

SECTIO SECUNDA.

CAPUT PRIMUM.

DE FORMA ÆQUATIONIS.

I. ÆQuationes, quæ ſunt quantitatum aut ſibi mutuo æqualium, aut ſimul nihilo æquipollentium, congeries, duobus præcipue modis conſiderandæ veniunt; vel ut ultimæ concluſiones ad quas in problematis ſolvendis deventum eſt, vel ut media quorum ope finales æquationes acquirendæ ſunt.

Prioris generis æquatio ex unica tantum incognita quantitate cognitis involuta conflatur, modo problema ſit definitum & aliquid certi quærendum innuat.

Sed eæ poſterioris generis involvunt plures quantitates incognitas, quæ ideo debent inter ſe comparari & ita connecti ut ex omnibus una tandem emergat æquatio nova cui ineſt unica, quam quærimus, incognita quantitas admiſta cognitis. Quæ quantitas ut exinde facilius eliciatur, æquatio iſta variis plerumque modis transformanda eſt, donec evadat ea ſimpliciſſima quæ poteſt, atque etiam ſimilis alicui ex ſequentibus earum gradibus, in quibus x deſignat quantitatem quæſitam ad cujus dimenſiones termini, ut vides, ordinantur, & p, q, r, s alias quaſcunque quantitates ex quibus determinatis & cognitis etiam x determinatur, & per methodos explicandas inveſtigari poteſt.

$$x = p.$$
$$xx = px + q.$$
$$x^3 = pxx + qx + r.$$
$$x^4 = px^3 + qxx + rx + s.$$
&c.

$$x - p = 0.$$
Vel $$xx - px - q = 0.$$
$$x^3 - pxx - qx - r = 0.$$
$$x^4 - px^3 - qxx - rx - s = 0.$$
&c.

II. Ad horum normam itaque termini æquationum ſecundum dimenſiones

nes incognitæ quantitatis in ordinem ſemper redigendi ſunt, ita ut primum locum occupent in quibus incognita quantitas eſt plurimarum dimenſionum, inſtar, x, xx, x^3, x^4, & ſecundum locum in quibus ea eſt una dimenſione minor, inſtar p, px, pxx, px^3, & ſic præterea. Et, quod ſigna terminorum attinet, poſſunt ea omnibus modis ſe habere: Imo & unus vel plures ex intermediis terminis aliquando deeſſe.

Sic $x^3 * - bbx + b^3 = 0$ vel $x^3 = bbx - b^3$, eſt æquatio tertii gradus

$$Z^4 \begin{matrix} +a \\ -b \end{matrix} Z^3 * \begin{matrix} +ab^3 \\ -b^4 \end{matrix} = 0,$$ æquatio quarti.

Nam gradus æquationum æſtimantur ex maxima dimenſione quantitatis incognitæ, nullo reſpectu ad quantitates cognitas habito, nec ad intermedios terminos.

Attamen ex defectu intermediorum terminorum æquatio plerumque fit multo ſimplicior, & nonnunquam ad gradum inferiorem quodammodo deprimitur. Sic enim $x^4 = qxx + s$, æquatio ſecundi gradus cenſenda eſt, ſiquidem ea in duas ſecundi gradus æquationes reſolvi poteſt. Nam ſuppoſito $xx = y$, & y pro xx in æquatione illa perinde ſcripto, ejus vice prodibit $yy = qy + s$, æquatio ſecundi gradus; cujus ope cum y inventa fuerit, æquatio $xx = y$ ſecundi etiam gradus, dabit x. (*a*)

Atque hæ ſunt concluſiones ad quas problemata deduci debent. Sed antequam eorum reſolutionem aggrediar, opus erit ut modos transformandi & in ordinem redigendi æquationes, & ex mediis eliciendi finales æquationes abſtracte doceam. Æquationis autem ſolitariæ reductionem in ſequentibus regulis complectar.

CAPUT SECUNDUM.

De concinnanda Æquatione ſolitaria.

REGULA I.

III. *Siquæ ſunt quantitates quæ ſe mutuo deſtruere, vel per additionem aut ſubductionem coaleſcere poſſunt, termini perinde minuendi ſunt.*

Veluti ſi habeatur $5b - 3a + 2x = 5a + 3x$, aufer utrinque $2x$ & adde

(*a*) 1. Hoc totum Caput continet duas definitiones; prima explicat quid intelligatur nomine *æquationis*, ſecunda quid innuatur per *gradus* æquationum. Præterea hic ſupponitur, quod jam habentur æquationes effictæ, quæ ſolum in alias ſimpliciores ſunt convertendæ. Nemo igitur ſollicitus ſit de ratione inveniendarum æquationum; aut diſtinguendi quando eæ ſint *ultima concluſiones*, aut *media*, quorum ope finales æquationes acquiruntur, neque de aliis ſimilibns, quæ omnia ſuis locis explicata reperientur.

de $3a$, proditque $5b = 8a + x$. Atque ita $\frac{2ab + bx}{a} - b = a + b$, delendo æquipollentes $\frac{2ab}{a} - b = b$, evadit $\frac{bx}{a} = a$ (*a*).

Ad hanc regulam referri debet etiam ordinatio terminorum æquationis, quæ fieri ſolet per tranſlationem ad contrarias partes cum ſigno contrario.

Ut ſi habita æquatione $5b = 8a + x$ deſideretur x; aufer utrinque $8a$, vel, quod eodem recidit, transfer $8a$ ad contrarias partes cum ſigno mutato, & prodibit $5b - 8a = x$ (*b*).

Eodem modo ſi habeatur $aa - 3ay = ab - bb + by$ ac deſideretur y, tranſpone $-3ay$ & $ab - bb$, eo ut ex una parte conſiſtant termini multiplicati per y, & ex altera reliqui termini, & prodibit $aa - ab + bb = 3ay + by$, unde y elicietur per regulam quintam ſequentem, dividendo ſcilicet utramque partem per $3a + b$, prodibit enim $\frac{aa - ab + bb}{3a + b} = y$.

Atque ita æquatio $abx + a^3 - aax = abb - 2abx - x^3$ per debitam tranſpoſitionem & ordinationem evadit

$$x^3 = \begin{matrix}+aa\\-3ab\end{matrix}\,x\,\begin{matrix}-a^3\\+abb\end{matrix} \text{ vel } x^3\,\begin{matrix}-aa\\+3ab\end{matrix}\,x\,\begin{matrix}+a^3\\-abb\end{matrix} = 0 \; (c).$$

REGULA II.

IV. *Siqua compareat quantitas, per quam omnes æquationis termini multiplicantur, debent omnes per illam quantitatem dividi; vel, ſi per eandem quantitatem omnes dividantur, debent omnes per illam multiplicari.*

Sic habito $15bb = 24ab + 3bx$, divide terminos omnes per b & fit $15b = 24a + 3x$. Deinde per 3 & fit $5b = 8a + x$.

Vel

(*a*) Nam ſi $\frac{2ab + bx}{a} - b = a + b$, ducatur in a erit $2ab + bx - ab = aa + ab$ (EUCL. Ax. 6.) ſed $2ab - ab = ab$ ergo $ab + bx = aa + ab$, & utrinque deleto ab (EUCL. Ax. 3.) $bx = aa$, cunctiſque demum diviſis per a (EUCL. Ax. 7.) $\frac{bx}{a} = a$.

(*b*) Quantitas aufertur operatione contraria illi, qua fuit poſita. Hic $8a$ jungitur ipſi x per *additionem*, ergo *ſubductione* auferenda eſt, ſed ut æqualitas maneat, ex æqualibus æqualia ſunt demenda (EUCL. Ax. 3.) ergo $8a$ demi debet hinc inde, quod dat $5b - 8a = 8a - 8a + x = x$ quia $8a - 8a = 0$.

(*c*) Siquidem addito x^3 hic inde fit $x^3 + abx + a^3 - aax = abb - 2abx$, & cunctis, præter x^3, in contrariam partem translatis

$$x^3 = \begin{matrix}+aa\\-3ab\end{matrix}\,x\,\begin{matrix}-a^3\\+abb\end{matrix}$$

vel, his omnibus in eam partem, ubi eſt x^3 translatis

$$x^3\,\begin{matrix}-aa\\+3ab\end{matrix}\,x\,\begin{matrix}+a^3\\-abb\end{matrix} = 0.$$

Vel habito $\frac{b^3}{ac} - \frac{bbx}{cc} = \frac{xx}{c}$, multiplica omnes per c & prodibit
$\frac{b^3}{a} - \frac{bbx}{c} = xx$.

Regula III.

V. *Siqua ſit fractio irreducibilis in cujus denominatore reperiatur litera illa ad cujus dimenſiones æquatio ordinanda eſt, omnes æquationis termini per iſtum denominatorem, aut per aliquem diviſorem ejus multiplicandi ſunt.*

Ut ſi æquatio $\frac{ax}{a-x} + b = x$ ſecundum x ordinanda ſit, multiplicentur omnes ejus termini per $a - x$, denominatorem fractionis $\frac{ax}{a-x}$, ſiquidem x inibi reperiatur, & prodit

$ax + ab - bx = ax - xx$, ſeu $ab - bx = -xx$,
& facta utriuſque partis tranſlatione, $xx = bx - ab$.

Atque ita, ſi habeatur $\frac{a^3 - abb}{2cy - cc} = y - c$ terminique juxta y ordinandi ſint, multiplicentur per denominatorem $2cy - cc$ vel ſaltem per diviſorem $2y - c$, quo y tollatur e denominatore, & exſurget
$\frac{a^3 - abb}{c} = 2yy - 3cy + cc$ & ordinando $\frac{a^3 - abb}{c} - cc + 3cy = 2yy$.

Ad eundem modum $\frac{aa}{x} - a = x$ multiplicando per x evadit $aa - ax = xx$, & $\frac{aabb}{cxx} = \frac{xx}{a+b-x}$ multiplicando primo per xx, dein per $a+b-x$ evadit $\frac{a^3bb + aab^3 - aabbx}{c} = x^4$.

Regula IV.

VI. *Sicui ſurdæ quantitati irreducibili litera illa involvatur, ad cujus dimenſiones æquatio ordinanda eſt, ceteri omnes termini ad contrarias partes cum ſignis mutatis transferendi ſunt* (d), *& utraque pars æquationis in ſe* ſemel *multiplicanda ſi radix* quadratica *ſit, vel* bis *ſi ſit* cubica, *&c.*

Sic ad ordinandum juxta x æquationem $\sqrt{(aa - ax)} + a = x$, transfera-

(d) Ne ſcilicet quadrandum ſit binomium ex rationale, & ſurda quantitate conſtans, quod certe dabit duo rectangula ex rationale in ſurdam (Eucl. 4. II.); quare ſurda necdum ablata foret, nec unquam, ex præcedenti ratiocinio, auferri poſſet, niſi ſola hinc vel inde remaneret.

ratur a ad alteras partes, fitque $\sqrt{(aa - ax)} = x - a$; & quadratis partibus, $aa - ax = xx - 2ax + aa$, ſeu $0 = xx - ax$ hoc eſt $x = a$ (*e*).

Sic etiam $\sqrt[3]{:(aax + 2axx - x^3)} - a + x = 0$, tranſponendo $-a+x$ evadit $\sqrt[3]{:(aax + 2axx - x^3)} = a - x$, & partibus cubice multiplicatis $aax + 2axx - x^3 = a^3 - 3aax + 3axx - x^3$, ſeu $xx = 4ax - aa$ (*f*).

Et ſic $y = \sqrt{(ay + yy - a\sqrt{(ay - yy)})}$ quadratis partibus evadit $yy = ay + yy - a\sqrt{(ay - yy)}$ & terminis debite tranſpoſitis (*g*) $ay = a\sqrt{(ay - yy)}$ ſeu $y = \sqrt{(ay - yy)}$, & partibus iterum quadratis $yy = ay - yy$, & tranſponendo denuo, $2yy = ay$, ſive $2y = a$.

REGULA V.

VII. *Terminis ſecundum dimenſiones literæ alicujus, ope præcedentium regularum, diſpoſitis, ſi maxima ejuſdem literæ dimenſio per cognitam quamlibet quantitatem multiplicetur, debet tota æquatio per eandem dividi.*

Sic $2y = a$ dividendo per 2 evadit $y = \frac{1}{2}a$.

$$\text{Et } \frac{bx}{a} = a \text{ dividendo per } \frac{b}{a} \text{ evadit } x = \frac{aa}{b}$$

Et

$$\left.\begin{matrix} 2ac \\ -cc \end{matrix}\right\} x^3 \begin{matrix} +a^3 \\ +aac \end{matrix}\Big\} xx \begin{matrix} -2a^3c \\ +aacc \end{matrix}\Big\} x - a^3cc = 0$$

dividendo per $2ac - cc$ evadit

$$x^3 + \frac{\begin{matrix} +a^3 \\ aac \end{matrix}\Big\} xx \begin{matrix} -2a^3c \\ +aacc \end{matrix}\Big\} x - a^3c}{2ac - cc} = 0,$$

ſive

$$x^3 + \frac{a^3 + aac}{2ac - cc} xx - aax - \frac{a^3}{2a - c} = 0.$$

RE-

(*e*) Deletis $aa - ax$, reſtat
$xx - ax = 0$,
& ax tranſlato, $ax = xx$,
cunctiſque diviſis, per x, $a = x$.
Vel etiam $x = 0$.

Uno verbo dico, quod ſi $a + c^{\frac{n}{m}}$ elevatur ad quamlibet poteſtatem p, ſemper ſurda remanebit, quia (N°. 122. Sect. I.)

$$(a + c^{\frac{n}{m}})^p = a^p + p\, a^{p-1} c^{\frac{n}{m}} + \text{\&c.},$$

ubi invenitur ipſiſſima $c^{\frac{n}{m}}$, quare efficiendum eſt, ne quantitas ſurda ſit binomii pars, tunc enim eam elevando ad poteſtatem m, aſymmetria, vel, ut ita dicam, irrationalitas auferetur, quod conſtat.

(*f*) Deletis æqualibus habetur
$a^3 - 4aax + axx = 0$;
& cunctis, præter axx, tranſlatis in contrarias partes (Reg. I.)
$4aax - a^3 = axx$,
atque omnibus per a diviſis (Reg. II.)
$4ax - aa = xx$.

(*g*) Nam per (Reg. I.),
$0 = ay - a\sqrt{(ay - yy)}$,
& $-ay = -a\sqrt{(ay - yy)}$,
& per (Reg. II.), $y = \sqrt{(ay - yy)}$
(dividendo ſcilicet per $-a$). Idem tamen inveniretur, ſi diviſio fieret per a, nam tunc
$-y = -\sqrt{(ay - yy)}$,
& quadrando $yy = ay - yy$ &c.

Digitized by Google

Regula VI.

VIII. *Aliquando reductio inſtitui poteſt dividendo æquationem per compoſitam aliquam quantitatem.*

Sic enim $y^3 = \begin{matrix} -2c \\ +b \end{matrix} y^2 + 3bcy - bbc$, ad hanc $yy = -2cy + bc$ reducitur transferendo terminos omnes ad easdem partes hoc modo, $y^3 \begin{matrix} +2c \\ -b \end{matrix} yy - 3bcy + bbc = 0$, & dividendo per $y - b$, ut in Capite de diviſione oſtenſum eſt Prodibit enim $yy + 2cy - bc = 0$. Aſt hujusmodi diviſorum inventio difficilis eſt, & eam prius docuimus.

Regula VII.

IX. *Aliquando etiam reductio per extractionem radicis ex utraque æquationis parte inſtituitur.*

Quemadmodum ſi habeatur $xx = \frac{1}{4}aa - bb$, extracta utrobique radice prodit $x = \sqrt{(\frac{1}{4}aa - bb)}$.

Quod ſi habeatur $xx + aa = 2ax + bb$, transfer $2ax$, & exſurget $xx - 2ax + aa = bb$, extractisque partium radicibus $a - x = +$ vel $-b$, (*h*) ſeu $x = a \pm b$.

Sic etiam habito $xx = ax - bb$, adde utrinque $-ax + \frac{1}{4}aa$, & prodit $xx - ax + \frac{1}{4}aa = \frac{1}{4}aa - bb$, & extracta utrobique radice, $x - \frac{1}{4}a = \mp\sqrt{(\frac{1}{4}aa - bb)}$ ſeu $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{(\frac{1}{4}aa - bb)}$.

X. Et ſic univerſaliter: Si ſit $x = px.q.$ erit $x = .\frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}pp.q.)}$ Ubi $\frac{1}{2}p$ & q iisdem ſignis ac p & q in æquatione priori afficienda ſunt; ſed $\frac{1}{2}pp$ ſemper affirmative ponendum (*i*). Eſtque hoc exemplum *regula ad*

(*h*) Pauliſper ſuſtineant Tirones, quam primum perſpecturi quomodo & quando una incognita valores duos, tres &c. habere poſſit.

(*i*) Æquationes duarum dimenſionum alicui ex his quatuor neceſſario ſimiles eſſe debent.

$$xx = px + q$$
$$xx = px - q$$
$$xx = -px + q$$
$$xx = -px - q$$

Nam ſi p exprimere ponatur omnes quantitates notas ſecundi termini, & q omnes notas tertii, aut potius omnes eas, quæ terminum conſtituunt, illæ æquationes inter ſe ſolis ſignis differre poſſunt, quæ nullo alio modo mutari poſſe liquido conſtat.

Sed $xx = px + q$, eſt idem ac $xx - px = q$, & ſi $xx - px$ eſſet quadratum perfectum, ex eo extrahi poſſet radix; atqui quadratum quantitatis ſimplicis eſſe nequit, quia duos

regula ad cujus ſimilitudinem æquationes omnes quadraticæ ad formam ſimplicium reduci poſſunt. E. g. Propoſita æquatione $yy = \frac{2xxy}{a} + xx$, ad extrahendam radicem y confer $\frac{2xx}{a}$ cum p, & xx cum q, hoc eſt ſcribe $\frac{xx}{a}$ pro $\frac{1}{2}p$ & $\frac{x^4}{aa} + xx$ pro $\frac{1}{2}pp.q.$ atque orietur $y = \frac{xx}{a} + \surd(\frac{x^4}{aa} + xx)$, vel $y = \frac{xx}{a} - \surd(\frac{x^4}{aa} + xx)$.

Eodem modo æquatio $yy = ay - 2cy + aa - cc$ conferendo $a - 2c$ cum p, & $aa - cc$ cum q, dabit $y = \frac{1}{2}a - c + \surd(\frac{5}{4}aa - ac)$. (*k*)

Quin etiam æquatio quadrato-quadratica $x^4 = -aaxx + ab^3$ cujus termini impares deſunt, ope hujus regulæ evadit $xx = -\frac{1}{2}aa + \surd(\frac{1}{4}a^4 + ab^3)$, & extracta iterum radice $x = \surd(-\frac{1}{2}aa + \surd(\frac{1}{4}a^4 + ab^3))$. Et ſic in aliis.

Suntque hæ regulæ pro concinnanda æquatione ſolitaria, quarum uſum cum Analyſta ſatis perſpexerit, ita ut æquationem quamcumque propoſitam ſecundum quamlibet literarum in ea complexarum diſponere noverit, & ejusdem literæ, ſi ea unius ſit dimenſionis, aut maximæ poteſtatis ejus, ſi plurium, valorem elicere, haud difficilem ſentiet comparationem plurium æquationum inter ſe, quam pergo jam docere.

duos habet terminos; quadratum vero binomii debet habere tres terminos; igitur addi debet aliquid ipſi $xx - px$, ut fiat quadratum binomii: hoc autem conſtare debet (EUCL. 4. II.) quadrato primæ partis radicis, quod hic eſt xx, duobus factis ex prima parte radicis in ſecundam, & quadrato ſecundæ. At hic habetur factum ex x (prima radicis parte) in p, ergo p debet eſſe dupla ſecundæ partis, quare ea $= \frac{p}{2}$ cujus quadratum $\frac{pp}{4}$, ergo hoc hinc inde addito

$$xx - px + \frac{pp}{4} = \frac{pp}{4} + q,$$

& extracta radice

$$x - \frac{p}{2} = \pm \surd(\frac{pp}{4} + q);$$

& $-\frac{p}{2}$ translato

$$x = +\frac{p}{2} \pm \surd(\frac{pp}{4} + q).$$

Ubi apparet quod quantitas nota ſecundi termini, & tertius terminus ſervant ſignum, quod habebant in æquatione $xx = px + q$, ſed $\frac{pp}{4}$ ſemper poſitiva quantitas erit, quia tam $-\frac{p}{2}$ quam $+\frac{p}{2}$ dant $\frac{pp}{4}$.

Hoc ratiocinium aliis quoque facile aptatur.

(*k*) Nam $y = \frac{a - 2c}{2} \pm$

$$\surd(\frac{a^2 - 4ac + 4c^2}{4} + a^2 - c^2);$$

& $\surd(\frac{a^2 - 4ac + 4c^2}{4} + a^2 - c^2)$

(per reductionem ad eundem denom.)

$$= \surd(\frac{a^2 - 4ac + 4c^2 + 4a^2 - 4c^2}{4})$$

$$= \surd(\frac{5a^2 - 4ac}{4}) = \surd(\frac{5a^2}{4} - ac).$$

CAPUT

CAPUT TERTIUM.

De duabus pluribusve æquationibus in unam transformandis, ut incognitæ quantitates exterminentur.

XI. Cum in alicujus problematis ſolutionem plures habentur æquationes ſtatum quæſtionis comprehendentes, quarum unicuique plures etiam incognitæ quantitates involvuntur; æquationes iſtæ, (duæ per vices, ſi modo ſint plures duabus,) ſunt ita connectendæ ut una ex incognitis quantitatibus per ſingulas operationes tollatur, & emergat æquatio nova.

Sic habitis æquationibus (*a*) $2x = y + 5$, & $x = y + 2$, demendo æqualia ex æqualibus prodibit $x = 3$.

Et ſciendum eſt quod per quamlibet æquationem una quantitas incognita poteſt tolli; atque adeo, cum tot ſunt æquationes quot quantitates incognitæ, omnes poſſunt ad unam denique reduci, in qua unica manebit quantitas incognita. Sin quantitates incognitæ ſint una plures quam æquationes habentur, tum in æquatione ultimo reſultante duæ manebunt quantitates incognitæ; & ſi ſint duabus plures quam æquationes habentur, tum in æquatione ultimo reſultante manebunt tres, & ſic præterea.

Poſſunt etiam duæ vel plures quantitates incognitæ per duas tantum æquationes fortaſſe tolli.

Ut ſi ſit $ax - by = ab - az$, & $bx + by = bb + az$: Tum æqualibus ad æqualia additis prodibit (*b*) $ax + bx = ab + bb$, exterminatis utriſque y & z.

Sed ejuſmodi caſus vel arguunt vitium aliquod in ſtatu quæſtionis latere, vel calculum erroneum eſſe aut non ſatis artificioſum. Modus autem quo una quantitas incognita per ſingulas æquationes tollatur ex ſequentibus patebit.

(*a*) Nam ſi ex $2x$ demas x reſtat x, ut ex $y + 5$ dempto $y + 2$ remanet 3, quare (Eucl. Ax. 3.) $x = 3$.

(*b*) 2. Siquidem habetur

$$ax + bx - by + by = ab + bb - az + az;$$

$$\text{ſed} - by + by = 0 = - az + az$$

$$\text{ergo } ax + bx = ab + bb$$

Ceterum ſi in duabus æquationibus quantitates eædem habeant eadem ſigna, ab æqualibus æqualia demenda ſunt; addenda vero ſi habeant ſigna contraria; quia nihil quærimus, niſi rationem incognitas eliminandi, & ſigna contraria ſeſe invicem deſtruunt.

Sic datas duas priores æquationes

$$2x = y + 5; \ \& \ x = y + 2$$

aliam ex alia ſubducimus, quia incognitæ x & y habent in utraque eadem ſigna; æquationes autem $ax - by = ab - az$,

$$\& \ bx + by = bb + az$$

addimus, quia termini continentes ipſas y, & z habent ſigna contraria.

Sed ut additio, & ſubtractio locum habeant neceſſe eſt, ut termini incogniti ſint ejuſdem dimenſionis, & eaſdem literas quæſitas contineant, non vero coefficientes.

CAPUT

CAPUT QUARTUM.

Exterminatio quantitatis incognitæ per æqualitatem valorum ejus.

XII. Cum quantitas tollenda unius eſt tantum dimenſionis in utraque æquatione, valor ejus uterque per regulas jam ante traditas quærendus eſt, & alter valor ſtatuendus æqualis alteri.

Sic poſitis $a+x=b+y$ & $2x+y=3b$, ut exterminetur y, æquatio prima dabit $a+x-b=y$, & ſecunda dabit $3b-2x=y$. Eſt ergo $a+x-b=3b-2x$, ſive ordinando $x=\frac{4b-a}{3}$.

Atque ita $2x=y$, & $\varsigma+x=y$ dant $2x=\varsigma+x$ ſeu $x=\varsigma$.

Et $ax-2by=ab$, & $xy=bb$ dant $\frac{ax-ab}{2b}$ $(=y)=\frac{bb}{x}$; ſive ordinando $xx-bx-\frac{2b^3}{a}=0$. (*a*)

Item $\frac{bbx-aby}{a}=ab+xy$, & $bx+\frac{ayy}{c}=2aa$ tollendo x dant $\frac{aby+aab}{bb-ay}$ $(=x)=\frac{2aac-ayy}{bc}$: Et reducendo

$$y^3-\frac{bb}{a}yy-\frac{2aac-bbc}{a}y+bbc=0. \ (b)$$

Deni-

(*a*) Tranſlatis in contrarias reſpective partes $-2by$; & ab; æquatio $ax-2by=ab$ vertitur in hanc $ax-ab=2by$; & cunctis diviſis per $2b$ fit $\frac{ax-ab}{2b}=y$. Item $xy=bb$ dividendo per x dat $y=\frac{bb}{x}$; ergo $\frac{ax-ab}{2b}=\frac{bb}{x}$ (EUCL. Ax. 1.), & cunctis ductis in x habetur $\frac{axx-abx}{2b}=bb$ & rurſus omnibus per $2b$ multiplicatis, $axx-abx=2b^3$; ac transferendo $2b^3$ in contrarias partes, & omnia dividendo per a tandem obtinetur $xx-bx-\frac{2b^3}{a}=0$.

(*b*) Ex his æquationibus eligo x auferendum, quia in utraque eſt unius dimenſionis, & idcirco facilius eliminari poteſt. Ut hoc fiat duco primam in a, unde $bbx-aby=aab+axy$; & tranſlatis in contrarias reſpective partes ipſis axy; $-aby$ (ut ſcilicet omnes termini continentes x ſint in eodem membro) $bbx-axy=aab+aby$; &, ut x unice habeatur, divido $bbx-axy$ per $bb-ay$; fit $x=\frac{aab+aby}{bb-ay}$. Pro ſecunda vero transfero $\frac{ayy}{c}$ in contrarias partes, quo fit $bx=2aa-\frac{ayy}{c}=$ (reducendo ad eundem denominatorem) $\frac{2aac-ayy}{c}$; & dividendo per b obtineo $x=\frac{2aac-ayy}{bc}=\frac{aab+aby}{bb-ay}$; quare (omnibus ductis in $bb-ay$) $\frac{2aabbc-2a^3cy-ab^2y^2+a^2y^3}{bc}=aab$.

Digitized by Google

Denique $x+y-z=0$ & $ay=xz$ tollendo z dant $x+y$ $(=z)$ $=\frac{ay}{x}$ ſive $xx+xy=ay$.

Hoc idem quoque perficitur ſubducendo alterutrum valorem quantitatis incognitæ ab altero, & ponendo reſiduum æquale nihilo. Sic in exemplorum primo tolle $3b-2x$ ab $a+x-b$ & manebit $a+3x-4b=0$, ſive $x=\frac{4b-a}{3}$.

CAPUT QUINTUM.

Exterminatio quantitatis incognitæ ſubſtituendo pro ea valorem ſuum.

XIII. Cum in altera ſaltem æquatione, tollenda quantitas unius tantum dimenſionis exiſtit, valor ejus in ea quærendus eſt; & pro ſe in æquationem alteram ſubſtituendus.

Sic propoſitis $xyy=b^3$ & $xx+yy=by-ax$; ut exterminetur x, prima dabit $\frac{b^3}{yy}=x$: Quare in ſecundam ſubſtituo $\frac{b^3}{yy}$ pro x, & prodit $\frac{b^6}{y^4}+yy=by-\frac{ab^3}{yy}$, ac reducendo $y^6-by^5+ab^3yy+b^6=0$. (*a*)

Propoſitis autem $ayy+aay=z^3$; & $yz-ay=az$, ut y tollatur, ſecunda dabit $y=\frac{az}{z-a}$. Quare pro y ſubſtituo $\frac{az}{z-a}$ in primam (*b*), proditque $\frac{a^3zz}{zz-2az+aa}+\frac{a^3z}{z-a}=z^3$ (*c*). Et reducendo, $z^4-2az^3+aazz-2a^3z+a^4=0$.

Pari

$=aab+aby$; & rurſus cunctis per bc multiplicatis $2a^2b^2c-2a^3cy-ab^2y^2+a^3y^3=aabbc+abbcy$; ac in contrarias partes translatis ipſis $aabbc+abbcy$ omnibus per a^2 diviſis, & juxta dimenſionem literæ y ordinatis &c.

(*a*) Etenim quia $\frac{b^3}{y^2}=x$ erit (quadrando) $\frac{b^6}{y^4}=x^2$, & (multiplicando $\frac{b^3}{y^2}=x$ per $-a$) $-\frac{ab^3}{y^2}=-ax$; quibus poſitis in ſecunda æquatione, ea vertetur in quæſitam $\frac{b^6}{y^4}+y^2=by-\frac{ab^3}{y^2}$; & cunctis ductis in y^4 fiet $b^6+y^6=by^5-ab^3y^2$, & ordinando &c.

(*b*) Et pro yy ſubſtituto $\frac{aazz}{zz-2az+aa}$.

(*c*) Id eſt cuncta ducendo $zz-2az+aa$ (quod fit ducendo ipſam $\frac{a^3z}{z-a}$ in $z-a$, quia $zz-2az+aa=(z-a)(z-a)$ ergo $a^3z\,(zz-2az+aa)=\frac{a^3z\,(z-a)\,(z-a)}{z-a}=a^3z\,(z-a)$) obtinetur $a^3zz+a^3zz-a^4z=z^5-2az^4+aaz^3$, & cunctis diviſis, per z; & tranſpoſitis, &c.

Pari modo propoſitis $\frac{xy}{c} = z$ & $cy + zx = cc$, ad z tollendum pro eo ſubſtituo $\frac{xy}{c}$ in æquationem ſecundam, & prodit $cy + \frac{xxy}{c} = cc$.

Ceterum qui in hujusmodi computationibus exercitatus fuerit ſæpenumero contractiores modos percipiet quibus incognita quantitas exterminari poſſit. Sic habitis $ax = \frac{bbx - b^3}{z}$ & $x = \frac{az}{x - b}$ ſi æqualia multiplicentur æqualibus, prodibunt æqualia $axx = abb$ ſive $x = b$ (*d*). Sed caſus ejusmodi particulares ſtudioſis proprio marte, cum res tulerit, inveſtigandos linquo.

CAPUT SEXTUM.

Exterminatio quantitatis incognitæ quæ plurium in utraque æquatione dimenſionum exiſtit.

XIV. Cum in neutra æquatione tollenda quantitas unius tantum dimenſionis exiſtit, valor maximæ poteſtatis ejus in utraque quærendus eſt; deinde, ſi poteſtates illæ non ſint eædem, æquatio poteſtatis minoris multiplicanda eſt per tollendam quantitatem aut per ejus quadratum aut cubum, &c., ut ea evadat ejusdem poteſtatis cum æquatione altera. Tum valores illarum poteſtatum ponendi ſunt æquales, & æquatio nova prodibit ubi maxima poteſtas ſive dimenſio tollendæ quantitatis diminuitur. Et hanc operationem iterando quantitas illa tandem auferetur.

Quemadmodum ſit $xx + 5x = 3yy$ & $2xy - 3xx = 4$; ut x tollatur, prima dabit $xx = -5x + 3yy$ & ſecunda $xx = \frac{2xy - 4}{3}$. Pono itaque $3yy - 5x = \frac{2xy - 4}{3}$, & ſic x ad unicam tantum dimenſionem reducitur, adeoque tolli poteſt per ea quæ paulo ante oſtendi. Scilicet, æquationem noviſſimam debite reducendo (*a*), prodit $9yy - 15x = 2xy - 4$, ſive (*b*) $x =$

(*d*) Eſt enim $\frac{bbx - b^3}{z} = \frac{bb}{z}(x - b)$, quapropter ductis æqualibus in æqualia $axx = \frac{abbz\,(x - b)}{z\,(x - b)} = abb$, & dividendo per a, $xx = bb$, ac extracta radice $x = b$.

(*a*) Id eſt ducendo cuncta in 3.

(*b*) Quod invenietur ipſis $-15x$: -4, in contrarias reſpective partes tranſpoſitis, & cunctis diviſis per $2y + 15$.

Digitized by Google

$x = \frac{9yy + 4}{2y + 15}$. Hunc itaque valorem pro x (c) in aliquam ex æquationibus primo propoſitis (velut in $xx + 5x = 3yy$) ſubſtituo, & oritur $\frac{81y^4 + 72yy + 16}{4yy + 60y + 225} + \frac{45yy + 20}{2y + 15} = 3yy$. Quam, ut in ordinem redigatur, multiplico per $4yy + 60y + 225$, & prodit $81y^4 + 72yy + 16 + 90y^3 + 40y + 675yy + 300 = 12y^4 + 180y^3 + 675yy$,

ſive

$$69y^4 - 90y^3 + 72yy + 40y + 316 = 0. \ (d)$$

Præterea ſi ſit $y^3 = xyy + 3x$, & $yy = xx - xy - 3$, ut y tollatur multiplico poſteriorem æquationem per y & fit $y^3 = xxy - xyy - 3y$ totidem dimenſionum quot prior. Jam ponendo valores ipſius y^3 ſibimet æquales habeo $xyy + 3x = xxy - xyy - 3y$, ubi y deprimitur ad duas dimenſiones. Per hanc itaque & ſimpliciorem ex æquationibus primo propoſitis $yy = xx - xy - 3$ quantitas y prorſus tolli poteſt inſiſtendo veſtigiis prioris exempli. (e)

XV. Sunt & alii modi quibus hæc eadem abſolvi poſſunt; idque ſæpenumero contractius.

Quemadmodum ex $yy = \frac{2xxy}{a} + xx$ & $yy = 2xy + \frac{x^4}{aa}$; ut y deleatur, extrahe in utraque radicem y ſicut in Regula ſeptima oſtenſum eſt, & prodibunt $y = \frac{xx}{a} + \sqrt{(\frac{x^4}{aa} + xx)}$, & $y = x + \sqrt{(\frac{x^4}{aa} + xx)}$. Jam hos ipſius y valores ponendo æquales habebitur $\frac{xx}{a} + \sqrt{(\frac{x^4}{a} + xx)} = x + \sqrt{(\frac{x^4}{aa} + xx)}$, & rejiciendo æqualia $\sqrt{(\frac{x^4}{aa} + xx)}$, reſtabit $\frac{xx}{a} = x$, vel $xx = ax$ & $x = a$.

Porro

3. (c) Et pro xx quadratum ipſius x; ſi vero haberetur x^3, vel x^4, aut x^5, vel denique x^m, valor ipſius x, ad 3, 4, 5. m, poteſtatem evehendus eſſet, quod ſemel monuiſſe ſufficiat.

(d) Nempe deletis æqualibus.

(e) Quærendo ſcilicet valorem ipſius yy, ex $xyy + 3x = xxy - xyy - 3y$; quod obtinebis in contrarias reſpective partes transferendo $+ 3x$; $- xyy$; omniaque dividendo per $2x$; unde habebis $yy = \frac{xxy - 3y - 3x}{2x} = xx - xy - 3$, quare duc omnia in $2x$, dele æqualia, in eaſdem partes tranjice omnes terminos continentes y, aut x, divide per $3xx - 3$, & habebis $y = \frac{2x^3 - 3x}{3xx - 3}$, quem valorem ſubſtitue in $yy = xx - xy - 3$, ut pote ſimpliciorem, erit $\frac{4x^6 - 12x^4 + 9xx}{9x^4 - 18xx + 9} = xx - \frac{2x^4 + 3xx}{3xx - 3} - 3$, jam duc $xx - 3$ in $9x^4 - 18xx + 9$, ſed $-2x^4 + 3xx$ in $3xx - 3$ unde $4x^6 - 12x^4 + 9xx = 9x^6 - 18x^4 + 9x^2 - 6x^6 + 9x^4 + 6x^4 - 9x^2 - 27x^4 + 54x^2 - 27$ dele æqualia, & transfer omnia in eaſdem partes habiturus demum

$$x^6 + 18x^4 - 45x^2 + 27 = 0.$$

Porro ut ex æquationibus $x + y + \frac{yy}{x} = 20$, & $xx + yy + \frac{y^4}{xx} = 140$ tollatur x, aufer y de partibus æquationis primæ, & reſtat $x + \frac{yy}{x} = 20 - y$, & partibus quadratis fit $xx + 2yy + \frac{y^4}{xx} = 400 - 40y + yy$ tollendoque utrinque yy reſtat $xx + yy + \frac{y^4}{xx} = 400 - 40y$. Quare cum $400 - 40y$ & 140 iiſdem quantitatibus æquentur, erit $400 - 40y = 140$, ſive $y = 6\frac{1}{2}$. (*f*) Et ſic opus in pleriſque aliis æquationibus contrahere liceat.

XVI. Ceterum cum quantitas exterminanda multarum dimenſionum exiſtit, ad eam ex æquationibus tollendam calculus maxime laborioſus nonnunquam requiritur: Sed labor tunc plurimum minuetur per exempla ſequentia tanquam regulas adhibita.

REGULA I.

Ex $axx + bx + c = 0$, & $fxx + gx + h = 0$,

Exterminato x prodit

$$(ah - bg - 2cf)\,ah + (bh - cg)\,bf + (agg + cff)\,c = 0.$$

REGULA II.

Ex $ax^3 + bxx + cx + d = 0$, & $fxx + gx + h = 0$.

Exterminato x prodit

$$(ah - bg - 2cf)\,ahh + (bh - cg - 2df)\,bfh + (ch - dh)\,(agg + cff) + (3agh + bgg + dff)\,df = 0.$$

REGULA III.

Ex $ax^4 + bx^3 + cxx + dx + e = 0$, & $fxx + gx + h = 0$,

Exterminato x prodit

(*ah*

(*f*) Nam translatis $-40y$, & 140 fit $400 - 140$ (id eſt 260) $= 40y$; & dividendo per 40, $6\frac{1}{2} = y$.

Digitized by Google

$$(ah - bg - 2cf)\,ah^3 + (bh - cg - 2df)\,bfhh + (agg + cff)\,(chh - dgh + egg - 2cfh) + (3agh + bgg + dff)\,dfh + (2ahh + 3bgh - dfg + eff)\,eff - (bg - 2ah)\,efgg = 0.$$

Regula IV.

Ex $ax^3 + bxx + cx + d = 0$, & $fx^3 + gxx + hx + k = 0$,

Exterminato x prodit

$$(ah - bg - 2cf)\,(adhh - achk) + (ak + bh - cg - 2df)^{2}\,bdfh - (ak + bh + 2cg + 3df)\,aakk + (cdh - ddg - cck + 2bdk)\,(agg + cff) + (3agh + bgg + dff - 3afk)\,ddf - (3ak - bh + cg + df)\,bcfk + (bk - 2dg)\,bhfk - (bhk - 3adh - cdf)\,agk = 0.$$

Verbi gratia, ut ex æquationibus

$$xx + 5x - 3yy = 0, \quad \& \quad 3xx - 2xy + 4 = 0$$

exterminetur x: in regulam primam pro a, b, c, f, g, & h reſpective ſubſtituo 1, 5, $-3yy$; 3, $-2y$, & 4. Et ſignis $+$ & $-$ probe obſervatis oritur

$$(4 + 10y + 18yy)\,4 + (20 - 6y^3)\,15 + (4yy - 27yy) - 3yy = 0.$$

Sive

$$16 + 40y + 72yy, + 300 - 90y^3, + 69y^4 = 0.$$

Simili ratione ut y deleatur ex æquationibus

$$y^3 - xyy - 3x = 0 \quad \& \quad yy + xy - xx + 3 = 0,$$

in regulam ſecundam pro a, b, c, d, f, g, h, & x ſubſtituo, 1; $-x$, 0, $-3x$; 1, x, $-xx + 3$, & y, reſpective, prodirque $(3 - xx + xx)$ $(9 - 6xx + x^4) - (3x + x^3 + 6x) - (3x + x^3) + 3xx \,.\, xx + (9x - 3x^3 - x^3 - 3x) - 3x = 0$. Tum delendo ſuperflua & multiplicando, fit

$$27 - 18xx + 3x^4, - 9xx + x^6, + 3x^4, - 18x^2 + 12x^4 = 0.$$

Et ordinando

$$x^6 + 18x^4 - 45xx + 27 = 0.$$

Hactenus de unica incognita quantitate e duabus æquationibus tollenda. Quod ſi plures e pluribus tollendæ ſunt, opus per gradus peragetur. Ex æquationibus $ax = yz$; $x + y = z$; & $5x = y + 3z$, ſi quantitas y elicienda ſit, imprimis tolle alteram quantitatum x aut z, puta x, ſubſtituendo

pro

pro ea valorem ejus $\frac{yz}{a}$ (per æquationem primam inventum) in æquationem ſecundam ac tertiam. Quo pacto obtinetur $\frac{yz}{a} + y = z$, & $\frac{5yz}{a} = y + 3z$; e quibus deinde tolle z ut ſupra.

CAPUT SEPTIMUM.

De modo tollendi quantitates quotcunque ſurdas ex æquationibus.

XVIII. Huc referre licet quantitatum ſurdarum exterminationem fingendo eas literis quibuslibet æquales. Quemadmodum ſi ſit $\sqrt{ay} - \sqrt{(aa - ay)} = 2a + \sqrt[3]{ayy}$, ſcribendo t, pro $\sqrt{ay}$, v pro $\sqrt{(aa - ay)}$, & x pro $\sqrt[3]{ayy}$ habebuntur æquationes $t - v = 2a + x$, $tt = ay$, $vv = aa - ay$, & $x^3 = ayy$, ex quibus tollendo gradatim t, v, & x reſultabit tandem æquatio libera ab omni aſymmetria (a).

(a) Quod ſic fieri poteſt. Jam $x = t - u - 2a$; & datur valor ipſius x^3, quem duobus modis expreſſum habebo facto cubo ipſius $t - u - 2a$. Formula cubi eſt
$$p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3,$$
ſit ergo $p = t$; & $q = -u - 2a$, eritque $p^2 = t^2 = ay$; ac $p^3 = t^3 = aty$; ſed
$$q^2 = u^2 + 4au + 4a^2 =$$
(ponendo $a^2 - ay$ pro u^2) $5a^2 - ay + 4au$,
$$\& \; q^3 = -u^3 - 6au^2 - 12a^2u - 8a^3 =$$
(ponendo $a^2u - auy$ pro $u^3 = u^2.u$, & $a^2 - ay$ pro u^2)
$$-14a^3 + 6a^2y - 13a^2u + auy.$$

Quare

$$x^3 = (t - u - 2a)^3 =$$
(reductione facta)
$$-2aty - 2auy + 15a^2t + 12atu - 13a^2u - 14a^3 = ay^2;$$
& tranſpoſitis terminis in quibus t non apparet, ac dividendo
$$\frac{y^2 + 2uy + 13au + 14a^2}{12u + 15a - 2y} = t;$$ & quadrando
$$y^4 + 4uy^3 + 26auy^2 + 28a^2y^2 + 4u^2y^2 + 52au^2y + 56a^2uy + 169a^2u^2 + 364a^3u + 196a^4$$
diviſ. per $144u^2 + 360au - 48uy + 225a^2 - 60ay + 4y^2 = t^2 = ay$, ac (ſubſtituto ipſius u^2 valore, reductione facta, & ſublata fractione)
$$y^4 + 4uy^3 - 4ay^3 + 26auy^2 - 20a^2y^2 - 117a^3y + 56a^2uy + 365a^4 + 364a^3u = 4ay^3 - 48auy^2 - 204a^2y^2 + 360a^2uy + 369a^3y,$$
ac (terminis primi membri, in quibus eſt u, conjectis in ſecundum, & terminis ſecundi, e quibus abeſt u, in primum, deletis delendis, & dividendo)
$$\frac{y^4 - 8ay^3 + 184a^2y^2 - 486a^3y + 365a^4}{-4y^3 - 74ay^2 + 304a^2y - 364a^3} = u$$
& quadrando
$$= y^8 - 16ay^7 + 432a^2y^6 - 3916a^3y^5 + 42362a^4y^4 - 184688a^5y^3 + 370516a^6y^2 - 354780a^7y + 133225a^8$$
diviſ. per
$$16y^6 + 592ay^5 + 3044a^2y^4 - 42080a^3y^3 + 146288a^4y^2 - 221312a^5y + 132496a^6$$
$= -ay + a^2$, & (ſublata fractione, ac reductione facta)
$$y^8 + 1008a^2y^6 - 1464a^3y^5 - 2762a^4y^4 + 3680a^5y^3 + 2916a^6y^2 - 972a^7y + 729a^8 = 0.$$

SECTIO

SECTIO TERTIA.

CAPUT PRIMUM.

Quomodo Quæſtio aliqua ad æquationem redigatur (*a*).

I. POſtquam Tyro in æquationibus pro arbitrio transformandis & concinnandis aliquamdiu exercitatus fuerit, ordo exigit ut ingenii vires

(*a*) *Ut melius intelligantur, quæ Auctor noſter hic aſſerit, & quæ jam aſſeruit Sect. I. Cap. IX. Art. LXXXVIII, pauca præmittenda puto* de Problematum natura.

1. *Sub univerſali* quantitatis *appellatione plura continentur quantitatum genera, quæ in alia ſubalterna genera dividi poſſunt; & hæc rurſus in alia &c.*

Ita generale quantitatis nomen complectitur extenſionem, velocitatem, tempus &c. Rurſus generale extenſionis vocabulum continet ſolida, ſuperficies, & lineas; lineæ vero ſunt aut rectæ, aut curvæ. Item curvæ in ſuos ordines &c. diſtinguuntur; &c.

2. Quantitas, quæ a genere aliquo ſeparatur, & in immediate inferius genus transfertur, dicitur *determinata*.

Sic ſi e ſuperficierum genere ſumo ſuperficiem rectilineam; hæc relative ad ſuperius genus, e quo ſegregata fuit, dicitur *determinata*, haud ſecus ac quadrilaterum relative ad ſuperficies rectilineas, parallelogrammum ad quadrilatera; parallelogrammum habens datum angulum (ut rectangulum) ad parallelogramma; parallelogrammum habens datum angulum, & rationem laterum angulum continentium item datam (ut quadratum) ad rectangula; parallelogrammum habens datum angulum, & latera angulum comprehendentia pariter data (ut quadratum datæ rectæ) ad ſupra deſcripta &c.

3. *Quævis* determinata quantitas *habet proprietates aliquas ſibi cum quantitatibus omnibus communes.*

Ea enim eſt ex quantitatum genere, & idcirco debet habere id, quod quantitatibus in genere convenit.

Quaſdam vero proprietates præterea habet ſibi communes cum pluribus aliis quantitatibus, at non cum omnibus, nonnullas denique ſibi ita peculiares, & proprias, ut nunquam alicui alteri quantitati eæ proprietates ineſſe poſſint.

Quia ſcilicet *determinata* eſt, & a quantitatibus aliis diſtincta.

Sic triangulum eſt in infinitum diviſibile ut omnes quantitates: undique circumcluſum eſt ut omnes figuræ: tum duas habet dimenſiones, ut omnes ſuperficies: denique tribus lateribus circumſcribitur; quod uni triangulo proprium eſt. Si vero triangulum ſit rectilineum, habebit tria latera, ut omnia triangula, ſed ab aliis diſtinguetur eo ipſo quod latera ſint lineæ rectæ. Item, ſi ſit rectangulum, a rectilineis triangulis ſeparabitur æqualitate quadrati ex hypothenuſa & quadratorum ex aliis lateribus. Si præterea ſit iſoſcele, eo quod quadratum hypothenuſæ duplum ſit quadrati ex uno latere, & ſic de ceteris determinationibus.

4. Proprietates has determinatæ quantitati ita peculiares, ut aliis nunquam competere poſſint, vocabo *characteriſticas*.

5. Una eademque quantitas poteſt habere plures proprietates characteriſticas.

Ex. gr. circulus habet eas omnes, quas invenies (Eucl. 35. 36. III.), aut quod omnes perpendiculares tangentibus a puncto contactus ductæ in unum idemque punctum coeant; aut quas leges (Eucl. 45. 46. III.) &c.

6. Quia quantitas magis aut minus poteſt determinari, vel quia ſtrictior, aut laxior eſſe poteſt ſignificatio vocis *quantitas determinata*, poteſt characteriſticarum numerus augeri, & minui, quin ipſæ ita poſſunt immutari, ut quæ jam characterica fuerat, nunc non ſit.

Ita inter quadrilatera determinatur parallelogrammum parallelismo laterum oppoſitorum; aut

Digitized by Google

aut parallelismo & æqualitate duorum e lateribus oppoſitis, ubi neque angulus comprehenſus neque magnitudo laterum angulum comprehendentium conſideratur. Sed e parallelogrammis unum determinabitur magnitudine laterum angulum conſtituentium, & angulo. Inter figuras curvilineas circulus determinabitur aliqua ex ſupra recenſitis characteriſticis, inter quas centri poſitio, & radii magnitudo non affertur. Sed ex circulis aliquis determinabitur radii magnitudine &c., & ex omnibus circulis æqualibus unus ipſa centri poſitione.

7. *Cum* igitur *aſſignatur determinata quantitas, una dantur etiam ejus proprietates, tum communes, tum peculiares* (utpote quæ aſſignatæ quantitati inſint), *& nihil eſt in ipſa re, quod vetet, quo minus hæ proprietates erui poſſint, & inveniri.*

Sic, cum ex infinito figurarum rectilinearum numero unam eximo atque determino, puta, triangulum, una aſſigno omnes proprietates, quibus gaudet, & quia eſt e *quantitatum* genere, ut eſt diviſibilitas, & quia eſt *ſuperficierum* una, quo nomine longitudine, & latitudine prædi um, profunditatis expers eſt; & quia de *figurarum* grege eſt, & idcirco finitum, & undique circumcluſum; & quia eſt rectilineum, qua de cauſa rectis lineis terminatum; & quia eſt e triangulorum numero, quapropter tribus lineis terminatur & tres angulos habet; & quia demum ſimul eſt triangulum, & rectilineum, quapropter tres ejus anguli ſimul ſumpti duobus rectis æquivalent &c. Quid autem eſt in triangulo, quo vetet has leges inveſtigare, & aſſequi? Quin imo triangulum rectilineum ſe mihi ſiſtens ultro ponit ſub oculos proprietates ſuas, quæ ei neceſſario adhærent, ſolumque mihi reſtat, ut eas recte & gnaviter quæram.

8. *Rurſus proprietatum aliæ competunt* omnibus & quibusvis quantitatibus, ut *diviſibilitas*, *aliæ* quantitatibus numero quidem infinitis, ſed non omnibus.

Ut infinitis numeris eſſe bifariam diviſibiles, ſed *non omnibus*, quia numeri impares hujus dotis exſortes ſunt; item infinitis figuris eſſe rectilineas, ſed non omnibus, ſunt enim, & curvilineæ, & mixtæ.

Aliæ proprietates inſunt quantitatibus aliquot, & quarum numerus finitus eſt atque *determinatus.*

Sic quinarius metiri quidem poteſt plures e numeris, qui ſunt ſupra unitatem & infra centenarium, ſed numerorum talium quantitas determinata eſt; ſic a puncto dato extra circulum duæ tantum tangentes duci poſſunt ad circulum; ſic ſuper data recta utrinque terminata duo triangula æquilatera conſtituere licet, unum ſcilicet ſupra, alterum infra datam rectam.

Aliæ denique conveniunt uni.

Ut uni circulo tranſire per tria data puncta, quæ in eadem recta non ſint.

9. *Cum* igitur *aſſignatur proprietas aliqua, vel proprietatum congeries, una aſſignantur quantitates omnes, quibus competunt.*

Quia proprietas quantitatibus, & quantitates proprietatibus neceſſario junctæ ſunt.

Ergo ex proprietatibus quantitates inveſtigari poſſunt.

10. *Omnis quæſtio, quæ poteſt inſtitui, intra duo genera omnino continetur. Aut enim datur quantitas, & quæruntur ejus proprietates omnes, vel earum aliqua determinata. Aut datur una proprietas, vel aliquis proprietatum complexus, & petuntur quantitates proprietatibus his inſignita.*

Primi generis exempla ſint hæc. Dantur (in Eucl. 1.) rectæ parallelæ, & omnes earum proprietates quæruntur (Eucl. 29. I.) Datur (in Eucl. 5. I.) triangulum iſoſcele, quæritur determinata proprietas, quæ nempe conveniat illi conſiderato, quo ad angulos poſitos ſuper latus inæquale.

En ſecundi generis exempla. Datur (in Eucl. 27. I.) proprietas in eo ſita, ut duæ rectæ a tertia quapiam ſectæ faciant æquales angulos alternos, & quæruntur duæ rectæ, quibus hæc proprietas conveniat. Dantur (in Eucl. 44. I.) proprietas habendi angulum dato æqualem, datam rectam pro uno laterum, & ſuperficiem dato triangulo æqualem, petitur cui parallelogrammo omnes hæ proprietates ſimul competant.

11. Poſſet quidem & tertium quæſtionum genus afferri, *cum* ſcilicet *dantur tum determinata quantitas, tum determinata proprietas, & quæritur utrum hæc illi conveniat.*

Sic datur (in Eucl. 47. I.) triangulum determinatum, nempe rectangulum, & determinata proprietas, id eſt æqualitas quadrati ex hypothenuſa, & duorum ſimul quadratorum ex ceteris duobus lateribus, ſciendum eſt utrum triangulum rectangulum hac proprietate fruatur, nec-ne.

Sed hæ quæſtiones facile ad alterum e ſuperioribus generibus revocari poſſe videntur, ſumendo tanquam datam proprietatem, & quæ-

quærendo cui quantitati competat, aut vice verſa.

Sic quæſtio (Eucl. 47. 1.) proponi poſſet hoc pacto. Datur æqualitas quadrati ex uno latere, & duorum ſimul quadratorum ex reliquis duobus trianguli lateribus, quæritur utrum triangulum hac proprietate gaudens ſit rectangulum, an obtuſangulum, an acutangulum, ut in 48. 1. Vel ſic; Datur triangulum rectangulum, petitur proprietas, quam habet ſi conſideretur quoad laterum quadrata. Si quis vero tertium hoc genus prioribus addendum, & tria omnino eſſe quæſtionum genera contendat, non repugnabo. Certum ſaltem, & evidens eſt præter hæc tria nullum aliud dari poſſe.

12. Propoſitio, in qua inveſtigatur quænam proprietas datæ quantitati competat, vel utrum determinata proprietas inſit determinatæ quantitati dicitur *Theorema*.

13. Sed propoſitio, in qua requiritur quibuſnam quantitatibus conveniat vel data proprietas, vel data proprietatum congeries, appellatur *Problema*.

14. *Theorema inveſtigatum*, vel *Problema ſolutum* dicitur, cum inventæ, & aſſignatæ ſunt, aut proprietates omnes, quæ utrum datæ quantitati conveniant, nec-ne, dubitabatur; aut quantitates omnes, quibus datæ proprietates inhærent, & quando, quomodo, ac quotupliciter hæ quantitates aſſignari poſſint, ac quando nullo modo poſſint.

15. Theoremata & problemata non raro vocantur *Propoſitiones*, quibus alios docemus veritates a nobis repertas, id eſt id, quod nos theoremata vel problemata inveſtigantes, invenimus. Sed hoc nobis non nocet, quia nunc de ſola veritatis perquiſitione ſolliciti ſumus; Item aliquando *problema* vocitatur *theorema inveſtigandum*. Sed ratio ſolvendi problemata parum differt a ratione inveſtigandorum theorematum, & quæ differunt ſuo loco tradentur.

16. Quævis ex proprietatibus, quæ dantur cum problema ſolvendum proponitur, nuncupatur *lex*, aut *conditio* problematis.

17. Ex propoſitis legibus, aut aliqua uni quantitati convenit; aut ſingulæ pluribus, ſed nulla infinito quantitatum numero; aut aliæ pluribus, aliæ verum numero infinitis; aut aliæ pluribus, aliæ verum numero infinitis; aut ſingulæ quantitatibus numero infinitis.

Patet quintum non dari.

18. Si una ex datis legibus in una quantitate poteſt inveniri, *cetera leges aut neceſſario huic quantitati inſunt, aut neceſſario abſunt*, nihil enim fortuitum, & contingens admittit Matheſis.

Si inſunt, fruſtra in problematis enunciatione fuerunt expreſſæ. Quoniam enim una data dantur reliquæ, unam ſufficit attuliſſe.

Sin autem abſunt; contradictoriæ ſunt, & problema reddunt impoſſibile.

Reperienda enim eſſet quantitas prædita proprietatibus, quibus neceſſario caret.

Ex. gr. Ex dato puncto D ducenda proponatur in ſubjectam rectam A C perpendicularis datæ longitudinis. Quia ex uno puncto in eandem rectam una perpendicularis agi poteſt, ſecunda lex ſupervacanea eſt, ſi punctum datum ita diſtat a ſubjecta linea, ut perpendicularis DB ſit petitæ longitudinis; ſin minus eſt contradictoria. Tab. A. Fig. 4.

19. Si ſecundum, *harum legum congeries inveniri ſolum poteſt in tot quantitatibus, quot competit lex minus generalis.*

Hæc enim, ubi ſe generalioribus addit, quantitatum reſpondentium numerum minuit.

Sic, ſi petitur numerus par, qui viginti non ſuperet, & quem ternarius metiatur. Prima lex, ut numerus viginti major non ſit, congruit viginti numeris: ſecunda, ut par numerus ille, decem: tertia, ut ternarius eum metiatur, convenit ſex numeris, ambæ ſimul, ut patet, ſervatæ reperiri poſſunt (ut plurimum) in ſex numeris, quia lex ſecunda, quæ ineſt ſolum ſex numeris, pluribus adeſſe nequit.

Poteſt autem fieri, ut plures leges cum ſimul uniuntur, minuant numerum quantitatum problema ſolventium.

Quia poteſt accidere, ut una ex iis conveniat nonnullis quantitatibus, quibus altera non convenit. Sic in exemplo nuper allato, tertia lex convenit ſex numeris, 3, 6, 9, 12, 15, 18, e quibus tres aufert ſecunda, ſi eam tertiæ jungas, nam ex his tres tantum ſunt pares, 6; 12; 18; & vice verſa, e decem quibus ſecunda lex inerat, tertia delet ſeptem.

20. Si tertium, *numerus quantitatum problema ſolventium, nunquam erit infinitus; & nunquam major numero quantitatum legi minus generali ſatisfacientium, quo tamen numero poteſt eſſe minor.*

Proponantur *ex. gr.* inveniendi tres numeri integri continue proportionales, quorum minimus infra unitatem, maximus ſupra decadem non

non ſit, duo vero primi ſint pares. Numeri continue proportionales infiniti ſunt, ut & ii, qui ſunt inter unitatem, & decadem, ſed quinque ſunt numeri pares, & duæ ſunt, ſeries numerorum problema ſolventes, 2; 4; 8; & 2, 2, 2.

21. Si quartum, *numerus quantitatum problema ſolventium poteſt eſſe infinitus, ſed etiam finitus.*

Quia, licet quævis lex infinitis quantitatibus competat, duæ ſimul poſſunt ſolum inveniri in determinato quantitatum numero.

Sic ſi recta agenda eſt, quæ tranſeat per datum in data recta punctum, & quæ ad datam rectam ſit normalis: infinitæ ſunt rectæ, quæ per datum punctum tranſire poſſunt, infinitæ etiam normales ad datam rectam, tot enim ſunt, quot puncta in recta; tamen hæ duæ leges ſimul in una recta ſervatæ comperiuntur. Sic etiam in aliis exemplis, leges, quas conſideravi tanquam convenientes dato quantitatum numero, infinitis reipſa & in abſtracto conveniunt, ſed quia facile conſtat, quot & quibus competant in relatis caſibus, ideo eas pro peculiaribus habui.

22. Igitur ex legum conſideratione prævideri poteſt, utrum una, vel plures, vel infinitæ quantitates problemati reſpondeant, & illud ſolvant. Numerus enim harum quantitatum a legibus tum ſeorſim ſumptis, tum ſimul connexis omnino pendet.

23. *Quæ ſuperius dicta ſunt, intelligi debent de legibus, quæ reſpiciunt quantitates omnes, quas problema inveniendas propoſuit. Nam ſi lex una pertineret ad unam quantitatem, altera ad alteram, fieri poſſet, ut numerus quantitatum problemati reſpondentium eſſet major numero quantitatum unam legem ſervantium; quia quantitates, quæ uni legi parent, diverſimode jungi & combinari poſſunt cum aliis alteram legem ſervantibus; quo pacto numerus quantitatum mirum quantum augeretur.*

Ex. gr. proponantur inveniendi tres numeri continue proportionales, quarum duo primi ſint pares, & neuter horum duorum ſit vel infra unitatem, vel ſupra decadem. Prima lex inveniri debet, ex terminis, in tribus numeris quæſitis, ſecunda vero, & tertia lex non obſtringunt tertium numerum. Numeri autem pares ab unitate ad decadem quinque omnino ſunt; 2; 4; 6; 8; 10; multo tamen plures quam quinque proportiones inveniri poſſunt; ſiquidem ſi primus ex aſſumtis ponatur minimus, jam habeantur quatuordecim proportiones; 2.2.2: 2.4.8: 2.6.18: 2.8.32: 2.10.50: 4.4.4: 4.6.9: 4.8.16: 4.10.25: 6.6.6: 6.8.$16\frac{2}{3}$: 6.10.$16\frac{2}{3}$: 8.8.8: 8.10.$12\frac{1}{2}$; 10.10.10: & iterum quatuordecim habebuntur ſi primus ex aſſumptis ſit maximus, ut facile conſtat.

24. Problema, cui certus quantitatum numerus ſatisfacit, dicitur *determinatum*; *indeterminatum* vero, cui infinitus.

DE NATURA ÆQUATIONUM.

25. Cum de ſolis quantitatibus agat Matheſis, & quantitates ſolum æqualitatis ac inæqualitatis ſint capaces; inæqualitates autem, ſeu proportionibus, ſeu aliis modis ad æqualitates revocari poſſint, per æquationem exprimere ſemper licet quamvis problematis legem.

26. Tot ergo ſtatim æquationes præbet problema, quot ſunt ejus leges.

27. Quævis lex haberi poteſt pro peculiari problemate, nam idem eſt legem per æquationem exprimere, & quærere quantitates proprietate data præditas.

28. Igitur ex quavis lege per æquationem expoſita excudi poſſunt quantitates, quibus hæc proprietas convenit, quæ quantitates aliquibus aliis reperientur æquales (per æquationis definitionem).

29. Quantitates, quæ ſimul alicui ſunt æquales, hujus *valores* dicuntur.

Sic, ſi proponantur inveniendæ tres quantitates continue proportionales, & prima dicatur x; ſecunda y; tertia z, quia, ex hypotheſi, $x. y :: y. x$, erit $zx = y^2$ (Eucl. 16. VI.), quæ æquatio exprimit unam problematis legem. Jam vero eunctis per x diviſis eſt $z = \frac{y^2}{x}$; & eſt $\frac{y^2}{x}$ valor ipſius z.

30. Æquatio exprimens unam problematis legem, aut dans quantitates una proprietate præditas dicitur *primaria*.

Ex. gr. Æquatio ſuperior $xz = y^2$; aut $z = \frac{y^2}{x}$ eſt *æquatio primaria*; & tales erunt (ſi ponantur hæ tres quantitates ſimul æquales 20; & earum quadrata æqualia 140) æquationes $x + y + z = 20$; & $x^2 + y^2 + z^2 = 140$.

31.

31. *Si ergo hæc per æquationem primariam expreſſa conveniat quantitatibus numero infinitis, æquatio primaria habebit valores numero infinitos, plures vero ſi ſolummodo pluribus.*

Nam hæc æquatio ſolum legem exprimit, & quantitates, quas præbet, ab hac lege ſola determinantur; ſed hæc lex determinare nequit niſi quantitates numero infinitas, per primam hypotheſim, aut plures per ſecundam, ergo &c.

Inferius explicabimus, quænam ſit æquatio habens valores numero infinitos, & quando, & quomodo hoc accidere poſſit. Nunc probaſſe ſufficiat, quod ſi æquatio primaria, (puta $z = \frac{y^2}{x}$; aut $x + y + z = 20$; vel $x^2 + y^2 + z^2 = 140$) habere poteſt valores plures, aut etiam numero infinitos; reipſa habet, & quidem neceſſario.

32. *Si quantitatis valor repertus ut ſupra, ponatur in alias æquationes primarias pro ſymbolo quantitatem illam exponente, hæc æquatio, quæ prius exprimebat unam problematis legem, duas ſimul exprimet.*

Nam valor inventus continet unam legem; æquatio, in qua valor ſymbolo ſubſtituitur, continet legem aliam a prima diverſam; ergo æquatio, & valor ſimul duas leges continebunt, & exprimen.

Sic, ſi in æquatione $x + y + z = 20$ pono $\frac{y^2}{x}$ pro z habeo $x + y + \frac{y^2}{x} = 20$; quæ ſimul indicat tres hos numeros eſſe in proportione continua (nam aliter tertius eſſe nequit æqualis quadrato ſecundi diviſo per primum) & hos tres ſimul ſumptos æquare 20.

Si vero in æquatione $x^2 + y^2 + z^2 = 140$, pono pro z^2 ejus valorem $\frac{y^4}{x^2}$; æquatio hinc exſurgens ($x^2 + y^2 + \frac{y^4}{x^2} = 140$) ſignificabit rurſus hos tres numeros eſſe in proportione continua (quia enim $x. y :: y. z$; etiam $x^2. y^2 :: y^2. z^2$ (Eucl. 27. VI.) & $z^2 = \frac{y^4}{x^2}$) & eorum quadrata ſimul æquare 140.

33. Ex una harum æquationum duas ſimul leges exprimentium haberi poteſt valor alicujus quantitatis, quæ dabit quantitates duabus proprietatibus ſimul gaudentes; & hæ quantitates erunt numero infinitæ, ſi duæ leges, de quibus agitur, junctæ infinitis quantitatibus conveniant.

34. Æquatio exprimens una duas leges, aut dans quantitates, in quibus hæ duæ leges junctæ reperiuntur, vocatur *ſecundaria.*

35. Si valor erutus ex una æquationum ſecundariarium, in aliis ſecundariis ponatur, habebitur æquatio exprimens tres leges ſimul atque ita porro.

Hoc pacto æquatio $x + y + \frac{y^2}{x} = 20$ dat per methodum explicatam Sect. II. Art. XI. & XIV. valorem ipſius y, aut x, qui valor ſi ſcribatur in $x^2 + y^2 + \frac{y^4}{x^2} = 140$; habebitur æquatio continens tres leges ſimul; duas enim jam continebat, & tertiam nunc addimus.

36. Si quando indicare voluerimus æquationes continentes tres leges, aut quatuor &c. liceat eas dixiſſe (barbaro verbo, & inuſitato ſit venia) *tertiarias*; *quartarias &c.*

37. Jungendo ſic leges, ex numero quantitatum, quibus priores leges conveniebant, eæ delentur, quæ novas leges reſpuunt, aut ſeorſim conſideratæ & per ſe, aut cum jam appoſitis connexas.

38. Pergendo ut docuimus *perveniemus tandem ad æquationem unam omnes problematis leges continentem; ea tot præbebit valores, quot ſunt quantitates problema ſolventes.*

Quia quævis operatio ſolum e majore numero expulit quantitates, quibus novæ leges aptari non poterant, quare manſerunt omnes illæ, quibus leges nuper introductæ conveniebant.

Inſuper hæc æquatio liberata eſt a tot incognitis, a quot per leges problematis liberari poterat.

Nam quævis lex dat æquationem ſuam, & docti ſumus (Sect. II. ab Art. XI. ad XVI. incluſive) tot incognitas tollere, quot habemus æquationes.

Ceterum puto, quod nulli moleſtiam parient mutationes, quæ per additionem, ſubductionem, multiplicationem, diviſionem, & extractionem radicis, fiunt æquationibus, jam enim demonſtratum eſt has operationes æqualitatem non turbare, & evidentius eſt, quam demonſtrari debeat, eas nullo pacto leges immutare, cum ex his legibus directe fluant.

39. Æquatio continens omnes problematis leges nuncupatur *Finalis*, aut *Solitaria.*

Hic autem repetenda, & obſervanda ſunt, quæ

Digitized by Google

quæ de concinnanda æquatione ſolitaria dicta fuerunt (Sect. II. Cap. II. ab Art. III. ad X. incluſive).

40. Si ergo tot leges problemata circumſcribunt, quot ſunt diverſæ quantitates quærendæ, aut quot incognitæ ſumptæ fuerunt in æquationibus primariis, habebit æquatio finalis unicam incognitam. Si vero una lex deeſt, duas quæſitas habebit, tres, quatuor, &c.; ſi tres, quatuor, &c., leges abſint, &c.

41. Æquatio unius dimenſionis, in qua eſt unica incognita, habet unum valorem.

Sume quamvis æquationem unius dimenſionis $x = b - a + \frac{c^2}{f}$ &c. fac additiones, ſubductiones &c. ab æquatione præſcriptas, & unum ſemper invenies valorem; ratio autem nimis evidens eſt, hic enim una quantitas uni dato datarum aggregato eſt æqualis, ergo non pluribus.

42. Quotvis æquationes unius dimenſionis ſimul junctæ per additionem, aut ſubductionem dant ſemper æquationem unius dimenſionis (Sect. I. N°. 22.). Diviſio autem quantitatum dimenſiones minuit (Sect. I. N°. 99.) igitur *multiplicatio ſola conſtituere poteſt æquationem plurium dimenſionum*; *ſi hæc æquatio conſtet ex pluribus, quarum ſingulæ ſunt unius dimenſionis.*

43. *Cum eadem incognita indicat plures valores idem problema ſolventes, plerumque quiſque valor facit cum cognita æquationem unius dimenſionis.*

Proponantur *Ex. gr.* inveniendi tres numeri continue proportionales, ut minimus, & maximus ſimul conficiant 30, & medius, ac maximus ſimul 36. Hi numeri ſunt 3. 9. 27; & 6. 12. 24. Si igitur minimus dictus fuerit x; medius y, maximus z; habebo $x = 3$, & $x = 6$; item $y = 9$, & $y = 12$; denique $z = 24$, & $z = 27$, quæ omnes ſunt æquationes unius dimenſionis conſtantes ex ignota, & valore ſuo. Hoc autem non ſemper accidit, quamvis quiſquis valor in ſe ſit determinatus & unicus, vel quia deeſt regula generalis ſolvendi æquationes, vel forte ob alias rationes, de quibus in capite *de Natura radicum æquationis.*

44. Sed, cum æquatio finalis habet unicam incognitam, & plures ſunt quantitates problema ſolventes, hæc æquatio quantitates has omnes complecti debet (N°. 38. hujus). Tunc ergo *æquatio finalis conflatur ex tot æquationibus unius dimenſionis quot ſunt quantitates problemati ſatisfacientes, & hæ quantitates per multiplicationem in unam coactæ ſunt* (N°. 42. hujus), *ac æquatio ad tot dimenſiones aſcendit, quot ſunt quantitates problemati reſpondentes, aut* (quod idem eſt) *æquationes ſimplices, e quibus conſtat* (Sect. I. N°. 47.).

Detur *Ex. gr.* æquatio

$$x^3 \begin{matrix} -a \\ -b \\ -c \end{matrix} x^2 \begin{matrix} +ab \\ +ac \\ +bc \end{matrix} x - abc = 0;$$

quæ eſt trium dimenſionum; quærendo ejus diviſores per regulas ſupra traditas invenio eos eſſe $x - a$; $x - b$; $x - c$; unde duci poteſt $x = a$; $x = b$; & $x = c$. Non tamen ſemper inveniri ſic poſſunt æquationes ſimplices, quibus conſtat compoſita, quia aliquando valores ſunt ſurdi, regulæ autem ſupra traditæ non docent invenire valores ſurdos. Vide caput *de Natura radicum æquationis.*

45. Rurſus *æquatio finalis unicam incognitam continens tot habere poteſt valores, quot dimenſiones.*

Nam quantitas ad plures dimenſiones non evehitur niſi multiplicatione, & ad tot dimenſiones aſcendit, quot ſunt factores, æquatio autem finalis ſolum complectitur quantitates problema ſolventes; & eas quidem omnes (N°. 38. hujus) ergo factores erunt hæ quantitates ipſæ; quæ ideo tot erunt, quot æquationis dimenſiones.

Non tamen hoc ſemper accidit, ut melius infra in capite *de Natura radicum æquationis.*

46. *Igitur harum quantitatum numerus determinatus eſt, ubi æquatio iſta ad indeterminatum dimenſionum numerum non aſcendit.* Quare *omnis æquatio finalis ad quemlibet, ſed certum gradum ſe extollens, & unicam incognitam continens ſemper pertinet ad problema determinatum, & problema determinatum ſemper dat æquationem unica incognita impeditam & ad certum gradum evectam.*

47. *Æquatio duas incognitas complectens ſemper ſpectat problema indeterminatum.*

Nam altera ex incognitis determinata non eſt, alioquin valor ejus inveniri poſſet, & ipſa a data æquatione exterminari; debet igitur habere infinitum valorum numerum, quare & altera incognita, cujus valor ab hac pendet.

Res manifeſta fiet exemplo, ſed prius obſervo

Digitized by Google

ſervo omnes quantitates, quæ ad abſurdum non deducunt, poſſe eſſe valores datæ æquationis, aut propoſitum problema ſolvere: aliter enim poſſent, quia hoc abſurdum non eſt, & non poſſent ex hypotheſi.

Sit ergo æquatio $x \pm 16 = y$: Hic x poteſt eſſe numerus infinitus, quia tunc $x \pm 16$ eſſet adhuc infinitus, & ideo y; quod nullam contradictionem involvit. Rurſus x poteſt eſſe æqualis nihilo, fieret enim tunc $\pm 16 = y$, quod item fieri poteſt. Sed & negativa poteſt eſſe x & ad infinitum negativum aſcendere, quia $- x + 16$ eſt quantitas infinita negative, & talis eſt etiam y, quod abſurdum non eſt. Poteſt igitur x eſſe negative & poſitive infinita, & habere valores omnes intermedios, ut patet ponenti pro x numerum quemvis. Quare tunc æquatio $\pm x \pm 16 = y$ eſt indeterminata; ſed, ſi pro 16 ſubſtituas generalem ſymbolum m, hæc æquatio complectetur omnes æquationes unius dimenſionis, quæ duas habent incognitas. Idem intellige de æquationibus plurium dimenſionum, quæ duas habent incognitas.

Quin, etſi x infinita nunquam eſſe poſſet, ſed nunquam data minor, & nunquam altera data major fieret, tamen problema eſſet indeterminatum, quia exceſſus majotis ex datis ſupra minorem eſt in infinitum diviſibilis; id eſt ex eo quantitatum inæqualium numerus infinitus ſumi poteſt, & quivis ex his valor æquationis eſſe poteſt, quia eſt intra præſcriptos limites.

Ex. gr. ſit æquatio $16 - 8x + xx = 6y - yy$. Tunc x eſſe nequit æqualis nihilo, ſi enim eſſet, haberemus $16 = 6y - yy$; & (hinc inde addendo yy) $yy + 16 = 6y$; & (utrinque auferendo 16) $yy = 6y - 16$, & $y = 3 \pm \sqrt{(9 - 16)}$ Sect. II. Art. X.) $= 3 \pm \sqrt{(-7)}$, quod eſt abſurdum (Sect. I. No. 80.), & idem invenietur ſi x ponatur minor quam 0: Sit enim $x = -a$, erit $16 - 8x + xx = 16 + 8a + a^2 = 6y - y^2$; ac (in contrarias reſpective partes translatis $16 + 8a + a^2$, ac $-y^2$) $y^2 = 6y - 16 - 8a - a^2$, & extracta radice, $y = 3 \pm \sqrt{(9 - 16 - 8a - aa)} = 3 \pm \sqrt{(-7 - 8a - aa)}$.

Item x nequit eſſe major quam 7, at poteſt $x = 7$. Tunc enim æquatio foret $16 - 56 + 49 = 6y - yy = 9$, & (hinc inde addendo yy) $9 + 6y = yy$, & $y = 3 \pm \sqrt{(9 - 9)} = 3$; quod fieri poteſt. Si vero ponatur x major quam 7 erit ſemper qnod reſtat poſt ſubſtitutionem majus quam 9, & ideo invenienda eſſet radix quadrati negativi, quod fieri non poteſt. Quod autem ſemper majus ſit in hac hypotheſi, quod ſupeteſt poſt ſubſtitutionem facile probatur; eſt enim 9 ſupra repertus $= 16 - 8 \cdot 7 + 7 \cdot 7$. Atqui (ſi x major ſit quam 7) hic numerus minor eſt quam $16 - 8 \cdot x + xx$, demtis enim utrinque æqualibus 16, reſtat illinc $- 8 \cdot 7 + 7 \cdot 7; = (-8 + 7)\,7$: hinc vero $-8 \cdot x + xx = (-8 + x)\,x$, & eſſe debet $-8 + x$ major quam $-8 + 7$, quia ex majore x tantundem aufertur ac ex minore 7; igitur $(-8 + 7)\,7$ minor eſt quam $(-8 + x)\,7$, & fortius quam $(-8 + x)\,x$. Igitur x continetur intra 7 & 1, ſed infiniti numeri ſunt intra hos fines, ergo &c.

Res autem poteſt aliter demonſtrari. Duæ ſunt incognitæ in æquatione quia deeſt una lex; ſed lex una ab altera non pendet, imo pendere non poteſt (eſſet enim ſuperflua), ergo infinitæ ſunt leges, quæ pro arbitrio præſcribi poſſunt; ergo infiniti etiam valores incognitæ, qui ab infinitis legibus determinantur.

Ex. gr. in problemate (Ni. 43. hujus) tres ſunt leges; ut numeri ſint proportionales; ut maximus & minimus ſimul faciant 30; medius vero & maximus 36; & tres pariter quæſitæ x; y; z. prima lex $(x . y :: y x)$ dat æquationem $z = \frac{y^2}{x}$; ſecunda $x + z = 30$; tertia $y + z = 36$, aut (ponendo in ſecunda, & tertia valorem z repertum in prima) $x + \frac{yy}{x} = 30$; $y + \frac{yy}{x} = 36$, ſive (ſublatis fractionibus) $xx + yy = 30x$, & $xy + yy = 36x$, & (transferendo in prima xx, & in ſecunda xy) $30x - xx = yy = 36x - xy$; quare (transferendo xy) $xy + 30x - xx = 36x$; & (transferendo $30x - xx$, ac dividendo per x) $y = 6 + x$, & quadrando $yy = 36 + 12x + xx$, qui valor ſi ponatur in æquatione $xx + yy = 30x$ dat $36 + 12x + 2xx = 30x$, & (cunctis diviſis per 2 & translatis $12x + 36xx$) $xx = 9x - 18$, & $x = \frac{9}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{81}{4} - 18\right)} = \frac{9}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{81 - 72}{4}\right)} = \frac{9}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{9 \pm 3}{2} = 6$; aut $= 3$, ut ſupra; quare $y = 6 + x = 12$, aut $= 9$; & $z = 30 - x = 24$, aut $= 27$.

Hic tres leges dant problema determinatum; at pone alteram, (puta primam) abeſſe; igitur inveniendi ſunt tres numeri, ita ut maximus & minimus ſimul faciant 30; medius vero & maximus 36; ſint hi tres nnmeri x; y; z; igitur $x + z = 30$; & $y + z = 36$; quare ex illa $z = 30 - x$; ex hac $z = 36 - y$; id eſt $30 - x = 36 - y$; & $y - x = 6$.

Quid

Digitized by Google

res in quæſtionibus ad æquationem redigendis tentet. Propoſita autem aliqua quæſtione, Artificis ingenium in eo præſertim requiritur ut omnes ejus conditiones totidem æquationibus deſignet. Ad quod faciendum perpendet imprimis an propoſitiones ſive ſententiæ, quibus enunciatur, ſint omnes aptæ quæ terminis algebraicis deſignari poſſint, haud ſecus quam conceptus noſtri characteribus græcis vel latinis. Et ſi ita, (ut ſolet in quæſtionibus quæ circa numeros vel abſtractas quantitates verſantur,) tunc nomina quantitatibus ignotis, atque etiam notis, ſi opus fuerit, imponat; & ſenſum quæſtionis ſermone, ut ita loquar, analytico deſignet. Et conditiones ejus ad algebraicos terminos ſic tranſlatæ tot dabunt æquationes, quot ei ſolvendæ ſufficiunt.

Quemadmodum ſi quærantur tres numeri continue proportionales quorum ſumma ſit 20, & quadratorum ſumma 140; poſitis x, y, & z nominibus numerorum trium quæſitorum, quæſtio e latinis literis in algebraicas vertetur ut ſequitur.

Quæſtio enunciata.

Latine Quæruntur tres numeri his conditionibus,
Algebraice $x.\ y.\ z$?
Latine Ut ſint continue proportionales,
Algebraice $x.\ y :: y.\ z.$ ſive $xz = yy$.
Latine Ut omnium ſumma ſit 20.
Algebraice $x + y + z = 20$.
Latine Et ut quadratorum ſumma ſit 140.
Algebraice $xx + yy + zz = 140$.

Atque ita quæſtio deducitur ad æquationes $xz = yy$, $x + y + z = 20$ &c

Quid tum? quomodo determinabimus x, aut y? Ex alia lege, ſed ex qua? Superior jam dedit quantitates quas invenimus. Pone *Ex. gr.* quod $x + y = 14$; & habebis $y = 14 - x$; qui valor ſubſtitutus in $y - x = 6$ dat $14 - 2x = 6$; & $x = 4$; unde $y = 10$, & $z = 26$; pro 14 pone quemvis ex infinitis numeris, quos concipere potes, & invenies infinitos valores diverſos. Muta legem, ponendo *Ex. gr.* pro ſumma ipſarum x, & y earum differentiam datam, & rurſus infinitos numeros invenies. Innumeræ vero ſunt leges (ſalvis duabus jam aſſignatis) quas comminiſci potes, ut, quod hi tres numeri ſint in proportione arithmetica; quod factum primi in ſecundum, aut primi in tertium, aut ſecundi in tertium detur; quod ratio primi ad ſecundum, aut primi ad tertium, aut ſecundi ad tertium detur, aut ratio cujuſvis poteſtatis primi ad æque altam poteſtatem ſecundi, vel tertii &c. quare patet propoſitum.

48. Igitur *problemata, in quibus tres incognitæ ſunt, longius abſunt a problematibus determinatis, quam quæ duas tantum involvunt.*

Quia ſcilicet una lex iis deeſt, ut indeterminata fiant, & de hac lege dici poſſunt, quæ numero præcedenti fuerunt allata.

49. Problemata, in quorum æquationibus ſolitariis tres ſunt incognitæ, dixiſſe liceat *plusquam indeterminata.*

50. Problema determinatum, dempta una lege vertitur in indeterminatum, & vice verſa. Item problema indeterminatum, una lege ſublata ſit plusquam indeterminatum &c.

& $xx + yy + zz = 140$. quarum ope x, y & z per regulas ſupra traditas inveſtigandi ſunt. (*b*)

II. Ceterum notandum eſt ſolutiones quæſtionum eo magis expeditas & artificioſas ut plurimum evadere quo pauciores incognitæ quantitates ſub initio ponuntur (*c*). Sic in hac quæſtione poſito x pro primo numero & y pro ſecundo, erit $\frac{yy}{x}$ tertius continue proportionalis; quem proinde ponens pro tertio numero quæſtionem ad æquationes ſic reduco.

Quæſtio enunciata

Latine Quæruntur tres numeri continue proportionales,

Algebraice $x. \; y. \; \frac{yy}{x}$?

Latine Quorum ſumma ſit 20,

Algebraice $x + y + \frac{yy}{x} = 20$.

Latine Et quadratorum ſumma 140.

Algebraice $xx + yy + \frac{y^4}{xx} = 140$.

Habentur itaque æquationes $x + y + \frac{yy}{x} = 20$ & $xx + yy + \frac{y^4}{xx} = 140$ quarum reductione x & y determinandi ſunt.

Aliud exemplum accipe. Mercator quidam nummos ejus triente quotannis adauget, demptis 100 ℔. quas annuatim impendit in familiam, & poſt tres annos ſit duplo ditior. Quæruntur nummi.

Ad hoc autem reſolvendum ſciendum eſt quod plures latent propoſitiones, quæ omnes ſic eruuntur & enunciantur.

Latine Mercator habet nummos quoſdam.

Algebraice x.

Latine Ex quibus anno primo expendit 100 ℔.

Algebraice $x - 100$.

Latine Et reliquum adauget triente.

Al-

(*b*) Vide ſupra Sect. II. Art. III, & ſeq. & præcipue XV., item infra.

(*c*) Hoc nihil aliud eſt, quam ſtatim invenire quantitatem, cui aliqua ex problematis legibus competit. Hoc autem facere uno intuitu & ſine calculi ambagibus ſane ingenioſum eſt, & hercle ingenioſiſſimum eſſet ita uno ictu oculi problemata ſolvere, ſed hoc difficillimum eſt, & ideo Algebra fuit inventa; nec ſane tironibus facile eſt hanc viri acutiſſimi regulam ſervare, & ideo debent initio eam negligere, donec uſus vires ingenii auxerit.

Digitized by Google

Algebraice $x - 100 + \frac{x - 100}{3}$ ſive $\frac{4x - 400}{3}$.

Latine Annoque ſecundo expendit 100 ℔.

Algebraice $\frac{4x - 400}{3} - 100$ ſive $\frac{4x - 700}{3}$.

Latine Et reliquum adauget triente.

Algebraice $\frac{4x - 700}{3} + \frac{4x - 700}{9}$ ſive $\frac{16x - 2800}{9}$.

Latine Et ſic anno tertio expendit 100 ℔.

Algebraice $\frac{16x - 2800}{9} - 100$ ſive $\frac{16x - 3700}{9}$.

Latine Et reliquo trientem ſimiliter lucratus eſt.

Algebraice $\frac{16x - 3700}{9} + \frac{16x - 3700}{27}$ ſive $\frac{64x - 14800}{27}$.

Latine Fitque duplo ditior quam ſub initio.

Algebraice $\frac{64x - 14800}{27} = 2x$.

Quæſtio itaque ad æquationem $\frac{64x - 14800}{27} = 2x$ redigitur; cujus reductione eruendus eſt x. Nempe duc eam in 27 & fit $64x - 14800 = 54x$; ſubduc $54x$ & reſtat $10x - 14800 = 0$, ſeu $10x = 14800$, & dividendo per 10 fit $x = 1480$. Quare 1480 ℔ ſunt nummi ſub initio ut & lucrum.

Vides itaque quod ad ſolutiones quæſtionum, quæ circa numeros vel abſtractas quantitatum relationes ſolummodo verſantur, nihil aliud fere requiritur quam ut e ſermone latino vel alio quovis, in quo problema proponitur, tranſlatio fiat in ſermonem (ſi ita loquar) algebraicum, hoc eſt in characteres qui apti ſunt ut noſtros de quantitatum relationibus conceptus deſignent. Nonnunquam vero poteſt accidere quod ſermo quocum ſtatus quæſtionis exprimitur ineptus videatur qui in algebraicum poſſit verti; ſed paucis mutationibus adhibitis, & ad ſenſum potius quam verborum ſonos attendendo, verſio reddetur facilis. Sic enim quælibet apud Gentes loquendi formæ propria habent idiomata, quæ ubi obvenerint, tranſlatio ex unis in alias non verbo tenus inſtituenda eſt, ſed ex ſenſu determinanda. Ceterum ut hujuſmodi problemata hac methodo ad æquationes redigendi familiaritatem convincam & illuſtrem, & cum artes exemplis facilius quam præceptis addiſcantur, placuit ſequentium problematum ſolutiones adjungere:

CAPUT

CAPUT SECUNDUM.

PROB. I.

I. **D***Ata duorum numerorum ſumma* a *&* *differentia quadratorum* b, *invenire numeros?*

Sit eorum minor x, & erit alter $a - x$, eorumque quadrata xx & $aa - 2ax + xx$: Quorum differentia $aa - 2ax$ ſupponitur b. Eſt itaque $aa - 2ax = b$, indeque per reductionem $aa - b = 2ax$ ſeu $\frac{aa - b}{2a}$ $(= \frac{1}{2}a - \frac{b}{2a}) = x$. (*a*)

Exemplum.

Si ſumma numerorum, ſeu a, ſit 8, & quadratorum differentia, ſeu b, 16; erit $\frac{1}{2}a - \frac{b}{2a}$ $(= 4 - 1) = 3 = x$, & $a - x = 5$. Quare numeri ſunt 3 & 5.

PROB. II.

IV. *Invenire tres quantitates* x, y *&* z *quarum paris cujuſque ſumma datur.*

Si ſumma paris x & y ſit a; paris x & z, b; ac paris y & z, c. Pro determinandis tribus quæſitis x, y & z tres habebuntur æquationes $x + y = a$, $x + z = b$, & $y + z = c$. Jam ut incognitarum duæ, puta y & z, exterminentur, aufer x utrinque in prima & ſecunda æquatione, & emergent

(*a*) Hoc problema poteſt aliter quoque ſolvi, ſed prius demonſtrandum hoc theorema utiliſſimum.

51. *Ex duabus quantitatibus major æquat aggregatum ex ſemiſumma ambarum, & ex earum ſemidifferentia; minor vero exceſſum ſemiſumma ſupra ſemidifferentiam.*

TAB. A Fig. 5. Recta BC majorem; CA minorem quantitatem; tota AB ſummam earum; AF dimidiatam ſummam exprimant; & ſumatur BE æqualis CA, erit ergo EC æqualis differentiæ ipſarum BC; CA; ſed quia BF æquat FA, & AC æquat EB; erit ergo (Eucl. Ax. 2.) CF æqualis FE ſemi differentiæ. At BC æquat BF; FC ſimul; AC æquat differentiam ipſarum AF; FC; ergo &c.

His poſitis, ſint duo numeri in problemate quæſiti x; y, & $x + y = 2c$; $x - y = 2z$ erit $x = c + z$; $xx = cc + 2cz + zz$; & $y = c - z$; $yy = cc - 2cz + zz$, at $b = xx - yy = cc + 2cz + zz - cc + 2cz - zz = 4cz$;

ergo $b = 4cz$, & $\frac{b}{4c} = z$, ſi jam $2c = a$; fiet $z = \frac{b}{2a}$, $x = \frac{a}{2} + \frac{b}{2a}$; at y minor $= \frac{a}{2} - \frac{b}{2a}$ ut in Auctoris ſolutione.

gent $y = a - x$, & $z = b - x$, quos valores pro y & z ſubſtitue in tertia, & orietur $a - x + b - x = c$ & per reductionem $x = \frac{a + b - c}{2}$. Invento x æquationes ſuperiores $y = a - x$ & $z = b - x$ dabunt y & z. (*b*)

EXEMPLUM.

Si ſumma paris x & y ſit 9, paris x & z 10, & paris y & z 13, tum in valoribus x, y & z ſcribe 9 pro a, 10 pro b, & 13 pro c; & evadet $a + b - c = 6$, adeoque x ($= \frac{a + b - c}{2}$) $= 3$, y ($= a - x$) $= 6$, & z ($= b - x$) $= 7$.

PROB. III.

V. *Quantitatem datam ita in partes quotcunque dividere ut majores partes ſuperent minimam per datas differentias.*

Sit a quantitas in quatuor ejuſmodi partes dividenda, ejuſque prima atque minima pars x, & ſuper hanc exceſſus ſecundæ partis b, tertiæ partis c & quartæ partis d; & erit $x + b$ ſecunda pars, $x + c$ tertia pars & $x + d$ quarta pars, quarum omnium aggregatum $4x + b + c + d$ æquatur toti lineæ a. Aufer jam utrinque $b + c + d$ & reſtat $4x = a - b - c - d$ ſive $x = \frac{a - b - c - d}{4}$. (*c*)

EXEM-

(*b*) Vel inventurus x ſubduc $y + z = c$ ex $x + z = b$; fiet $x - y = b - c$; quam adde ipſi $x + y = a$; erit

$2x = a + b - c$; & $x = \frac{a + b - c}{2}$.

Ut reperias y ſubtrahe $x + z = b$ ex $x + y = a$; ſupererit $y - z = a - b$; huic adde $y + z = c$; obtinebis

$2y = a - b + c$, & $y = \frac{a - b + c}{2}$;

Pro z ex $y + z = b$ deme $x + y = a$; reſtabit $z - y = b - a$, cui adde $y + z = c$, exſurget $2z = b - a + c$; & $z = \frac{b - a + c}{2}$.

Aut quia $x + z = b$, erit $z = b - x$; ergo $x + y + z = a + b - x$ (EUCL. Ax. 1.) eſt enim $x + y = a$, & tranſponendo $2x = a + b - y - z =$ (quia $y + z = c$) $a + b - c$, & $x = \frac{a + b - c}{2}$.

(*c*) Sit data quantitas a dividenda in tot partes, quot unitates ſunt in m, & detur differentia inter partium minimam x, & proximam, inter eandem x & ſequentem, & ſic de ceteris. Jam data a debet æquare mx auctam omnibus differentiis (EUCL. Ax. 19.) quæ cum dentur, omnes exprimantur ſymbolo d,

ergo $a = mx + d$,

& $\frac{a - d}{m} = x$.

Nunc pro m ſubſtitue quemvis numerum, ex: gr. 7; pro a, 50, ſitque $d = e + f + g + h + l + m = 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7$, erit

$x = \frac{50 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 7}{7}$

$= \frac{23}{7} = 3\frac{2}{7}$, proxima pars $= 5\frac{2}{7}$; alia $6\frac{2}{7}$, alia $= 7\frac{2}{7}$, ſequens $= 8\frac{2}{7}$, tum $9\frac{2}{7}$, demum $10\frac{2}{7}$.

Digitized by Google

EXEMPLUM.

Proponatur linea 20 pedum ſic in 4 partes diſtribuenda ut ſuper primam partem exceſſus ſecundæ ſit 2 pedum, tertiæ 3 pedum, & quartæ 7 pedum. Et quatuor partes erunt x ($= \frac{a-b-c-d}{4}$ ſive $\frac{20-2-3-7}{4}$) $= 2$, $x+b = 4$, $x+c = 5$, & $x+d = 9$.

Eodem modo quantitas in plures partes iiſdem conditionibus dividitur.

PROB. IV.

VI. *Viro cuidam nummos inter mendicantes diſtribuere volenti deſunt octo denarii quo minus det ſingulis tres denarios. Dat itaque ſingulis duos denarios & tres denarii ſuperſunt. Quæritur numerus mendicantium.*

Eſto numerus mendicantium x & deerunt 8 denarii quo minus det omnibus $3x$ denarios; habet itaque $3x-8$ denarios. Ex his autem dat $2x$ denarios, & reliqui denarii $x-8$ ſunt tres. Hoc eſt $x-8=3$ ſeu $x=11$.

PROB. V.

VII. *Si Tabellarii duo A & B, 59 milliaribus diſtantes tempore matutino obviam eant, quorum A conficit 7 milliaria in 2 horis, & B 8 milliaria in 3 horis, ac B una hora ſerius iter inſtituit quam A: quæritur longitudo itineris quod A conficiet antequam conveniet B.*

Dic longitudinem illam x; & erit $59-x$ longitudo itineris B. Et cum A pertranſeat 7 milliaria in 2 horis, pertranſibit ſpatium x in $\frac{2x}{7}$ horis, eo quod ſit 7 milliaria. 2 horas :: x milliaria. $\frac{2x}{7}$ horas. Atque ita cum B pertranſeat 8 milliaria in 3 horis, pertranſibit ſpatium ſuum $59-x$ in $\frac{177-3x}{8}$ horis. Jam cum horum temporum differentia ſit 1 hora; ut evadant æqualia adde differentiam illam breviori tempori, nempe tempori $\frac{177-3x}{8}$, & emerget $1+\frac{177-3x}{8}=\frac{2x}{7}$. Et per reductionem $35=x$. Nam multiplicando per 8 fit $185-3x=\frac{16x}{7}$. Dein multiplicando etiam per 7 fit $1295-21x=16x$, ſeu $1295=37x$. Et divi-

videndo denique per 37, exoritur $35 = x$. Sunt itaque 35 milliaria iter quod A conficiet antequam conveniet B. (*d*)

Idem

(*d*) Vel etiam ſic. Cum A peragat 7 milliaria in 2 horis, una hora percurret $\frac{7}{2}$ milliaria; eadem ratione B una hora perficiet $\frac{8}{3}$ milliaria: ſi ergo fiat $\frac{7}{2} . \frac{8}{3} :: x . \frac{16x}{21}$, erit $\frac{16x}{21}$ iter, quod B percurret eodem tempore, quo A peraget iter x, ſed B iter incepit una hora ſerius, quam A, ergo iter illius $= \frac{16x}{21} - \frac{8}{3}$. Eſt autem iter B una cum itinere A $= 59$; igitur $x + \frac{16x}{21} - \frac{8}{3} = 59$, & reducendo x ad eandem denominationem ac $\frac{16x}{21}$, & tranſponendo $\frac{8}{3}$, $\frac{21x + 16x}{21} = 59 + \frac{8}{3}$, ac redigendo ad ſimpliciorem expreſſionem primum æquationis membrum, & ſecundum ad eundem denominatorem $\frac{37x}{21} = \frac{185}{3}$, & omnia multiplicando per 21 (nempe in primo membro delendo 21, & in ſecundo 3, & idem ſecundum multiplicando per 7 ob $21 = 7 . 3$) $37x = 1295$, & dividendo per 37 &c.

Si vero quæratur tempus concurſus; ſit tempus, per quod A moveri pergit, $= y$; ſi fiat ut 2 horæ ad y horas ſic 7 milliaria ad $\frac{7y}{2}$ millaria; exprimet $\frac{7y}{2}$ ſpatium ab A peractum tempore y. Sed iter ipſius B durat per tempus $y - 1$, ex conditione problematis, fac ergo ut 3 horæ ad $y - 1$ horas ſic 8 milliaria ad $\frac{8y - 8}{3}$; hæc quantitas exponet ſpatium a B percurſum tempore $y - 1$; hoc ſpatium deme ex 59 milliariis, quibus A diſtat a B, & $59 - \frac{8y + 8}{3}$ erit ſpatium, quod ſeparat locum ubi erat A, cum moveri cœpit, a loco ubi eſt B poſtquam iter fecit per $y - 1$ horas, atqui in eodem loco eſſe debet etiam A quia nempe A, & B conveniunt) ergo $59 - \frac{8y + 8}{5} = \frac{7y}{2}$; & cunctis ductis in 2; $118 - \frac{16y + 16}{3} = 7y$; ac omnibus in 3 ductis, $354 - 16y + 16 = 21y$, & redigendo ad ſimpliciorem expreſſionem $370 = 37y$ ſeu $y = \frac{370}{37} = 10$ debet ergo A iter facere per 10 horas, B vero per 9.

Methodus ſuperior aptari poteſt etiam aliis hypotheſibus. Creſcant *Ex. gr.* ſpatia peracta ut quadrata temporum, quibus peraguntur: id eſt ſi A una hora perficit duo milliaria, duabus horis peragat octo, tribus octodecim (eſt enim ut 1, quadratum primi temporis, ad 4, quadratum ſecundi ſic 2 ſpatium primo tempore decurſum ad 8 ſpatium ſecundo tempore dimenſum, & ut 1 ad 9 ita 2 ad 18) & ſit y ſpatium a B conficiendum antequam mobilia conveniant, erit $c - y$ ſpatium conficiendum ab A, & ſit m tempus quo A peragit ſpatium a; Fac $a . c - y :: m^2$ ad quartam $\frac{cm^2 - m^2y}{a}$, hoc erit quadratum temporis, quo A perficiet ſpatium $c - y$. Pariter pone n tempus, quo B percurrit ſpatium b, & ſic $b . y :: n^2 . \frac{n^2y}{b}$ erit hoc quadratum temporis a B impenſi. Fingatur A motum incepiſſe tempore p citius quam B; & erit

$$m\sqrt{\left(\frac{c-y}{a}\right)} - p = n\sqrt{\frac{y}{b}},$$

& quadrando

$$\frac{mmc - mmy}{a} - 2mp\sqrt{\left(\frac{c-y}{a}\right)} + p^2 = \frac{n^2y}{b},$$

quare

$$\frac{m^2c + ap^2}{a} - y\left(\frac{bm^2 + an^2}{ab}\right) = 2mp\sqrt{\left(\frac{c-y}{a}\right)};$$

pone

$$\frac{m^2c + ap^2}{a} = h^2; \quad \frac{bm^2 + an^2}{ab} = g$$

$$\& \ 2mp = f^2;$$

eritque

$$h^2 - gy = f^2\sqrt{\left(\frac{c-y}{a}\right)};$$

& quadrando

$$h^4 - 2h^2gy + g^2y^2 = \frac{cf^4 - f^4y}{a};$$

aut

Idem generalius.

VIII. *Datis duorum mobilium A & B eodem curſu pergentium celeritatibus, una cum intervallo locorum ac temporum a quibus incipiunt moveri; determinare metam in qua convenient.*

Pone mobilis A eam eſſe celeritatem qua ſpatium c pertranſire poſſit in tempore f, & mobilis B eam eſſe qua ſpatium d pertranſire poſſit in tempore g; & locorum intervallum eſſe e, ac h temporum in quibus moveri incipiunt.

CASUS I.

Deinde, ſi ambo ad eaſdem plagas tendant, & A ſit mobile quod ſub initio motus longius diſtat a meta; pone diſtantiam illam eſſe x, indeque aufer intervallum e, & reſtabit $x - e$ pro diſtantia B a meta. Et cum A pertranſeat ſpatium c in tempore f, tempus in quo pertranſibit ſpatium x erit $\frac{fx}{c}$, eo quod ſit ſpatium c ad tempus f, ut ſpatium x ad tempus $\frac{fx}{c}$. Atque ita, cum B pertranſeat ſpatium d in g, tempus in quo pertranſibit ſpatium $x - e$ erit $\frac{gx - ge}{d}$. Jam, cum horum temporum differentia ſupponatur h, ut ea evadant æqualia, adde h breviori tempori, nempe tempori $\frac{fx}{c}$ (ſi modo B prius incipiat moveri), & evadet $\frac{fx}{c} + h = \frac{gx - ge}{d}$. Et per reductionem $\frac{ceg + cdh}{cg - df}$ vel $\frac{ge + dh}{g - \frac{d}{c}f} = x$.

Sin A prius moveri incipiat, adde h tempori $\frac{gx - ge}{d}$, & evadet $\frac{fx}{c} = h + \frac{gx - ge}{d}$, & per reductionem $\frac{cge - cdh}{cg - df} = x$. (e)

CASUS

aut $y^2 = \frac{2ab^2gy - f^4y - ab^4 + cf^4}{ag^2}$;

& $y = \frac{2ab^2g - f^4}{2ag^2} =$

$\sqrt{(-\frac{ab^4 + cf^4}{ag^2} + (\frac{2ab^2g - f^4}{2ag^2})^2)}$.

(e) Hic quoque valet ſuperius ratiocinium: B peragens tempore g ſpatium d percurret tempore h ſpatium $\frac{dh}{g}$; & cum ſit $\frac{c}{f} . \frac{d}{g} :: x . \frac{dfx}{cg}$, mobile B perficiet ſpatium $\frac{dfx}{cg}$ eodem tempore quo A percurret x, nempe ab initio motus mobilis A ad punctum temporis, quo hæc duo mobilia eodem perveniunt, mobile B tranſibit ſpatium $\frac{dfx}{cg}$, ſed ut hæc duo ſpatia æqualia ſunt, huic adjiciendum eſt ſpatium quo mobilia diſtant, & ſpatium $\frac{dh}{g}$ a mobile B peractum, A adhuc quieſcente, ergo

$x = \frac{dfx}{cg} + e + \frac{dh}{g}$,

& omnibus per cg multiplicatis

Casus II.

Quod ſi mobilia obviam eant, & x, ut ante, ponatur initialis diſtantia mobilis A a meta, tum $e - x$ erit initialis diſtantia ipſius B ab eadem meta; & $\frac{fx}{c}$ tempus, in quo A conficiet diſtantiam x, atque $\frac{ge - gx}{d}$ tempus, in quo B conficiet diſtantiam ſuam $e - x$. Quorum temporum minori ut ſupra, adde differentiam h, nempe tempori $\frac{fx}{c}$ ſi B prius incipiat moveri, & ſic habebitur $\frac{fx}{c} + h = \frac{ge - gx}{d}$, & per reductionem $\frac{cge - cdh}{cg + df} = x$. Sin A prius incipiat moveri, adde h tempori $\frac{ge - gx}{d}$ & evadet $\frac{fx}{c} = h + \frac{ge - gx}{d}$, & per reductionem $\frac{cge + cdh}{cg + df} = x$.

Exemplum I.

Si quotidie Sol unum gradum conficit & Luna tredecim, & ad tempus ali-

$$cgx = dfx + cez + cdh;$$

&, per reductionem, $x = \frac{cez + cdh}{cg - df}$

Quod ſi A prius moveri cœperit, ſpatium ab eo percurſum tempore h, futurum eſt $\frac{ch}{f}$, ob $f . h :: c . \frac{ch}{f}$. Poſtquam igitur A hoc ſpatium perfecerit, ambo mobilia ſimul movebuntur, & quidem per tempora æqualia; quo tempore A tranſibit ſpatium

$$x - \frac{ch}{f} = \frac{fx - ch}{f};$$

ergo

$$\frac{c}{f} . \frac{d}{g} :: \frac{fx - ch}{f} . \frac{dfx - dch}{cg},$$

ſpatium a B eodem tempore percurſum: ut vero hæc duo ſpatia æqualia ſint, minori (nempe $\frac{dfx - cdh}{cg}$) addendum eſt ſpatium, quo mobilia, cum ambo moveri cœperunt, diſtabant, ſcilicet

$$e - \frac{ch}{f} = \frac{ef - ch}{f},$$

ergo

$$\frac{fx - ch}{f} =$$

$$\frac{dfx - cdh}{cg} + \frac{ef - ch}{f};$$

& utrimque deleto $\frac{ch}{f}$,

$$\frac{fx}{f} = \frac{dfx - cdh}{cg} + \frac{ef}{f}$$

$$= x = \frac{dfx - cdh}{cg} + e,$$

cunctisque in cg ductis,

$$cgx = dfx - cdh + ceg,$$

& reducendo

$$x = \frac{ceg - cdh}{cg - df}.$$

Si vero quæratur tempus concurſus; ſit tempus, quo durat motus ipſius A, $= y$; & quia $f, y :: c . \frac{cy}{f}$, hoc erit ſpatium ab A peractum. Jam B movetur per tempus $y + h$; ſed

$$g . y + h :: d . \frac{dy + dh}{g},$$

quod eſt ſpatium a B perfectum, cui adde e, & erit

$$\frac{cy}{f} = \frac{dy + dh}{g} + e$$

& (cunctis prius in f, deinde in g ductis)

$$cgy = dfy + dfh + efg$$

& tranſponendo, ac per $cg - df$ dividendo,

$$y = \frac{dfh + efg}{cg - df}$$

tempus, per quod A motum continuare debet.

aliquod, Sol ſit in principio Cancri atque poſt tres dies Luna in principio Arietis: quæritur locus conjunctionis proxime futuræ. Reſp. in $10\frac{3}{4}$ gradu Cancri. Nam, cum ambo ad eaſdem plagas eant, & ſerior ſit epocha motus Lunæ quæ longius diſtat a meta; erit A Luna, B Sol, & $\frac{cge+cdh}{cg-df}$ longitudo itineris Lunaris, quæ, ſi ſcribatur 13 pro c; 1 pro f, d, ac g; 90 pro e; & 3 pro h; evadet $\frac{13.1.90+13.1.3}{13.1-1.1}$; hoc eſt $\frac{1209}{12}$, ſive $100\frac{3}{4}$. Hos itaque gradus adjice principio Arietis & prodibit $10\frac{3}{4}$ gradus Cancri.

EXEMPLUM II.

Si Tabellarii duo A & B, 59 milliaribus diſtantes, tempore matutino obviam eant, quorum A conficit 7 milliaria in 2. horis, & B 8 milliaria in 3 horis, & B una hora ſerius iter inſtituit quam A: quæritur iter quod A conficiet antequam conveniat B. Reſp. 35 milliaria. Nam cum obviam eant & A primo inſtituat iter, erit $\frac{cge+cdh}{cg+df}$ iter quæſitum. Et hoc, ſi ſcribatur 7 pro c, 2 pro f, 8 pro d, 3 pro g, 59 pro e, & 1 pro h, evadet $\frac{7.3.59+7.8.1}{7.3+8.2}$; hoc eſt $\frac{1295}{37}$ ſive 35

PROB. VI.

IX. *Data agentis alicujus poteſtate, invenire quot ejuſmodi agentes datum effectum* a *in dato tempore* b *producent.*

Sit ea agentis poteſtas, qua effectum c producere poteſt in tempore d, & erit ut tempus d ad tempus b, ita effectus c quem agens iſte producere poteſt in tempore d, ad effectum quem poteſt producere in tempore b, qui proinde erit $\frac{bc}{d}$. Deinde ut unius agentis effectus $\frac{bc}{d}$ ad omnium effectum a, ita agens iſte unicus ad omnes agentes: adeoque agentium numerus erit $\frac{ad}{bc}$.

EXEMPLUM.

Si ſcriba in 8 diebus 15 folia deſcribere poteſt, quot ejuſmodi ſcribæ requiruntur ad deſcribendum 405 folia in 9 diebus? Reſp. 24. Nam ſi ſubſtituantur 8 pro d, 15 pro c, 405 pro, a & 9 pro b, numerus $\frac{ad}{bc}$ evadet $\frac{405.8}{9.15}$ hoc eſt $\frac{3240}{135}$, ſive 24.

PROB. VII.

X. *Datis plurium agentium viribus, tempus* x *determinare in quo datum effectum* d *conjunctim producent.*

Agentium A, B, C, vires ponantur quæ in temporibus e, f, g, producant effectus a, b, c reſpective; & hæ in tempore x producent effectus $\frac{ax}{e}$, $\frac{bx}{f}$, $\frac{cx}{g}$. Quare eſt $\frac{ax}{e} + \frac{bx}{f} + \frac{cx}{g} = d$, & per reductionem

$$x = \frac{d}{\frac{a}{e} + \frac{b}{f} + \frac{c}{g}}.$$

EXEMPLUM.

Tres mecenarii opus aliquod certis temporibus perficere poſſunt, videlicet, A ſemel in tribus ſeptimanis, B ter in octo ſeptimanis, & C quinquies in duodecim ſeptimanis. Quæritur quanto tempore ſimul abſolvent? Sunt itaque Agentium A, B, C vires, quæ temporibus 3, 8, 12 producant effectus 1, 3, 5 reſpective: Et quæritur tempus quo abſolvent effectum 1, quare pro a, b, c, d, e, f, g ſcribe 1, 3, 5, 1, 3, 8, 12, & proveniet $x = \frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{3}{8} + \frac{5}{12}}$ ſive $\frac{8}{9}$ ſeptimanæ, hoc eſt 6 dies $5\frac{1}{3}$ horæ, tempus quo ſimul abſolvent.

PROB. VIII.

XI. *Diſſimiles duarum pluriumve rerum miſturas ita componere, ut res illæ commiſtæ datam inter ſe rationem acquirant.*

Sit unius miſturæ data quantitas $dA + eB + fC$, alterius eadem quantitas $gA + hB + kC$, & eadem tertiæ $lA + mB + nC$; ubi A, B, & C denotent res miſtas, & d, e, f, g, h, &c. proportiones earundem in miſturis. (*f*) Et ſit $pA + qB + rC$ miſtura quam ex his tribus oportet componere; fingeque x, y, z numeros eſſe, per quos ſi tres datæ miſturæ res-

(*f*) Sint *Ex. gr.* tres laminæ, quarum quævis conflatur tribus metallis (puta Auro, Argento, Ære) variorum ponderum. Ex earum laminarum partibus ſimul miſtis & confuſis effici debeat quarta lamina continens Auri pondo p; Argenti q; Æris r. Indicent A Aurum; B Argentum; C Æs, & prima lamina (cujus ſymbolum eſt O) conflet quantitate d Auri; e Argenti; f Æris; unde ea tota eſt $dA + eB + fC = O$. Secunda (quam expono ſymbolo P) componatur quantitate g Auri; h Argenti; k Æris; igitur

$$gA + hB + kC = P;$$

Eadem ratione tertia data

$$Q = lA + mB + nC;$$

& conflanda ſit quarta

$$R = pA + qB + rC.$$

reſpective multiplicentur, earum ſumma evadet $pA + qB + rC$ (g).

Eſt itaque

$$\left.\begin{array}{l} dxA + exB + fxC \\ + gyA + hyB + kyC \\ + lzA + mzB + nzC \end{array}\right\} = pA + qB = rC,$$

Adeoque collatis terminis,

$$dx + gy + lz = p,\ ex + hy + mz = q,\ \&\ fx + ky + nz = r,\ (h)$$

& per reductionem

$$x = \frac{p - gy - lz}{d} = \frac{q - hy - mz}{e} = \frac{r - ky - nz}{f}.$$

Et rurſus æquationes

$$\frac{p - gy - lz}{d} = \frac{q - hy - mz}{e}\ \&\ \frac{q - hy - mz}{e} = \frac{r - ky - nz}{f}$$

per reductionem dant

$$\frac{ep - dq + dmz - elz}{eg - dh} (= y) = \frac{fq - er + enz - fmz}{fh - ek}:$$

Quæ, ſi abbrevietur ſcribendo

α pro $ep - dq$, β pro $dm - el$, γ pro $eg - dh$,
δ pro $fq - er$, ζ pro $en - fm$, & θ pro $fh - ek$,

evadet

$$\frac{\alpha + \beta z}{\gamma} = \frac{\delta + \zeta z}{\theta}\ \&\ \text{per reductionem}\ \frac{\theta\alpha - \gamma\delta}{\gamma\zeta - \beta\theta} = z.$$

Invento z pone

$$\frac{\alpha + \beta z}{\gamma} = y\ \&\ \frac{p - gy - lz}{d} = x.$$

EXEMPLUM.

Si tres ſint metallorum colliquefactorum miſturæ, quarum primæ pondo continet argenti unc. 12, æris unc. 1, & ſtanni unc. 3; ſecundæ pondo continet argenti unc. 1, æris unc 12, & ſtanni unc. 3; & tertiæ pondo continet æris unc. 14, ſtanni unc. 2, & argenti nihil; ſintque hæ miſturæ ita componendæ, ut pondo compoſitionis contineat argenti unc. 4, æris unc. 9, & ſtanni unc. 3: Pro $d, e, f; g, h, k; l, m, n; p, q, r$ ſcribe 12, 1, 3; 1, 12, 3; 0, 14, 2; 4, 9, 3 reſpective, & erit

α(=

(g) Sumis, *Ex. Gr.* quantitatem x ex Lamina O; quantitatem y ex P, & z ex Q; &, ex lege problematis, eſſe debet

$$xO + yP + zQ = R = pA + qB + rC.$$

Aſt

$$xO = xdA + xeB + xfC;$$

&

$$yP = ygA + yhB + ykC;$$

ac

$$zQ = zlA + zmB + znC,\ \text{ergo \&c.}$$

(h) Siquidem quantitas auri, quæ eſt in R æquat omnes ſuas partes, vel quantitates Auri ex O; P; Q ſumptas; ergo

$$xdA + ygA + zlA = pA,$$

&

$$xd + yg + zl = p$$

& ſic de ceteris,

$$\alpha\ (= ep - dq = 1 \,.\, 4 - 12 \,.\, 9) = -104,$$

&

$$\beta\ (= dm - el = 12 \,.\, 14 - 1 \,.\, 0) = 168,$$

& ſic

$$\gamma = -143,\ \delta = 24,\ \zeta = -40,\ \&\ \theta = 33.$$

Adeoque

$$z\ \left(= \frac{\theta\alpha - \gamma\delta}{\gamma\zeta - \beta\theta} = \frac{-3432 + 3432}{5720 - 5544}\right) = 0.$$

$$y\ \left(= \frac{\alpha + \beta z}{\gamma} = \frac{-104 + 0}{-143}\right) = \frac{8}{11},\ \&\ x\ \left(= \frac{p - gy - lz}{d}\right.$$

$$= \left.\frac{4 - \frac{8}{11}}{12}\right) = \frac{3}{11}.$$

Quare ſi miſceantur $\frac{8}{11}$ partes pondo miſturæ ſecundæ, $\frac{3}{11}$ partes pondo primæ & nihil tertiæ, aggregatum erit pondo continens quatuor uncias argenti, novem æris, & tres ſtanni.

PROB. IX.

XII. *Datis plurium ex iiſdem rebus miſturarum pretiis, & proportionibus miſtorum inter ſe, pretium cujuſvis e miſtis determinare.*

Cujuſvis rerum A, B, C, miſturæ $dA + gB + lC$ pretium eſto p, miſturæ $eA + hB + mC$ pretium q, & miſturæ $fA + kB + nC$ pretium r, & rerum illarum A, B, C quærantur pretia x, y & z. Utpote pro rebus A, B, & C ſubſtitue earum pretia x, y, & z, & exſurgent æquationes

$$dx + gy + lz = p,\ ex + hy + mz = q,\ \&\ fx + ky + nz = r,$$

ex quibus pergendo ut in præcedente problemate, elicientur itidem

$$\frac{\theta\alpha - \gamma\delta}{\gamma\zeta - \beta\theta} = z,\ \frac{\alpha + \beta z}{\gamma} = y,\ \&\ \frac{p - gy - lz}{d} = x.$$

EXEMPLUM.

Emit quidam 40 modios tritici, 24 modios hordei, & 20 modios avenæ, ſimul 15 libris 12 ſolidis: Deinde conſimilis grani emit 26 modios tritici, 30 modios hordei, & 50 modios avenæ, ſimul 16 libris: Ac tertio conſimilis etiam grani emit 24 modios tritici, 120 modios hordei & 100 modios avenæ, ſimul 34 libris. Quæritur quanti æſtimandus ſit modius cujusque grani? Reſp. Modius tritici 5 ſolidis, hordei 3 ſolidis, & avenæ 2 ſolidis. Nam pro $d, g, l; e, h, m; f, k, n; p, q,$ & r ſcribendo reſpective

ve 40, 24, 20; 26, 30, 50; 24, 120, 100; $15\frac{3}{5}$: 16, & 34; prodidit

$$\alpha\ (= ep - dq = 26 \,.\, 15\tfrac{3}{5} - 40 \,.\, 16) = -234\tfrac{2}{5};$$

&

$$\beta\ (= dm - el = 40 \,.\, 50 - 26 \,.\, 20) = 1480.$$

Atque ita

$$\gamma = -576,\ \delta = -500,\ \zeta = 1400,\ \&\ \theta = -2400.$$

Adeoque

$$z\ (= \frac{\theta\alpha - \gamma\delta}{\gamma\zeta - \beta\theta} = \frac{562560 - 288000}{-806400 + 3552000} = \frac{274560}{2745600}) = \frac{1}{10},$$

$$y\ (= \frac{\alpha + \beta z}{\gamma} = \frac{-234\frac{2}{5} + 148}{-576}) = \frac{3}{20}$$

Et

$$x\ (= \frac{p - gy - lz}{d} = \frac{15\frac{3}{5} - \frac{18}{5} - 2}{40}) = \frac{1}{4}.$$

Conſtitit itaque modius tritici $\frac{1}{4}$ ℔ ſeu 5 ſolidis, modius hordei $\frac{3}{20}$ ℔ ſeu 3 ſolidis, & modis avenæ $\frac{1}{10}$ ℔ ſeu 2 ſolidis.

PROB. X.

XIII. *Datis & miſturæ & miſtorum gravitatibus ſpecificis invenire proportionem miſtorum inter ſe.*

Sit e gravitas ſpecifica miſturæ A + B cujus A gravitas ſpecifica eſt a, & B gravitas b: & cum gravitas abſoluta ſeu pondus componatur ex mole corporis & gravitate ſpecifica, erit aA pondus ipſius B & eA + eB pondus aggregati A + B, adeoque $a\text{A} + b\text{B} = e\text{A} + e\text{B}$, indeque $a\text{A} - e\text{A} = e\text{B} - b\text{B}$ ſeu $e - b \,.\, a - e :: \text{A} \,.\, \text{B}$.

EXEMPLUM.

Sit auri gravitas ut 19, argenti ut $10\frac{1}{3}$, & coronæ Hieronis ut 17; eritque 10. 3 ($:: e - b \,.\, a - e :: \text{A} \,.\, \text{B}$) :: moles auri in corona, ad molem argenti, vel 190. 31 (:: 19.10 ad $10\frac{1}{3}$. 3 :: $a\,(e - b)$ ad $b\,(a - e)$) :: pondus

dus auri in corona, ad pondus argenti, & 221. 31 :: pondus coronæ, ad pondus argenti. (*i*)

PROB. XI.

XIV. *Si boves* a *depaſcant pratum* b *in tempore* c; *& boves* d *depaſcant pratum æque bonum* e *in tempore* f, *& gramen uniformiter creſcat: quæritur quot boves depaſcent pratum ſimile* g *in tempore* h.

Si boves a in tempore c depaſcant pratum b; tum per analogiam boves (*k*) $\frac{e}{b}a$ in eodem tempore c, vel boves $\frac{ec}{bf}a$ in tempore f, vel boves $\frac{ec}{bh}a$ in

(*i*) Fiat moles auri $=$ A, argenti $=$ B; gravitas ſpecifica cujuſdam molis ex auro (19) $= a$; ejuſdem molis ex argento ($10\frac{1}{3}$) $= b$; æqualis molis ex miſtura (17) $= e$, erit $e - b$ ($= 17 - 10\frac{1}{3} = 7 - \frac{1}{3} = 6\frac{2}{3}$) $= \frac{20}{3}$; $a - e$ ($= 19 - 17$) $= 2$; atqui, ex ſuperioribus, $e - b . a - e$ :: A. B, ergo A. B :: $\frac{20}{3}$. 2 :: 10.2 ad 3.2 :: 10 ad 3. Sed pondus componitur ex mole & gravitate ſpecifica; igitur pondus auri ad pondus argenti ut 10.19 ad $3.10\frac{1}{3}$. At ex aggregato molis Auri (10) cum argenti mole (3) conſtat coronæ moles; ea igitur eſt ut 13. Atqui pondus coronæ ad pondus argenti eſt in ratione compoſita gravitatum coronæ & argenti ($17.10\frac{1}{3}$) & molium coronæ atque argenti (13. 3) eſt ergo pondus coronæ ad argenti pondus ut 13 . 17 (221) ad $3.10\frac{1}{3}$ (31.)

ALITER.

Sit miſtura quædam M (cujus moles $= c$) compoſita duobus miſtis O, & P; capiatur ex ſingulis O ac P moles $= c$; & ſit molis c miſturæ M gravitas ſpecifica $= f$; & molis c metalli O, $= g$, ac demum molis c metalli P, $= h$, quæritur quanta ſit moles ex ipſis O & P ex quibus moles c miſturæ M conflata eſt.

Jam patet miſturam eſſe ſpecifice leviorem miſto graviori, & graviorem leviori, ſit ſpecifice gravius O.

Moles fiat $= x$; erit moles P $= c - x$; igitur $c . x :: g . \frac{gx}{c}$; & $c . c - x :: h . \frac{ch - hx}{c}$; atqui gravitas ſpecifica f miſturæ M nihil eſt niſi aggregatum ex gravitatibus ſpecificis metallorum componentium, ut patet, ergo

$$\frac{gx - hx + ch}{c} = f;$$

& per reductionem

$$x = \frac{cf - ch}{g - h};$$

id eſt

$$g - h . f - h :: c . x,$$

ut exceſſus graditatis ſpecificæ metalli gravioris ſupra ſpecificam levioris ad exceſſum gravitatis ſpecificæ miſturæ ſupra ſpecificam gravitatem levioris, ita moles miſturæ ad molem metalli gravioris.

Quia $g - h . f - h :: c . x$, erit etiam $g - h . (g - h - f + h) g - f :: c . c - x$; nempe, ut exceſſus majoris gravitatis ſpecificæ unius miſti ſupra minorem alterius, ad exceſſum ejuſdem majoris gravitatis miſti ſupra gravitatem ſpecificam miſturæ, ita moles miſturæ ad molem miſti levioris.

Item $f - h . g - h :: x . c$

& $f - h . g - h :: x . c - x$;

ſcilicet, ut exceſſus ſpecificæ gravitatis miſturæ ſupra leviorem ad exceſſum gravioris ſupra eandem leviorem, ita moles metalli gravioris ad molem levioris.

(*k*) Si tempora ſint æqualia & prata æque bona, patet eſſe ut ſuperficies prati b ad ſuperficiem prati e, ita numerus boum a ad numerum boum eodem tempore c depaſcentium pratum e, qui numerus erit $\frac{ae}{b}$.

Sed ſi tempora ſint inæqualia, pratum vero idem, tunc duo boum numeri erunt in reciproca temporum ratione; conſtat enim, quod, numero boum decreſcente, augetur tempus ad

in tempore b, depaſcent pratum e; puta ſi gramen poſt tempus c non creſceret. (l) Sed, cum propter graminis incrementum, boves d in tempore f depaſcant ſolummodo pratum e, ideo graminis in prato e incrementum illud per tempus $f - c$ tantum erit quantum per ſe ſufficit paſcendis bobus $d - \frac{eca}{bf}$ per tempus f, (m) hoc eſt quantum ſufficit paſcendis bobus $\frac{df}{h} - \frac{eca}{bh}$ per tempus h. (n) Et in tempore $h - c$ per analogiam tantum erit incrementum quantum per ſe ſufficit paſcendis bobus

$$\frac{h-c}{f-c} \text{ in } \frac{df}{h} - \frac{eca}{bh} \text{ ſive } \frac{bdfh - ecah - bdcf + aecc}{bfh - bch}.$$

Hoc incrementum adjice bobus $\frac{aec}{bh}$ (o) & prodibit $\frac{bdfh - ecah - bdcf + ecfa}{bfh - bch}$ numerus boum quibus paſcendis ſufficit pratum e per tempus h. Adeoque per analogiam (p) pratum g bobus $bdfgh$

ad paſcendum neceſſarium, & contra; ergo tempus f ad tempus c ut $\frac{ae}{b}$ numerus boum patum e tempore c depaſcentium, ad numerum boum idem pratum e tempore f tondentium; qui numerus erit $\frac{ace}{bf}$, & eadem ratione $h . c :: \frac{ae}{b} . \frac{ace}{bh}$.

(l) Gramen enim creſcat non creſcat, dummodo jugerum ex prato b tantum fœni proferat tempore c quantum producit jugerum ex prato e per idem tempus, ſemper duplus erit numerus boum depaſcentium pratum duplum, eodem tempore &c. Reſtat igitur inveniendus numerus boum exhaurientium gramen ſubſcreſcens in prato e tempore $f - c$.

(m) Quia boves d pratum e depaſcunt tempore f, cum herba creſcit; & boves $\frac{ace}{bf}$ idem faciunt eodem tempore, ſed herba non ſuccreſcente, oportet ut numerus d major ſit numero $\frac{aec}{bf}$, quare hic ab illo demendus eſt, ut habeatur numerus boum tempore f conſumentium herbam, quæ in illo prato e ſupervenit. Erit autem $d - \frac{ace}{bf}$.

(n) Et quia numerus boum eſt in reciproca temporum ratione, fac

$h . f :: \frac{bdf - aec}{bf}$. ad quartam $\frac{bdf - aec}{bh}$.

Hæc exponet numerum boum conſumentium tempore h gramen in prato e ſuboriens tempore $f - c$. Aſt in eodem prato duplum creſcit duplo tempore (externis impedimentis remotis) triplum, triplo tempore &c.; igitur numerus boum depaſcentium herbam creſcentem in prato e tempore $h - c$, invenietur faciendo $f - c . h - c :: \frac{bdf - aec}{bh}$

ad quartam

$$= \frac{bdfh - bcdf - aceh + aecc}{bfh - bch}.$$

(o) Numero boum derodentium pratum e tempore h, ſi herba poſt tempus c non creſceret. Hujus vero additionis cauſa eſt, quod ſupra invenimus numerum boum pro herba, quæ creſcit tempore $h - c$; ſi igitur huic addas numerum boum conſumentium herbam, quæ jam erat in prato e, & quæ creverat tempore c, habebis numerum boum comedentium herbam, quæ erat in prato e, & eam, quæ creverat tempore h.

(p) Id eſt ponendo

$$e . g :: \frac{bdfh - bcdf - aceh + acfe}{bfh - bch}.$$

ad quartam.

$\frac{bdfgh - ecagh - bdegf + ecfga}{befh - bceh}$ per idem tempus h paſcendis ſufficiet.

EXEMPLUM.

Si 12 boves depaſcant $3\frac{1}{3}$ jugera prati in 4 ſeptimanis; & 21 boves depaſcant 10 jugera conſimilis prati in 9 ſeptimanis; quæritur quot boves depaſcant 24 jugera in 18 ſeptimanis? Reſp. 36. Iſte enim numerus invenietur ſubſtituendo in $\frac{bdfgh - ecagh - bdegf + ecfga}{befh - bceh.}$ numeros 12, $3\frac{1}{3}$, 4, 21, 10, 9, 24, & 18 pro literis a, b, c, d, e, f, g & h reſpective.

Sed ſolutio forte haud minus expedita erit ſi e primis principiis ad formam ſolutionis præcedentis literalis eruatur. Utpote ſi 12 boves in 4 ſeptimanis depaſcant $3\frac{1}{3}$ jugera, tum per analogiam 36 boves in 4 ſeptimanis, vel 16 boves in 9 ſeptimanis, vel 8 boves in 18 ſeptimanis depaſcent 10 jugera: puta ſi gramen non creſceret. Sed cum propter graminis incrementum 21 boves in 9 ſeptimanis depaſcant ſolummodo 10 jugera, illud graminis in 10 jugeris per poſteriores 5 ſeptimanas incrementum tantum erit quantum per ſe ſufficit exceſſui boum 21 ſupra 16, hoc eſt 5 bobus per 9 ſeptimanas, vel quod perinde eſt $\frac{5}{2}$ bobus per 18 ſeptimanas paſcendis. Et in 14 ſeptimanis (exceſſu 18 ſupra 4 primas) incrementum illud graminis per analogiam tantum erit quantum ſufficiat 7 bobus per 18 ſeptimanas paſcendis; eſt enim 5 ſeptiman. ad 14 ſeptiman. :: $\frac{5}{2}$ boves. 7 boves. Quare 8 bobus, quos 10 jugera ſine incremento graminis paſcere poſſunt per 18 ſeptimanas, adde hoſce 7 boves quibus paſcendis ſolum incrementum graminis ſufficit, & ſumma erit 15 boves. At denique ſi 10 jugera 15 bobus per 18 ſeptimanas paſcendis ſufficiant, tum per analogiam 24 jugera per idem tempus ſufficient 36 bobus.

PROB. XII.

XV. *Datis ſphæricorum corporum, in eadem recta motorum ſibique occurrentium, magnitudinibus & motibus, determinare motus eorundem poſt reflexionem.*

Hujus reſolutio ex his dependet conditionibus, ut corpus utrumque tantum reactione patiatur quantum agit in alterum, & ut eadem celeritate poſt reflexionem recedant ab invicem qua ante accedebant. His poſitis ſint corporum A & B celeritates a & b reſpective; & motus (ſiquidem componantur

tur ex mole & celeritate corporum) erunt aA & bB. Et ſi corpora ad eaſdem plagas tendant, & A celerius movens inſequatur B, pone x decrementum motus aA, & incrementum motus bB percuſſione exortum; & poſt reflexionem motus erunt $aA - x$ & $bB + x$; & celeritates $\frac{aA - x}{A}$ ac $\frac{bB + x}{B}$ quarum differentia æquatur $a - b$ (*q*) differentiæ celeritatum ante reflexionem. Habetur itaque æquatio (*r*) $\frac{bB + x}{B} - \frac{aA + x}{A} = a - b$, & inde per reductionem fit (*s*) $x = \frac{2aAB - 2bAB}{A + B}$, quo pro x in celeritatibus $\frac{aA - x}{A}$ & $\frac{bB + x}{B}$ ſubſtituto prodeunt (*t*) $\frac{aA - aB + 2bB}{A + B}$ celeritas ipſius A, & $\frac{2aA - bA + bB}{A + B}$ celeritas ipſius B poſt reflexionem. (*v*)

Quod ſi corpora obviam eant, tum ſigno ipſius b ubique mutato, celeritates poſt reflexionem erunt $\frac{aA - aB - 2bB}{A + B}$ & $\frac{2aA + bA - bB}{A + B}$: Quarum alterutra ſi forte negativa obvenerit, id arguit motum illum poſt reflexionem ad plagam dirigi ei contrariam ad quam A tendebat ante reflexionem. Id quod etiam de motu ipſius A in caſu priori intelligendum eſt.

EXEMPLUM.

Si corpora homogenea A trium librarum cum celeritatis gradibus 8, & B novem librarum cum celeritatis gradibus 2 ad eaſdem plagas tendant: tunc pro

(*q*) Jam. NEWTONUS duos caſus diſtinxit, in quorum primo liquet fore a majorem quam b, ſecus enim ſphæræ nunquam concurrerent; ſed (ſi $b = a$) ſemper æquidiſtarent, aut (ubi b major quam a) ſemper remotiores fierent, contra Hypotheſim.

(*r*) Ambæ ponuntur tendere ad eaſdem partes, ambarum ergo velocitates poſitivæ ſunt; ſed etiam poſt conflictum velocitas ipſius B debet eſſe poſitiva, quia conſpirans A poteſt & debet percuſſione ſua velocitatem B augere, directionem vero mutare nequit; quare bene Auctor noſter differentiam ſumpſit.

(*s*) Nam (ducendo primum in A, deinde in B)
$bAB + Ax - aAB + Bx = aAB - bAB$,
& tranſponendo $Ax + Bx = 2aAB - 2bAB$, ac dividendo per $A + B$, $x =$ &c.

(*t*) Quia nempe $\frac{aA - x}{A} = a - \frac{2aB + 2bB}{A + B}$
$= \frac{aA + aB - 2aB + 2bB}{A + B} = \frac{aA - aB + 2bB}{A + B}$.
Similiter de $\frac{bB + x}{B}$ ratiocinandum.

(*v*) Sponte patet, quod nunquam corpus lentius B quieſcet ab ictu, conſpirant enim percuſſionis & ipſius B directiones, quæ ideo ſe mutuo deſtruere non poſſunt.

92. Ut perſpiciamus quo caſu A *reſtet immobilis* ponenda eſt hujus velocitas poſt colliſionem $\left(\frac{aA - aB + 2bB}{A + B}\right) = 0$; unde conficitur $2bB = aB - aA$, vel $2B . B - A :: a . b$, aut per converſionem rationis
$2B . B + A :: a . a - b$.

$+\sqrt{3\frac{5}{16}}$ eſt maximus quæſitorum trium numerorum, & $6\frac{3}{4} - \sqrt{3\frac{1}{16}}$ minimus. Nam x alterutrum extremorum numerorum ambigue deſignat; indeque gemini prodeunt valores, quorum alteruter poteſt eſſe x, exiſtente altero $\frac{yy}{x}$.

ALITER.

Poſitis numeris x, y, & $\frac{yy}{x}$ ut ante, erit $x + y + \frac{yy}{x} = 20$, ſeu $xx = +\frac{20}{-y}x - yy$ & extracta radice $x = 10 - \frac{1}{2}y + \sqrt{(100 - 10y - \frac{3}{4}yy)}$ primus numerus: Hunc & y aufer de 20 & reſtat $\frac{yy}{x} = 10 - \frac{1}{2}y - \sqrt{(100 - 10y - \frac{3}{4}yy)}$ tertius numerus. Eſtque ſumma quadratorum a tribus hiſce numeris $400 - 40y$, adeoque $400 - 40y = 140$, ſive $y = 6\frac{1}{2}$. Invento medio numero $6\frac{1}{2}$, ſubſtitue eum pro y in primo ac tertio numero ſupra invento; & evadet primus $6\frac{3}{4} + \sqrt{3\frac{5}{16}}$ ac tertius $6\frac{3}{4} - \sqrt{3\frac{5}{16}}$ ut ante. *(x)*

PROB. XIV.

XVII. *Invenire quatuor numeros continue proportionales quorum duo medii ſimul conſtituunt* 12, & *duo extremi* 20.

Sit

ALITER.

(x) Pone $20 = a$, $140 = b$, ergo $x.y::y.z.$ (tertium) unde $xz = yy$, & $x + y + z = a$, atque
$xx + yy + zz = b = xx + xz + zz$,
adde, ut habeas quadratum, hinc inde xz, & erit $b + xz = xx + 2xz + zz$
$= (x + z)^2$, ſed $x + z = a - y$,
& $xx + 2xz + zz = aa - 2ay + yy$ (vel xz)
quare
$b + xz = aa - 2ay + xz$,
aut, $b = aa - 2ay$, & $y = \frac{a}{2} - \frac{b}{2a}$,
quod pone, $= c$, erit igitur $xz = cc$, & $x + z = a - c$, quod fac $= 2f$: ſit ergo
$x - z = 2u$, unde $x = f + u$, & $z = f - u$, & $xz = ff - uu = cc$,
atque
$uu = ff - cc$, & $u = \sqrt{(ff - cc,)}$
idcirco
$x = f + \sqrt{(ff - cc)}$.
& $u = f - \sqrt{(ff - cc)}$.

In propoſito exemplo
$c = \frac{a}{2} - \frac{b}{2a} = 10 - \frac{7}{2}$
$= 6\frac{1}{2} = y$, quapropter $f = 6\frac{3}{4}$,
$u = \sqrt{(\frac{729}{16} - \frac{169}{4})} = \sqrt{(\frac{729 - 676}{16})}$
$= \sqrt{\frac{53}{16}} = \sqrt{3\frac{5}{16}}$.

Sit x ſecundus numerus; & erit $12 - x$ tertius; $\frac{xx}{12 - x}$ primus; & $\frac{144 - 24x + xx}{x}$ quartus; adeoque $\frac{xx}{12 - x} + \frac{144 - 24x + xx}{x} = 20$. Et per reductionem $xx = 12x - 30\frac{6}{7}$ ſeu $x = 6 + \sqrt{5\frac{1}{7}}$. Quo invento ceteri numeri e ſuperioribus dantur. (y)

PROB. XV.

XVIII. *Invenire quatuor numeros continue proportionales, quorum datur ſumma* a, *& ſumma quadratorum* b.

Etſi deſideratas quantitates ut plurimum immediate quærere ſolemus, ſiquando tamen duæ obvenerint ambiguæ, hoc eſt quæ conditionibus omnino ſimilibus præditæ ſunt, (ut hic duo medii & duo extremi numerorum quatuor proportionalium) præſtat alias quantitates non ambiguas quærere per quas hæ determinantur, quemadmodum harum ſummam vel differentiam

ALITER.

(y) Sit primus numerus y, ſecundus x, tertius z, quartus u, ſtatuo y majorem quam x, & x majorem quam z, & z majorem quam u, quia hic dantur duæ ſummæ quæro differentias (N°. 51. hujus) quam ob rem pono.

$$x + z = 12 = 2a, \ \& \ x - z = 2t;$$

Unde.

$$x = a + t, \ \& \ z = a - t;$$

Pariter.

$$y + u = 20 = 2b, \ \& \ y - u = 2s,$$

$$\text{aut } y = b + s, \ \& \ u = b - s,$$

ubi duæ tantum quæſitæ, atqui numeri debent eſſe continue proportioles, quare

$$b + s.\ a + t :: a + t.\ a - t,$$

&

$$a + t.\ a - t :: a - t.\ b - s,$$

Denique

$$b + s.\ a + t :: a - t.\ b - s.$$

Tertia analogia dat

$$bb - ss = aa - tt.$$

Secunda

$$aa - 2at + tt = ab - as + bt - ts;$$

Prima tandem

$$aa + 2at + tt = ab + as - bt - ts.$$

ex hac ſubduc ſecundam æquationem habiturus.

$$4at = 2as - 2bt, \text{ vel } 2at + bt = as,$$

$$\text{at } t = \frac{as}{2a + b},$$

fac brevitatis gratia $2a + b = c$,

$$\& \ t = \frac{as}{c} \text{ aut } tt = \frac{a^2s^2}{cc} =$$

(ex prima æquatione) $aa + ss - bb$, unde

$$a^2s^2 = a^2c^2 + c^2s^2 - b^2c^2,$$

$$\& \ a^2s^2 - c^2s^2 = a^2c^2 - b^2c^2,$$

$$\& \ ss = \frac{a^2c^2 - b^2c^2}{aa - cc}, \text{ ac } s = \sqrt{\left(\frac{a^2c^2 - b^2c^2}{aa - cc}\right)},$$

quo valore poſito in $t = \frac{as}{c}$, exſurgit

$$t = a\sqrt{\left(\frac{aa - bb}{aa - cc}\right)}, \text{ \& poſitis numeris,}$$

$$x = 6 + \sqrt{5\tfrac{1}{7}},\ z = 6 - \sqrt{5\tfrac{1}{7}};$$

$$\text{atque } s = 22\sqrt{\tfrac{1}{7}}, \text{ ergo } y = 10$$

$$+ 22\sqrt{\tfrac{1}{7}} = \frac{41\frac{1}{7} + 12\sqrt{5\frac{1}{7}}}{6 - \sqrt{5\frac{1}{7}}}, \text{ ſiquidem}$$

hæc quantitas æquat (cum $\sqrt{5\frac{1}{7}} = 6\sqrt{\frac{1}{7}}$)

$$\frac{60 - 60\sqrt{\frac{1}{7}} + 132\sqrt{\frac{1}{7}} - \frac{132}{7}}{6 - 6\sqrt{\frac{1}{7}}}$$

$$= \frac{\left(10 + 22\sqrt{\frac{1}{7}}\right)\left(6 - 6\sqrt{\frac{1}{7}}\right)}{6 - 6\sqrt{\frac{1}{7}}},$$

& ſic de ceteris.

tiam vel rectangulum. (z) Ponamus ergo ſummam duorum mediorum eſſe s, & rectangulum r; & erit ſumma extremorum $a - s$, & rectangulum r; propter proportionalitatem. Jam ut ex his eruantur quatuor illi numeri, pone x primum & y ſecundum; eritque $s - y$ tertius; & $a - s - x$ quartus; & rectangulum ſub mediis $sy - yy = r$, indeque medii $y = \frac{1}{2}s + \sqrt{(\frac{1}{4}ss - r)}$ & $s - y = \frac{1}{2}s - \sqrt{(\frac{1}{4}ss - r)}$: (a) Item rectangulum ſub extremis $ax - sx - xx = r$, indeque extremi

$$x = \frac{a - s}{2} + \sqrt{(\frac{ss - 2as + aa}{4} - r)}.$$

&

$$a - s - x = \frac{a - s}{2} - \sqrt{(\frac{ss - 2as + aa}{4} - r)}.$$

Summa quadratorum ex hiſce quatuor numeris eſt $2ss - 2as + aa - 4r$ quæ eſt $= b$. Ergo $r = \frac{1}{2}ss - \frac{1}{2}as + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}b$, quo ſubſtituto pro r prodeunt quatuor numeri ut ſequitur.

Duo medii
$$\begin{cases} \frac{1}{2}s + \sqrt{(\frac{1}{4}b - \frac{1}{4}ss + \frac{1}{2}as - \frac{1}{4}aa)}. \\ \frac{1}{2}s - \sqrt{(\frac{1}{4}b - \frac{1}{4}ss + \frac{1}{2}as - \frac{1}{4}aa)}. \end{cases}$$

Duo extremi
$$\begin{cases} \frac{a - s}{2} + \sqrt{(\frac{1}{4}b - \frac{1}{4}ss)}. \\ \frac{a - s}{2} - \sqrt{(\frac{1}{4}b - \frac{1}{4}ss)}. \end{cases}$$

Reſtat tamen etiamnum inquirendus valor ipſius s. Quare ad abbreviandos terminos pro numeris hiſce ſubſtitue.

$\frac{s}{s}$

(z) Pone quæſitos numeros x; y; z; u. Leges problematis dant $x + y + z + u = a$; $x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = b$; $x.y :: y.z$, vel $xz = y^2$; $y.z :: z.u$, aut $uy = z^2$; demum $x.y :: z.u$, unde $ux = zy$. Finge nunc $yz = r = ux$; & $y + z = s$; utique $z = s - y$; & $x + s + u = a$; Quare ſumma extremorum $x + u = a - s$; & $u = a - s - x$; ſed $r = zy = sy - y^2$; ergo $y^2 = sy - r$; & $y = \frac{s}{2} \mp \sqrt{(\frac{s^2}{4} - r)}$; ac $z = s - y = s - \frac{s}{2} \mp \sqrt{(\frac{s^2}{4} - r)}$: $= \frac{s}{2} \mp \sqrt{(\frac{s^2}{4} - r)}$.

(a) Item $r = ux = ax - sx - x^2$, qua de cauſa $x = \frac{a - s}{2} \pm \sqrt{(\frac{a^2 - 2as + s^2}{4} - r)}$. & $u = \frac{a - s}{2} \mp \sqrt{(\frac{a^2 - 2as + s^2}{4} - r)}$.

Digitized by Google

$$\frac{1}{2}s + p. \qquad \frac{a - s}{2} + q.$$

&

$$\frac{1}{2}s - p. \qquad \frac{a - s}{2} - q.$$

Et pone rectangulum ſub ſecundo & quarto æquale quadrato tertii, ſiquidem hæc problematis conditio nondum impleatur, eritque $\frac{as - ss}{4} - \frac{1}{2}qs + \frac{pa - ps}{2} - pq = \frac{1}{4}ss - ps + pp$. (*b*).
Pone etiam rectangulum ſub primo & tertio æquale quadrato ſecundi, & erit $\frac{as - ss}{4} + \frac{1}{2}qs - \frac{pa + ps}{2} - pq = \frac{1}{4}ss + ps + pp$. Harum æquationum priorem aufer e poſteriori & reſtabit $qs - pa + ps = 2ps$, ſeu $qs = pa + ps$. Reſtitue jam $\sqrt{(\frac{1}{4}b - \frac{1}{4}ss + \frac{1}{2}as - \frac{1}{4}aa)}$ in locum p, & $\sqrt{(\frac{1}{4}b - \frac{1}{4}ss)}$ in locum q, & habebitur $s\sqrt{(\frac{1}{4}b - \frac{1}{4}ss)} = (a + s)\sqrt{(\frac{1}{4}b - \frac{1}{4}ss + \frac{1}{2}as - \frac{1}{4}aa)}$. Et quadrando $ss = -\frac{b}{a}s + \frac{1}{2}aa - \frac{1}{2}b$, ſeu $s = -\frac{b}{2a} + \sqrt{(\frac{bb}{4aa} + \frac{1}{2}aa - \frac{1}{2}b,)}$ quo invento dantur quatuor numeri quæſiti e ſuperioribus.

PROB. XVI.

XX. *Si penſio annua librarum* a, *per quinque annos proxime ſequentes ſolvenda, ematur parata pecunia* c, *quæritur quanti æſtimanda ſit uſura centum librarum per annum.*

Pone $1 - x$ uſuram uſuræ pecuniæ x in anno, hoc eſt quod pecunia 1 poſt annum ſolvenda valet x paratæ pecuniæ (*c*); & per analogiam pecu-

(*b*) Siquidem $y = \frac{s}{2} + p$; $z = \frac{s}{4} - p$; $x = \frac{a - s}{2} + q$; $u = \frac{a - s}{2} - q$; & $uy = z^2$, unde per ſubſtitutionem &c.

(*c*) Hoc problema explicaturus fingo me per quinque annos tibi ſoluturum quotannis (puta) mille libras $= a$; Si totam hanc pecuniam initio primi anni velles accipere, inter nos convenit me tibi daturum pro quinque millibus, *Ex. gr.* quatuor mille ſeptingentas $= c$; ſed tantum vis centum libras; quæritur, quid, primo anno finito, mihi acceptum referre debeas pro centum his, citius, quam jus erat, ſolutis; liquet habiturum te pro accepto aliquid amplius, quam centum; & hoc aliquid amplius debet eſſe proportionale ei pecuniæ, quam e tota a demeres, ſi eam integram nunc reciperes.

Si

pecunia x poſt annum ſolvenda valebit ax paratæ pecuniæ, poſt duos annos axx (*d*), poſt tres ax^3, poſt quatuor ax^4, & poſt quinque ax^5. Adde jam hos quinque terminos & erit $ax^5 + ax^4 + ax^3 + axx + ax = c$, ſeu $x^5 + x^4 + x^3 + xx + x = \frac{c}{a}$, æquatio quinque dimenſionum, cujus ope cum x per † regulas poſt docendas inventum fuerit, pone $x . 1 :: 100\, y$. Et erit $y - 100$ uſura uſuræ centum librarum per annum. (*e*)

Atque has in quæſtionibus, ubi ſolæ quantitatum proportiones absque poſitionibus linearum conſiderandæ veniunt, inſtantias dediſſe ſufficiat: pergamus jam ad problematum geometricorum ſolutiones.

SECTIO QUARTA.

CAPUT PRIMUM.

Quomodo Quæſtiones Geometricæ ad æquationem redigantur.

I. Quæſtiones *Geometricæ* eadem facilitate iisdemque legibus ad æquationes nonnunquam redigi poſſunt, ac quæ de abſtractis quantitatibus proponuntur. Ut ſi recta A B in extrema & media proportione ſecanda ſit in C, hoc eſt ita ut BE quadratum maximæ partis ſit æqua- TAB. I. Fig. 5.

Si ſcirire poſſemus quid una libra poſt annum ſolvenda valeat paratæ pecuniæ; omnia noſceremus dicentes ſi x paratæ pecuniæ valet unum poſt annum, centum pecuniæ pariter paratæ quid poſt idem tempus valebunt? Valor autem ipſius x ſic reperitur; ſi 1 poſt annum valet nunc x, quid valebit a? Reſp. ax quæ exponit præſentem pecuniam pro a poſt annum.

(*d*) Cum autem a quotannis ſolvenda ſit, ſoluta nunc ax pro primo anno, ſolvere debebo a poſt duos annos, quam ſi præſtare vellem initio ſecundi anni dare deberem ax, ſed volo hanc ſolvere initio primi; ergo $1 . x :: ax . ax^2$ pro ſecundi anni penſione nunc ſolvenda; quod ratiocinium dabit pecuniam præſentem pro tertio anno $= ax^3$ &c.; ergo pecunia nunc danda, ut liberer a tota quinquenni penſione, $= ax^5 + ax^4 + ax^3 + ax^2 + ax = c$ ex pacto convento.

(*e*) Libet ob rei utilitatem ſubdere problema parum diverſum, a *Clar.* LEIBNITIO propoſitum in *Actis Lipſ.* anni 1683, menſe Octob. & ibidem ſolutum ab eo, ratione paulum a noſtra, diverſa.

Si annua uſura centum librarum data ſint (puta, viceſima) quid nunc ſolvendum eſt pro certa pecunia quæ præſtari ſolum deberet poſt annum?

Sit $100 = a$, uſuræ centum librarum $= b$; pecunia poſt annum numeranda $= c$, quæ autem nunc exhiberi debet $= y$, & uſuræ poſt annum hujus ſummæ y, ſint $= x$. Erit $a . b :: y . x$, & $a + b . b :: y + x . x$, ſed quod nunc ſolvere debes, & ejus annuæ uſuræ ſimul æquant pecuniam poſt annum dandam, ergo $x + y = c$, & $a + b . b :: c . x = \frac{bc}{a+b}$, quare $y = c - x = \frac{ac}{a+b}$.

† *Nempe inveniendo figuras primas radicis per conſtructionem quamvis mechanicam & reliquas per methodum Vietæ.*

æquale rectangulo B D ſub tota & minore parte contento: poſito $AB = a$ & $BC = x$ erit $AC = a - x$, & $xx = a$ in $a - x$; (*a*) æquatio quæ per reductionem dat (*b*) $x = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}aa}$.

II. Sed in rebus geometricis, quæ frequentius occurrunt a variis linearum poſitionibus & relationibus complexis ita dependere ſolent, ut egeant ulteriori inventione & artificio, quo ad algebraicos terminos deduci poſſint. Et licet in hujuſmodi caſibus difficile ſit aliquid præſcribere, & cujusque ingenium ſibi debeat eſſe operandi norma; conabor tamen diſcentibus viam præſternere. Sciendum eſt itaque quod quæſtiones circa easdem lineas definito quolibet modo ſibi invicem relatas, poſſint varie proponi, ponendo alias atque alias quærendas eſſe ex aliis datis. Sed de quibuscunque tamen datis vel quæſitis inſtituitur quæſtio, ſolutio ejus eadem plane methodo ex analyſeos ſerie perficietur, nulla omnino circumſtantia variata præter fictas linearum ſpecies ſive nomina, quibus data a quæſitis ſolemus

TAB. I. Fig. 6. diſtinguere. (*c*) Quemadmodum ſi quæſtio ſit de iſoſcele CBD in circulum inſcripto, cujus latera BC, BD, & baſis CD cum diametro circuli AB conferenda ſunt; ea vel proponi poteſt de inveſtigatione *diametri* ex datis lateribus & baſi, vel de inveſtigatione *baſis* ex datis lateribus & diametro, vel denique de inveſtigatione *laterum* ex datis baſi & diametro. Sed utcunque proponitur, redigetur ad æquationem per eandem ſeriem analyſeos. Nempe, ſi quæratur *diameter*, pono $AB = x$, $CD = a$, & BC vel $BD = b$. Tum (ducta AC,) propter ſimilia triangula ABC & CBE eſt $AB . BC :: BC . BE$, ſive $x . b :: b . BE$. Quare $BE = \frac{bb}{x}$. Eſt & $CE = \frac{1}{2}CD$ ſive $\frac{1}{2}a$: & propter angulum CEB rectum, $CEq + BEq = BCq$, hoc eſt $\frac{1}{4}aa + \frac{b^4}{xx} = bb$. Quæ æquatio per reductionem dabit quæſitum x. (*e*)

III.

(*a*) Nam per problematis legem, quadratum ex B C æquat ractangulum ex BA in AC. Vide EUCL. 11. II., & 30. VI.

(*b*) Vide Sect. II. Art. IX. & X.

(*c*) Etenim algebraica problematis ſolutio fit per æquationem, æque ac ſolutio problematis arithmetici, id eſt, in hoc ſolutionum genere quæritur quomodo variæ quantitates invicem æquales fiant, quod æque bene fit, ut patet, quærendo quo pacto datæ æquentur quæſitis, aut quæſitæ datis.

(*d*) Ratiocinium, quo hoc problema ſolvitur in tribus his caſibus eſt unicum, nempe (per EUCL. 8. VI.) $AB . BC :: CB . BE$, & (ob EUCL. 47. I.) $CEq + EBq = BCq$; & ex hac unica ſyntheſi deducuntur æquationes tres, pro tribus caſtbus, quæ ſymbolis tantum differunt; ut videre potes hoc, & ſequenti articulo.

(*e*) Reductio fit primum, ducendo cuncta in xx, unde $\frac{aaxx}{4} + b^4 = bbxx$, & rurſus in 4, ne ulla manet quantitas fracta, & exit $aaxx + 4b^4 = 4bbxx$ 2°. Conjiciendo in easdem partes terminos omnes, ubi eſt xx, quod dat $4b^4 = 4bbxx - aaxx$; tum omnia dividendo per $4bb - aa$, unde conficitur $\frac{4b^4}{4bb - aa} = xx$; demum extrahendo radicem quadratam, ex quo fit $x = \sqrt{\frac{2bb}{(4bb - aa.)}}$

III. Sin quæratur *baſis*, pono AB $= c$, CD $= x$ & BC vel BD $= b$. Tum (ducta AC) propter ſimilia triangula ABC & CBE eſt AB. BC :: BC. BE, ſive $c . b :: b$. BE. Quare BE $= \frac{bb}{c}$. Eſt & CE $= \frac{1}{2}$ CD ſive $\frac{1}{2} x$, & propter angulum CEB rectum CEq + BEq = BCq hoc eſt $\frac{1}{4} xx + \frac{b^4}{cc} = bb$; æquatio quæ per reductionem dabit quæſitum x. (*f*)

IV. Atque ita ſi *latus* BC vel BD quæratur, pono AB $= c$, CD $= a$, & BC vel BD $= x$. Et (AC ut ante ducta) propter ſimilia triangula ABC & CBE eſt AB. BC :: BC. BE; ſive $c . x :: x$. BE. Quare BE $= \frac{xx}{c}$. Eſt & CE $= \frac{1}{2}$ CD ſive $\frac{1}{2} a$; & propter angulum CEB rectum eſt CEq + EBq = BCq, hoc eſt $\frac{1}{4} aa + \frac{x^4}{cc} = xx$; æquatio quæ per reductionem dabit quæſitum x. (*g*)

V. Vides itaque quod in unoquoque caſu calculus quo pervenitur ad æquationem, per omnia ſimilis ſit, & eandem æquationem pariat, excepto tantum quod lineas aliis litteris deſignavi prout datæ vel quæſitæ ponuntur. Ex diverſis quidem datis & quæſitis oritur diverſitas in reductione æquationis inventæ. Nam æquationis $\frac{1}{4} aa + \frac{b^4}{xx} = bb$ alia eſt reductio ut obtineatur

(*f*) Eſt enim (cunctis ductis in 4) $xx + \frac{4b^4}{cc} = 4bb$, vel $xx = 4bb - \frac{4b^4}{cc}$, vel $xx = \frac{4bbcc - 4b^4}{cc}$, & $x = \sqrt{(\frac{4bbcc - 4b^4}{cc})} = \frac{2b}{c} \sqrt{(cc - bb)}$ (Sect. I. art. LXXI.). Hæc autem æquatio facile per ſubſtitutionem ex ſuperiori deducitur; Nam vocavimus c rectam, quam ibi x, & x quam ibi a; atque ideo, has pro illis notis ſubſtituendo, prior æquatio fit $xx + 4\frac{b^4}{cc} = 4bb$, ſecunda ipſiſſima.

(*g*) Siquidem, cunctis in cc ductis, eſt $\frac{1}{4} aacc + x^4 = ccxx$, & $x^4 = ccxx - \frac{1}{4} aacc$, ac $xx = \frac{cc}{2} \pm \sqrt{(\frac{c^4 - aacc}{4})} = \frac{cc \pm c}{2} \sqrt{(cc - aa)}$, & $x = \sqrt{((\frac{cc \pm c}{2}) \sqrt{(cc - aa)})}$ Sed & hæc æquatio ex duabus ſuperioribus elicitur ſubſtituendo in priori c pro x, & x pro b, & in ſecunda a pro x, & x pro b. Quid ſi problemata generalius proponerentur tanquam theoremata inveſtiganda, & quantitates exponerentur græcis litteris, quibus nullam diſtinctionis inter datas, & quæſitas, ideam ſubnectere conſuevimus? Proponamus, ex. gr. hoc problema ſit. *Quæritur relatio quæ eſt inter latus, baſim trianguli iſoſcelis, & diametrum circuli circumſcripti.*

Sit AB $= \alpha$, BC $= \beta$, CD $= \gamma$, & per ſuperius ratiocinium eſt BE $= \frac{\beta\beta}{\alpha}$, & CE $= \frac{\gamma}{2}$; quare $\beta\beta$ (BCq) $= \frac{\gamma\gamma}{4} + \frac{\beta^4}{\alpha\alpha}$ (CEq + EBq) In hac generaliſſima æquatione ſubſtitue x pro α, ſi quæras diametrum; pro γ ſi baſim; ſi demum latus pro β; & reperies ſuperiores æquationes, digito tangens veritatem ſuperioris aſſerti.

neatur $x = \frac{2bb}{\surd(4bb - aa)}$ valor de AB, & æquationis $\frac{1}{4}xx + \frac{b^4}{cc} = bb$ alia reductio ut obtineatur $x = \frac{2b}{c}\surd(cc - bb)$ valor de CD; & æquationis $\frac{1}{4}aa + \frac{x^4}{cc} = xx$ reductio longe alia ut obtineatur $x = \surd((\frac{1}{2}cc \pm \frac{1}{2}c)\surd(cc - aa))$ valor de BC vel BD: (perinde ut hæc $\frac{1}{4}aa + \frac{b^4}{cc} = bb$, ad eliciendum c, a, vel b diverſis modis reduci debet:) (*h*) ſed in harum æquationum inventione nulla fuit diverſitas. Et hinc eſt quod jubent ut nullum inter datas & quæſitas quantitates habeatur diſcrimen. Nam cum eadem computatio cuique caſui datorum & quæſitorum competat, convenit ut ſine diſcrimine concipiantur & conferantur quo rectius judicetur de modis computandi: vel potius convenit ut fingas quæſtionem de ejusmodi datis & quæſitis propoſitam eſſe per quas arbitreris te poſſe ad æquationem faciliime pervenire.

VI. (*i*) *Propoſito igitur aliquo problemate, quantitates quas involvit confer, & nullo inter datas & quæſitas habito diſcrimine, perpende quomodo aliæ ex aliis dependeant ut cognoſcas quænam ſi aſſumantur, ſynthetice gradiendo, dabunt ceteras.* Ad quod faciendum non opus eſt ut prima fronte de modo cogites quo aliæ ex aliis per calculum algebraicum deduci poſſint, ſed ſufficit animadverſio generalis quod poſſint directo nexu quomodocunque de-
TAB. I. Fig. 7. duci. Verbi gratia; ſi quæſtio ſit de circuli diametro AD tribusque lineis AB, BC, & CD in ſemicirculo inſcriptis, & ex reliquis datis quæratur BC; primo intuitu manifeſtum eſt diametrum AD determinare ſemicirculum, dein lineas AB & CD per inſcriptionem determinare puncta B & C atque adeo quæſitum BC idque nexu maxime directo; & quo pacto tamen BC ex his datis per analyſin eruatur non ita manifeſtum eſt. Hoc idem quoque de AB vel CD, ſi ex reliquis datis quærerentur, intelligendum eſt. Quod ſi AD ex datis AB, BC, & CD quæreretur, æque patet id non fieri poſſe ſynthetice; ſiquidem punctorum A ac D diſtantia dependet ex angulis B & C, & illi anguli ex circulo cui datæ lineæ ſunt inſcribendæ, & ille circulus non datur ignota AD diametro. Rei igitur natura poſtulat ut AD non ſyntethice ſed ex ejus aſſumptione quæratur ut ad data fiat regreſſus. (*k*)

VII.

(*h*) Hic Auctori æquatio $\frac{aa}{4} + \frac{b^4}{cc} = bb$ eadem præſtat, ac nobis æquatio $\frac{\gamma\gamma}{4} + \frac{\beta^4}{\alpha\alpha} = \beta\beta$.

(*i*) Antequam problema ad æquationem deducendum aggredimur, prænoſcendum eſt unde ratiocinium incipiemus, ne temere per ſenticoſa & invia loca agamur, & deinde quænam recta quæſitæ ſymbolo ſit diſtinguenda. Probe enim ſcire debemus quod quæri debeat, & plures ſæpe ſunt lineæ, quæ, ſi magnitudine &c. darentur, problema ſolverent. In hoc labyrintho filus eſt regula ſequens Authoris.

(*k*) Huic regulæ adde has.

1. *Si tales plures adſint ex iis eligi debet ea, cujus valores ſunt pauciores.* Æquatio enim inferioris gradus hinc exſurget.

2. *Si*

VII. Cum varios ordines, quibus termini quæſtionis ſic evolvi poſſint, perſpexeris, *e ſyntheticis quoslibet adhibe*, *aſſumendo lineas tanquam datas*, *a quibus ad alias facillimus videtur progreſſus & ad ipſas viciſſim difficillimus.* Nam computatio, ut per varia media poſſit incedere, tamen ab iſtis lineis initium ſumet; ac promptius perficietur fingendo quæſtionem ejusmodi eſſe ac de iſtis datis & quæſito aliquo ab iſtis facillime prodituro inſtitueretur, quam de quæſtione, prout revera proponitur, cogitando. Sic in exemplo jam allato ſi ex reliquis datis quæritur AD; cum id ſynthetice fieri non poſſe percipiam, ſed ab ipſo tamen, ſi modo daretur, diſcurſum ad alia directo nexu incedere, aſſumo AD tanquam datum & abinde computationem ab aſſumptis ad ceteras quantitates eo more promovendo quo linearum relationes dirigunt, æquatio tandem inter duos ejusdem alicujus quantitatis valores ſemper obtinebitur, ſive ex valoribus unus ſit litera ſub initio operis quantitati pro nomine impoſita, & alter per computationem inventus, ſive uterque per computationem diverſimode inſtitutam inveniatur. TAB. I. Fig. 7.

VIII.

2. *Si vero plures ſint, quarum valores numero ſint æquales, ea ſumenda, quæ plures habet æquales magnitudine.*

3. Facilius enim ſolvuntur æquationes, in quibus aliqui valores æquales ſunt, ut infra videbis; & præterea minus anceps eſt problematis ſolutio, & æquatio ſimplicior. Nam ſi æquatio duarum dimenſionum duos æquales valores habeat, ea erit aut non affecta, aut binomii quadratum; quarum radix facilius invenitur, quam æquationis quadraticæ affectæ, & æquatio ipſa certe ſimplicior eſt.

4. Ad regulas has ſervandas plurimum conducit perpendere utrum quæſitæ poſitio varia poſſit eſſe; tunc enim duo habentur valores, ſi ea duos locos occupare poteſt; tres, ſi tres locos; &c. *Ex. gr.* in problemate artic. I, quia unum circulum poſſumus dato triangulo circumſcribere, una eſt diametri magnitudo, id eſt, x habere nequit duos valores inæquales; & quia una ex legibus æquatione expreſſis eſt, quod hæc diameter ad datam chordam normalis eſt, hæc diameter ad triangulum relata unam habet poſitionem, ſed cum idem triangulum ad contrarias partes verti poſſit, ut B*cd*, & nullo pacto liceat æquatione determinare utrum priorem, vel ſecundum ſitum obtineat, idcirco x duos valores habere debet, ſed æquales, quorum alter negativus, alter poſitivus; & hoc revera indicat æquatio Tab. A. Fig. 6.

$xx = \frac{4b^4}{4bb - aa}$, nam extracta radice habetur $x = \frac{\pm 2bb}{\sqrt{(4bb - aa)}}$.

Si vero quæratur baſis (art. III. hujus): accurate loquendo, baſis dimidiata quæritur; nam, ea data, datur tota, tunc autem $\frac{x}{2}$ (EC) habet duos valores æquales; ſed alterum poſitivum, alterum negativum, quod innuitur ab æquatione $\frac{xx}{4} = \frac{bbcc - b^4}{cc}$; nam $\frac{x}{2} = \pm \frac{b}{c} \sqrt{(cc - bb)}$.

Si demum petatur latus, eodem pacto quæritur CB, ac BD, quare jam duos valores æquales habere debet, ſed & (juncta AD) eſt etiam CAD triangulum Iſoſcele eidem circulo ACBD inſcriptum, quare x debet habere quatuor valores, quorum bini ſunt æquales, quod reipſa docet æquatio inventa pro hac hypotheſi.

Ita pariter in hoc problemate de circuli diametro, & tribus rectis inſcriptis; ſi inſcriptæ ſint ut in figura, habebitur unus valor diametri, alter ſi CB ſit ubi nunc eſt BA, & hæc ubi illa, alter ſi BC veniat in CD, & hæc in BC, quare x habebit tres ſaltem valores.

5. *Cum vero plures habentur quantitates, quales deſcribuntur in N°. 2. hujus, valores inæquales arte aliqua revocandi ſunt ad æqualitatem: aut nova quæſita introducenda in problemate, ita ut hæ inventa dent reliquas.*

Hujus regulæ explicatio, exempla, & uſus infra non raro occurrent, & jam ſupra occurrerunt in prob. I. XIII. &c.

VIII. Ceterum ubi terminos quæſtionis ſic in genere comparaveris, plus artis & inventionis in eo requiritur ut advertas particulares iſtos nexus ſive linearum relationes quæ computationi accommodantur. Nam quæ laxius perpendenti videbantur immediate & relatione proxima connecti, cum illam relationem algebraice deſignare volumus, circuitum plerumque quoad conſtructiones ſchematum de novo moliendas & computationem per gradus promovendam exigunt, quemadmodum de BC ex AD, AB, & CD colligendo conſtare poteſt. Per ejusmodi enim propoſitiones vel enunciationes ſolummodo gradiendum eſt quæ aptæ ſunt ut terminis algebraicis deſignentur, quales præſertim ab Axiom. 19, Prop. 4. lib. 6, & Prop. 47. lib. 1. Elem. proveniunt.

IX. *Imprimis* itaque promovetur calculus per additionem vel ſubductionem linearum, eo ut ex valoribus partium obtineatur valor totius, vel ex valoribus totius & unius partis obtineatur valor alterius.

X. *Secundo* promovetur ex linearum proportionalitate: ponimus enim (ut ſupra) factum a mediis terminis diviſum per alterutrum extremorum eſſe valorem alterius. Vel, quod perinde eſt, ſi valores omnium quatuor proportionalium prius habeantur, ponimus æqualitatem inter factos extremorum & factos mediorum. Linearum vero proportionalitas ex triangulorum ſimilitudine maxime ſe prodit, quæ cum ex æqualitate angulorum dignocatur, in iis comparandis Analyſta debet eſſe perſpicax, atque adeo non ignorabit Prop. 5, 13, 16, 29, & 32, lib. 1. Prop. 4, 5, 6, 7, & 8, lib. 6. Et Prop. 20, 21, 22, 27 ac 31. lib. 3. Elementorum. Quibus etiam referri poteſt Prop. 3. lib. 6, ubi ex proportionalitate linearum colligitur angulorum æqualitas & contra. Atque idem aliquando præſtant. Prop. 35, & 36. lib. 3.

XI. *Tertio* promovetur per additionem vel ſubductionem quadratorum. In triangulis namque rectangulis addimus quadrata minorum laterum ut obtineatur quadratum maximi, vel a quadrato maximi lateris ſubducimus quadratum unius e minoribus ut obtineatur quadratum alterius.

XII. Atque his paucis fundamentis (ſi adnumeretur Prop. 1. lib. 6. Elem, cum de ſuperficiebus agitur, ut & aliquæ propoſitiones ex lib. 11. & 12. deſumptæ cum agitur de ſolidis,) tota ars analytica quoad Geometriam rectilineam innititur. Quin etiam ad ſolas linearum ex partibus compoſitiones & ſimilitudines triangulorum poſſunt omnes problematum difficultates reduci; adeo ut non opus ſit alia theoremata adhibere: quippe quæ omnia in hæc duo reſolvi poſſunt, & proinde ſolutiones etiam quæ ex iſtis depromuntur. Inque hujus rei inſtantiam ſubjunxi problema de perpendiculo in baſem obliquanguli trianguli demittendo ſine adjumento Prop. 47. lib. 1. ſolutum. Etſi vero juvet ſimpliciſſima principia a quibus problematum ſolutiones dependent non ignoraſſe, & iſtis ſolis adhibitis poſſe quæ-

Digitized by Google

quælibet ſolvere : expeditionis tamen gratia convenit ut non ſolum Prop. 47. lib. 1. Elem., cujus uſus eſt frequentiſſimus; ſed & alia etiam *theoremata* nonnunquam adbeantur.

XIII. Quemadmodum ſi, perpendiculo in baſem obliquanguli trianguli demiſſo, de ſegmentis baſis ad calculum promovendum agatur; ex uſu erit ſcire, quod differentia quadratorum e lateribus æquetur duplo rectangulo ſub baſi & diſtantia perpendiculi a medio baſis. (*l*)

XIV. Si trianguli alicujus verticalis angulus biſecetur, computationi non ſolum inſerviet quod baſis ſecetur in ratione laterum (*m*), ſed etiam quod differentia factorum a lateribus & a ſegmentis baſis æquetur quadrato lineæ biſecantis angulum. (*n*)

XV.

(*l*) Hanc propoſitionem demonſtrat Pappus *Coll. Math. lib.* IV. Prob. 120. Et Commandinus in ſuo *commentario* ad Pappi *Collect. Mathem. lib.* IV. Prop. 7. Tamen cum non ubique proſtet, eam addere libet.

Tab. A. Fig. 7. Sit Triangulum quodvis ABC; perpendicularis demiſſa a vertice B anguli ABC in ſubjectam baſim AC ſit AD; & baſis AC biſecta ſit in E. Centro B, radio BA, laterum minimo deſcribatur circulus occurrens baſi AC in F, & lateri BC in G. Quoniam major pars CD æquat ſemiſummam una cum ſemidifferentia totius, & eſt CE ſemiſumma; erit ED ſemidifferentia. Sed CF eſt differentia inter partes CD, majorem & DA, vel DF minorem; ergo C F eſt dupla ipſius DE; & rectangulum ſub AC; DE æquale bis rectangulo ACF.

Nunc produc latus CB donec rurſus circulo occurrat in H. Rectangulum HCG æquale eſt rectangulo ACF (36. III. Elem.) & eſt rectangulum HCG differentia quadratorum CB & BG vel BA (6. II. Elem.) Ergo &c.

(*m*) Euclides 3. VI. hanc propoſitionem demonſtrat quando interior eſt angulus biſectus. Vera tamen eſt etiam quando externus angulus biſecatur, & eodem pacto oſtenditur.

Tab. A. Fig. 8. Fig. 9. (*n*) 12. *Si trianguli cujuſvis ABC angulus quilibet (vel interior ACB, vel exterior BCE) biſecetur recta CD occurrente baſi AB in D, erit differentia inter rectangulum contentum a lateribus AC, CB angulum biſectum comprehendentibus, & illud quod continetur a baſeos ſegmentis AD, DB æqualis quadrato ex CD, recta angulum bipartiente.*

Fiat ſuper AD in puncto D angulu ADH æqualis angulo ACD, & producatur LH donec lateri AC (producto quatenus opus eſt) occurrat in H. Angulus AHD æquat angulum ADC (Eucl. 32. I.); adeoque ſimilia ſunt triangula ADC, AHD, (Eucl. 4. VI.).

Si nunc bifariam dividitur angulus interior; anguli AHD, DHC, ſimul ſumpti æquantur duobus rectis æqualibus ipſis ADC, CDB ſimul ſumptis (Eucl. 13. I.); demptis ergo æqualibus AHD, ADC, reſtat DHC angulo CDB par; ſed & angulus HCD ipſi DCB eſt par, ergo angulus HDC æqualis eſt angulo DBC (Eucl. 32. I.), & ſimilia ſunt triangula DHC, CBD; quocirca BC eſt ad CD ut CD ad CH (Eucl. 4. VI.), & rectangulum ſub BC; CH æquale quadrato ex CD (Eucl. 16. VI.): Atqui propter ſimilia triangula CDA, DHA, eſt CA ad AD, ut AD AH, verum ut CA ad AD, ita CB ad BD (Eucl. 3. VI.), eſt ideo AD ad AH, ut CB ad BD, atque rectangulum ſub AD; BD æquale rectangulo ſub AH; CB (Eucl. 16. VI.); quapropter addendo æqualibus æqualia, rectangula ſub BC; AH, & ſub BC; CH utraque ſimul (id eſt rectangulum ſub BC; CA (Eucl. 1. II.)) æqualia quadrato ex CD una cum rectangulo ſub AD; DB; atque utrinque demto rectangulo ſub AD; DB, differentia rectangulorum &c.

Si autem biſecetur angulus exterior; angulus AHD æquat angulum ADC, & ex hypotheſi angulus HCD æquat angulum DCB; quam ob rem angulus CDH æquat angulum CBD, & ſimilia ſunt triangula BDC, DHC; eſt itaque HC ad CD, ut CD ad CB, aut rectangulum ſub BC; CH æquale eſt quadrato ex CD. Atqui ob ſimilia triangula ADC; AHD, eſt AC ad AD, ut AD ad AH; eſt etiam AC ad AD ut CB ad BD, (vide ſupra), ergo AD ad AH eſt ut BC ad BD, & rectan-

XV. Si de figuris in circulo inſcriptis res eſt, theorema non raro ſubveniet quod inſcripti cujuslibet quadrilateri factus a diagoniis æquetur ſummæ factorum a lateribus oppoſitis. (*o*)

XVI. Et hujusmodi plura inter exercendum obſervet Analyſta, & in penum forte reſervet; ſed parcius utatur ſi pari facilitate aut non multo difficilius poſſit ſolutionem e ſimplicioribus computandi principiis extruere. Quamobrem ad tria primo propoſita tanquam notiora, ſimpliciora, magis generalia, pauca, & omnibus tamen ſufficientia, animum præſertim advertat, & omnes difficultates ad ea præ ceteris reducere conetur.

XVII. Sed ut hujuſmodi theoremata ad ſolvenda problemata accommodari poſſint, *ſchemata* plerumque ſunt ultra *conſtruenda*, idque ſæpiſſime producendo aliquas ex lineis donec ſecent alias, aut ſint aſſignatæ longitudinis; vel ab inſigniori quolibet puncto ducendo lineas aliis parallelas aut perpendiculares, vel inſigniora puncta conjungendo, ut & aliter nonnunquam conſtruendo, prout exigunt ſtatus problematis, & theoremata quæ ad ejus ſolutionem adhibentur. Quemadmodum ſi duæ non concurrentes lineæ datos angulos cum tertia quadam efficiant, producimus forte ut concurrentes conſtituant triangulum cujus anguli & proinde laterum rationes dantur. Vel ſi quilibet angulus detur, aut ſit alicui æqualis, in triangulum ſæpe complemus ſpecie datum, aut alicui ſimile, idque vel producendo aliquas ex lineis in ſchemate vel ſubtenſam aliter ducendo. Si triangulum ſit obliquangulum, in duo rectangula ſæpe reſolvimus, demittendo perpendiculum. Si de figuris multilateris agatur, reſolvimus in triangula, ducendo lineas diagonales: & ſic in ceteris; ad hanc metam ſemper collimando *ut ſchema in triangula vel data, vel ſimilia, vel rectangula reſolvatur*. Sic, in exemplo propoſito, duco diagonium BD, ut trapezium ABCD in duo triangula, ABD rectangulum, & BDC obliquangulum reſolvatur. Deinde reſolvo triangulum obliquangulum in duo rectangula demittendo perpendiculum a quodlibet ejus angulo B, C, vel D in latus oppoſitum: quemadmodum a B in CD productum ad E ut huic perpendiculo BE occurrat. Interea vero cum anguli BAD & BCD duos rectos (per 22. III. Elem.) perinde ac BCE & BCD conſtituant; percipio angulos BAD & BCE æquales eſſe, adeoque triangula BCE ac DAB ſimilia. Atque ita video computationem (aſſumendo AD, AB & BC tanquam ſi CD quæreretur) ad hunc modum inſtitui poſſe, videlicet AD & AB (propter triangulum AB rectangulum) dant BD: AD, AB, BD & BC (prop- TAB. I. Fig. 8.

ctangulum ſub AD; DB æquale rectangulo ſub AH; BC, aut rectangulis ſub AC; CB, & ſub CH; CB ſimul (EUCL. r. II.); quare æqualia ex æqualibus auferendo, rectangulum ſub AC; CB æquat exceſſum rectanguli ſub AD; DB ſuper quadratum ex DC; addito communi quadrato ex CD, rectangulum ſub AC; CB & quadratum ex CD ſimul, æquantur rectangulo ſub AD; DB & ablato hinc inde rectangulo ſub AC; CE, quadratum rectæ biſecantis angulum &c.

(*o*) Cujus Theorematis obviâ eſt demonſtratio.

propter ſimilia triangula ABD & CEB) dant BE & CE . BD, BE (propter triangulum BED rectangulum) dant ED; & ED — EC dat CD. Unde obtinebitur æquatio inter valorem de CD ſic inventum & literam pro ea ſuffectam. Poſſumus etiam (& maximam partem ſatius eſt quam opus in ſerie continuata nimis proſequi), a diverſis principiis computationem incipere, aut ſaltem diverſis modis ad eandem quamlibet concluſionem promovere, ut duo tandem obtineantur ejuſdem cujusvis quantitatis valores qui æquales ponantur. Sic AD, AB, & BC dant BD, BE, & CE ut prius; deinde CD + CE dat ED; ac denique BD & ED (propter triangulum rectangulum BED) dant BE. Poteſt etiam computatio hac lege optime inſtitui ut valores quantitatum inveſtigentur quibus alia quæpiam relatio cognita intercedit; & illa deinde relatio æquationem dabit. Sic cum relatio inter lineas BD, DC, BC & CE ex Prop. 12. lib. 2. Elem. conſtet; nempe quod ſit $BDq - BCq - CDq = 2CD.CE$: quæro BDq ex aſſumptis AD & AB; ac CE ex aſſumptis AD, AB, & BC. Et aſſumendo denique CD facio $BDq - BCq - CDq = 2\,CD.CE$. Ad hos modos & hujusmodi conſiliis ductus, de ſerie analyſeos deque ſchemate propter eam conſtruendo ſemper debes una proſpicere.

XVIII. Ex his, credo, manifeſtum eſt quid ſibi velint Geometræ cum jubent putes factum eſſe quod quæris. Nullo enim inter cognitas & incognitas quantitates habito diſcrimine, quaſlibet ad ineundum calculum aſſumere potes quaſi omnes ex prævia ſolutione fuiſſent notæ, & non amplius de ſolutione problematis, ſed de probatione ſolutionis ageretur. Sic in primo ex tribus jam deſcriptis computandi modis, etſi forte AD revera quæratur, fingo tamen CD quærendum eſſe, quaſi vellem probare an valor ejus ab AD derivatus quadret cum ejus quantitate prius cognita. Sic etiam in duobus poſterioribus modis pro meta non propono quantitatem aliquam quærendam eſſe, ſed æquationem e relationibus linearum utcunque eruendam: & in ejus rei gratiam aſſumo omnes AD, AB, BC, & CD tanquam notas, perinde ac ſi (quæſtione prius ſoluta) de tentamine jam ageretur an conditionibus ejus hæ probe ſatisfaciant, quadrando cum quibuſlibet æquationibus quas linearum relationes produnt. Opus quidem hac ratione & conſiliis prima fronte aggreſſus ſum, ſed cum ad æquationem deventum eſt, ſententiam muto, & quantitatem deſideratam per iſtius æquationis reductionem & ſolutionem quæro. Sic denique plures quantitates tanquam cognitas ſæpenumero aſſumimus quam in ſtatu quæſtionis exprimuntur. Hujuſque rei inſignem in 55° ſequentium problematum inſtantiam videre eſt, ubi a, b, & c in æquatione $aa + bx + cxx = yy$, pro determinatione Sectionis conicæ aſſumpſi, ut & alias lineas r, s, t, v de quibus problema, prout proponitur, nihil innuit. Nam quaſlibet quantitates aſſumere licet quarum ope poſſibile ſit ad æquationes pervenire; hoc ſolum cavendo ut ex illis tot æquationes obtineri poſſint quot aſſumptæ ſunt quantitates revera incognitæ.

Digitized by Google

XIX. Poſtquam de computandi methodo conſtat & ornatur ſchema, quantitatibus quæ computationem ingrediuntur (hoc eſt ex quibus aſſumptis aliarum valores derivandi ſunt, donec tandem ad æquationem perveniatur) nomina impone, delegendo quæ problematis omnes conditiones involvunt, & operi præ ceteris accommodatæ videntur, & concluſionem (quantum poſſis conjicere) ſimpliciorem reddent, ſed non plures tamen quam propoſito ſufficiunt. Itaque pro quantitatibus, quæ ex aliarum vocabulis facile deduci poſſint, propria vocabula vix tribuas. Sic ex tota linea & ejus partibus, ex tribus lateribus trianguli rectanguli, & ex tribus vel quatuor proportionalibus unum aliquod, minimum, ſine nomine permittere ſolemus, eo quod valor ejus e reliquorum nominibus facile derivari poſſit. Quemadmodum in exemplo jam allato, ſi dicam $AD = x$ & $AB = a$, ipſum BD nulla litera deſigno, quod ſit tertium latus trianguli rectanguli ABD & proinde valeat $\sqrt{(xx - aa)}$. Dein, ſi dicam $BC = b$, cum triangula DAB & BCE ſint ſimilia, & inde lineæ AD . AB :: BC . CE proportionales, quarum tribus AD, AB, & BC impoſita ſunt nomina; ea propter quartam CE ſine nomine permitto, & ejus vice valorem $\frac{ab}{x}$ ex hac proportionalitate detectum uſurpo. Atque ita ſi DC vocetur c, ipſi DE nomen non aſſigno, quod ex partibus ejus DC & CE, ſive c & $\frac{ab}{x}$, valor $c + \frac{ab}{x}$ prodeat.

TAB. I. Fig. 8.

XX. Ceterum dum de his moneo, problema ad æquationem pene redactum eſt. Nam, poſtquam literæ pro ſpeciebus principalium linearum præſcriptæ ſunt, nihil aliud agendum reſtat quam ut ex iſtis ſpeciebus valores aliarum linearum juxta methodum præconceptam eruantur, donec modo quovis proviſo in æquationem coeant. Et in hoc caſu nihil reſtare video niſi ut per triangula rectangula BCE & BDE dupliciter eliciam BE. Nempe eſt

$$BCq - CEq \text{ (ſive } bb - \frac{aabb}{xx}) = BEq$$

ut &

$$BDq - DEq \text{ (ſive } xx - aa - cc - \frac{2abc}{x} - \frac{aabb}{xx}) = BEq.$$

Et hinc (utrobique deleto $\frac{aabb}{xx}$) æquationem habebo

$$bb = xx - aa - cc - \frac{2abc}{x}:$$

Quæ reducta fit

$$x^3 = \begin{matrix} + aa \\ + bb \\ + cc \end{matrix}\, x + 2abc.$$

XXI.

XXI. Cum vero de ſolutione problematis hujus plures modos, etſi non multum diſſimiles, in præcedentibus recenſuerim, quorum iſte de Prop. 12. Lib. 2. Elem. deſumptus ſit ceteris quodammodo concinnior; eundem placet etiam ſubjungere. Sit itaque AD $= x$, AB $= a$, BC $= b$, & CD $= c$, eritque BD$q = xx - aa$, & CE $= \frac{ab}{x}$ ut prius. Hiſce dein ſpeciebus in theorema BDq — BCq — CDq = 2CD.CE ſubſtitutis orietur $xx - aa - bb - cc = \frac{2abc}{x}$; & facta reductione

$$x^3 = \begin{array}{l} + aa \\ + bb \\ + cc \end{array} x + 2abc. \text{ Ut ante.}$$

Sed ut pateat quanta ſit in ſolutionum inventione varietas, & proinde quod in eas incidere prudenti Geometræ non ſit admodum difficile, viſum fuit plures adhuc modos hoc idem perficiendi docere. Atque quidem ducto diagonio BD ſi vice perpendiculi BE a puncto B in latus DC ſupra demiſſi, demittatur perpendiculum a puncto D in latus BC vel a puncto C in latus BD, quo obliquangulum triangulum BCD in duo rectangula utcunque reſolvatur, iisdem ferme, quas jam deſcripſi methodis, ad æquationem pervenire licet. Sunt & alii modi ab iſtis ſatis differentes.

XXII. Quemadmodum ſi diagonii duo AC & BD ducantur, dabitur BD ex aſſumptis AD & AB; ut & AC ex aſſumptis AD & CD, deinde per notum theorema de figuris quadrilateris in circulo inſcriptis, nempe quod ſit AD . BC + AB . CD = AC . BD obtinebitur æquatio. Stantibus itaque linearum AD, AB, BC, CD vocabulis x, a, b, c; erit BD $= \sqrt{(xx - aa)}$ & AC $= \sqrt{(xx - cc)}$ per 47. 1. Elem. Et his linearum ſpeciebus in theorema jam recenſitum ſubſtitutis, exibit TAB. I. Fig. 9.

$$xb + ac = \sqrt{(xx - cc)} . \sqrt{(xx - aa)}.$$

Cujus æquationis partibus denique quadratis & reductis obtinebitur iterum

$$x^3 = \begin{array}{l} + aa \\ + bb \\ + cc \end{array} x + 2abc.$$

XXIII. Ceterum ut pateat etiam quo pacto ſolutiones ex iſto theoremate petitæ poſſint inde ad ſolas triangulorum ſimilitudines redigi; erigatur BH ipſi BC perpendicularis & occurrens AC in H, & fient triangula BCH, BDA ſimilia, propter angulos ad B rectos, & ad C ac D (per 21. 3. Elem.) æquales; ut & triangula BCD, BHA ſimilia, propter æquales angulos tum ad B (ut pateat demendo communem angulum DBH a duobus rectis,) tum ad D ac A (per 21. 3. Elem.) Videre eſt itaque

 quod

quod ex proportionalitate BD.AD :: BC.HC detur HC; ut & AH ex proportionalitate BD. CD :: AB. AH.* Unde cum ſit AH + HC = AC, habebitur æquatio. Stantibus ergo præfatis linearum vocabulis x, a, b, c, nec non ipſarum AC & BD valoribus $\sqrt{(xx - cc)}$ & $\sqrt{(xx - aa)}$; prima proportionalitas dabit $HC = \frac{bx}{\sqrt{(xx - aa)}}$, & ſecunda dabit $AH = \frac{ac}{\sqrt{(xx - aa.)}}$ Unde propter AH + HC = AC erit $\frac{bx + ac}{\sqrt{(xx - aa)}} = \sqrt{(xx - cc)}$; æquatio quæ (multiplicando per $\sqrt{(xx - aa)}$ & quadrando) reducetur ad formam in præcedentibus ſæpius deſcriptam.

TAB. I. Fig. 10. XXIV. Adhæc ut magis pateat quanta ſit ſolvendi copia; producantur BC & AD donec conveniant in F, & fient triangula ABF & CDF ſimilia, quippe quorum angulus ad F communis eſt, & anguli ABF & CDF (dum complent angulum CDA ad duos rectos per 13. 1. & 22. 3. Elem.) æquales. Quamobrem ſi præter quatuor terminos de quibus inſtituitur quæſtio, daretur AF, proportio AB. AF :: CD. CF daret CF. Item AF — AD daret DF, & proportio CD. DF :: AB. BF daret BF; unde (cum ſit BF — CF = BC) emergeret æquatio. Sed cum duæ quantitates incognitæ AD ac DF tanquam datæ aſſumantur, reſtat alia æquatio invenienda. Demitto ergo BG in AF ad rectos angulos, & proportio AD. AB :: AB. AG dabit AG; quo habito, theorema e 13. 2. Elem. petitum, nempe quod ſit BFq + 2FAG = ABq + AFq, dabit æquationem alteram. Stantibus ergo a, b, c, x ut prius, & dicto AF = y: erit (inſiſtendo veſtigiis theoriæ jam excogitatæ) $\frac{cy}{a} = CF$. $y - x = DF$. $\frac{(y-x)a}{c} = BF$. Indeque $\frac{(y-x)a}{c} - \frac{yc}{a} = b$, æquatio prima. Erit etiam $\frac{aa}{x} = AG$, adeoque $\frac{aayy - 2aaxy + aaxx}{cc} + \frac{2aay}{x} = aa + yy$, æquatio ſecunda.

Quæ duæ per reductionem dabunt æquationem deſideratam. Nempe valor ipſius y per æquationem priorem inventus eſt $\frac{abc + aax}{aa - cc}$, qui in ſecundam ſubſtitutus, dabit æquationem ex qua recte diſpoſita fiet

$$x^3 = \begin{matrix} +aa \\ +bbx \\ +cc \end{matrix} + 2abc\text{, ut ante } (p).$$

XXV.

* Fac æquales angulos ABC; HBC; ex his proportionibus elice rectangula æqualia, & habebis demonſtratum ipſum theorema de quadrilateris &c.

(p) Nam æquatio $\frac{aayy - 2aaxy + aaxx}{cc} + \frac{2aay}{x} = aa + yy$ multiplicata per cc, & per x, dat $aayyx - 2aaxxy + aax^3 + 2aaccy = aaccx + ccyyx$; & omnibus membris in eandem partem collatis, ut, ſumma fiat = 0; ac diſpoſitis juxta dimenſionem y, habemus $yyaax - yyccx - 2aaxxy + 2aaccy + aax^3 - aaccx = 0$, id eſt $yy(aax - ccx) - y(2aaxx - 2aacc) + aax^3 - aaccx = 0$; & ſubſtituendo pro yy, & $-y$ valores

aabbcc

XXV. Atque ita ſi AB ac DC producantur donec ſibi mutuo occurrant, ſolutio haud aliter ſe habebit, niſi forte futura ſit paulo facilior. Quare aliud hujus rei ſpecimen e fonte multum diſſimili petitum potius ſubjungam, quærendo nempe aream quadrilateri propoſiti, idque dupliciter. Duco igitur diagonium BD ut in duo triangula quadrilaterum reſolvatur. Dein uſurpatis linearum vocabulis x, a, b, c, ut ante, invenio BD $= \sqrt{(xx - aa)}$ indeque $\frac{1}{2} a\sqrt{(xx - aa)}$ ($= \frac{1}{2}$ AB . BD) aream trianguli ABD. Porro demiſſo BE perpendiculariter in CD, erit (propter ſimilia triangula ABD, BCE) AD. BD :: BC, BE, & proinde BE $= \frac{b}{x}\sqrt{(xx - aa)}$. Quare etiam $\frac{bc}{2x}\sqrt{(xx - aa)}$ ($= \frac{1}{2}$ CD . BE) erit area trianguli BCD. Haſce jam areas addendo orietur $\left(\frac{ax + bc}{2x}\right)\sqrt{(xx - aa)}$ area totius quadrilateri. Non ſecus dicendo diagonium AC & quærendo areas triangulorum ACD & ACB, easque addendo, rurſus obtinebitur area quadrilateri $\left(\frac{cx + ba}{2x}\right)$ $\sqrt{(xx - cc)}$. Quare ponendo haſce areas æquales & utrasque multiplicando per $2x$, habebitur $(ax + bc)\sqrt{(xx - aa)} = (cx + ba)\sqrt{(xx - cc)}$, æquatio, quæ quadrando ac dividendo per $aax - ccx$, redigetur ad formam ſæpius inventam

$$x^3 = \begin{matrix} +aa \\ +bb \\ +cc \end{matrix}\, x + 2abc.$$

XXVI. Ex his conſtare poteſt quanta ſit ſolvendi copia & obiter quod alii modi ſint aliis multo concinniores. Quapropter ſi in primas de ſolutione problematis alicujus cogitationes modus computationi male accommodatus inciderit, relationes linearum iterum evolvendæ ſunt donec modum, quam poteris, idoneum & elegantem machinatus fueris. Nam, quæ leviori curæ ſe offerunt, laborem ſatis moleſtum plerumque parient ſi ad opus adhibeantur. Sic in problemate de quo agitur, nil difficilius foret in ſequentem modum, quam in aliquem e præcedentibus incidere. Demiſſis nempe BP & CS ad AD normalibus, ut & CT ad BP, figura reſolvetur in triangula rectangula. Et videre eſt quod AD & AB dant AP: AD & CD dant SD: AD — AP — SD dat PS vel TC, & BP — TP dat Tab. I. Fig. 11.

$\frac{aabbcc + 2a^3bcx + a^4xx}{(aa - cc)(aa - cc)}$, & $-\frac{abc - aax}{aa - cc}$, erit $\frac{aabbccx + 2a^3bcxx + a^4x^3 - 2a^3bcxx -}{aa - cc}$ $\frac{-2a^4x^3 + 2a^3bc^3 + 2a^4ccx}{aa - cc} + aax^3 - aaccx = 0$; & deletis delendis, ac ſublata fractione, $aabbccx - a^4x^3 + 2a^3bc^3 + 2a^4ccx + a^4x^3 - aaccx^3 - a^4ccx + aac^4x = 0$; rurſus deletis delendis, cunctis per $aacc$ diviſis, ac tranſpoſito $-x^3$, erit Auctoris æquatio.

dat BT. Denique BT ac TC dant BC, unde obtinebitur æquatio. Si quis autem hoc modo computationem aggreſſus fuerit, is in terminos algebraicos profuſiores quam ſunt ulli præcedentium incidet & ad finalem æquationem ægrius reducibiles. (q)

Et

(q) Rationes libet ſubducere ob ſingularem obſervationem, cui viam faciunt. Sit, ut prius, $AD = x$; $AB = a$; $BC = b$; $CD = c$. Erit, $DA\,(x) . AB\,(a) :: AB\,(a) . AP = \frac{aa}{x}$; & $AD\,(x) . DC\,(c) . DC\,(c) . DS = \frac{cc}{x}$ per Eucl. 8. VI. ſi enim jungerentur BD, & CA, triangula ABD, ACD eſſent rectangula.

Igitur

$$PS = DA - AP - SD = x - \frac{aa - cc}{x}$$

$$= \frac{xx - aa - cc}{x} = TC.$$

Nunc

$$BP = \sqrt{(BA^2 - AP^2)} = \sqrt{\left(aa - \frac{a^4}{xx}\right)}$$

Et

$$CS = \sqrt{(CD^2 - DS^2)} = \sqrt{\left(cc - \frac{c^4}{xx}\right)} = TP.$$

Quare

$$BT = BP - PT = \sqrt{\left(aa - \frac{a^4}{xx}\right)} - \sqrt{\left(cc - \frac{c^4}{xx}\right)}$$

Eſt autem

$$BC^2 = CT^2 + TB^2$$

Ergo

$$bb = \frac{x^4 - 2aaxx - 2ccxx + a^4 + 2aacc + c^4}{xx}$$

$$+ aa - \frac{a^4}{xx}$$

$$- 2\sqrt{\left(aacc - \frac{aac^4 - cca^4}{xx} + \frac{a^4c^4}{x^4}\right)} + cc - \frac{c^4}{xx}$$

atque, omnibus ductis in xx ac deletis delendis, & quadrando

$$4aaccx^4 \begin{array}{l} - 4aac^4 \\ - 4a^4cc \end{array} xx + 4a^4c^4 =$$

$$x^8 \begin{array}{l} - 2aa \\ - 2cc \\ - 2bb \end{array} x^6 \begin{array}{l} + 6aacc \\ + 2aabb \\ + a^4 \\ + 4 \\ + 2bbcc \\ + b^4 \end{array} x^4 \begin{array}{l} - 4a^4cc \\ - 4aac^4 \\ - 4aabbcc \end{array} x^2 + 4a^4c^4$$

ac, deletis delendis & cunctis per xx diviſis,

$$x^6 \begin{array}{l} - 2aa \\ - 2bb \\ - 2cc \end{array} x^4 \begin{array}{l} + a^4 \\ + b^4 \\ + c^4 \\ + 2aabb \\ + 2aacc \\ + 2bbcc \end{array} x^2 - 4aabbcc = 0$$

quæ æquatio diviſa per

$$x^3 \begin{array}{l} - a^2 \\ - b^2 \\ - c^2 \end{array} x + 2abc = 0, \text{dat } x^3 \begin{array}{l} - a^2 \\ - b^2 \\ - c^2 \end{array} x - 2abc = 0$$

ut ante

Sed, cur hæc analyſis dat æquationem ſex dimenſionum, & quid ſibi vult ille diviſor trium dimenſionum? Dicam

Super diametro AD quæſita poteſt ex tribus datis rectis deſcribi aliud quadrilateri genus ADCBA, in quo ſi tentetur æquatio Art. XX. hujus, omnia, quæ ibi invenimus, ſe huic quadrilatero aptare comperiemus præter perpendicularem BE, quæ in Fig. 8. Tab. 1. extra quadrilaterum cadere debet, quia angulus BCD, inſiſtens arcui ſemicirculum ſuperanti arcu AB, eſt obtuſus, & perpendicularis cadere debet intra crura anguli acuti. Sed in hac noſtra Figura, anguli BCD, BDC, inſiſtentes arcui minori quam ſemicirculus eſt, ſunt acuti, & perpendicularis BE intra quadrilaterum cadere debet. Hinc ſequitur quod recta DE, quæ apud Auctorem æquat $c + \frac{ab}{x}$, apud nos ſit $c - \frac{ab}{x}$, & rectangulum ab habere debeat apud Auctorem & apud nos contraria ſigna. Hoc rectangulum invenitur in ultimo termino, & eſt negativum apud Newtonum, ergo nobis debet eſſe poſitivum, ut in diviſore eſt. Tab. B. Fig. 1.

Idem accidit in ſolutione Art. XXI. hujus. Ibi reperit Auctor $DB^2 - BC^2 - CD^2 = 2DC . CE$, quia ſcilicet angulus DCB illi obtuſus eſt; nos autem reperiemus $DB^2 - BC^2 - CD^2 = -2DC . CE$, quia nobis angulus DCB eſt acutus.

Pariter in ſolutione Art. XXII; quia rectæ AB, CD, ſunt Auctori latera quadrilateri; inve- Tab. I. Fig. 9.

Et hæc de ſolutione problematum in rectilinea Geometria; niſi forte operæ pretium fuerit annotaſſe præterea quod, cum anguli, ſive poſitiones linearum per angulos expreſſæ, ſtatum quæſtiones ingrediuntur, angulorum vice debent adhiberi lineæ aut linearum proportiones, tales nempe quæ

venit ille $bx + ac = \sqrt{(xx - cc)}\sqrt{(xx - aa)}$:
TAB. B. Fig. 2. &, quia rectæ AB, CD ſunt nobis diagonales, habebimus, non, AD.BC + AB.CD = AC.BD, ut NEWTONUS, ſed AD.BC + AC.BD = AB.CD, aut $bx + \sqrt{(xx - cc)}\sqrt{(xx - aa)} = ac$ vel $\sqrt{(x^4 - aaxx - ccxx + aacc)} = ac - bx$, quas quantitates ſi quadres, in hac poſtrema invenies $- 2abcx$, quod rectangulum NEWTONO erat $+ 2abcx$, & hinc eadem conficientur quæ ſupra.

TAB. I. Fig. 9. Eodem pacto, ſolutio Art. XXIII. noſtro quadrilatero accommodata, habebit perpendicularem BH occurrentem ipſi AC extra qua-
TAB. B. Fig. 2. drilaterum, qui occurſus intra quadrilaterum fieri debet in hypotheſi Auctoris. Cum enim in ejus figura, ſit angulus ACB acutus, & rectæ AB, AC conveniant, debent anguli ABC, BCA eſſe minores duobus rectis, (EUCL. 32 I.) Ergo, fortius, angulus rectus HBC, & idem acutus BCA duobus rectis erunt minores, & ideo rectæ BH, CA intra quadrilaterum concurrent, (EUCL. Ax. 11.) At in noſtra figura, angulus ACB eſt obtuſus, qui cum recto, (quem faceres ducendo ad CB perpendicularem ad punctum B) ſuperaret duos rectos. Quapropter rectæ concurrent extra quadrilaterum. Idcirco erit AH — HC = AC $= \frac{ac - bx}{\sqrt{(xx - aa)}}$ recta quæ NEWTONO erat AH + HC = AC $= \frac{ac + bx}{\sqrt{(xx - aa)}}$; unde conſtat quod, ſi æquationem formes & partes quadres, invenies $- 2abcx$ rectangulum, quod Auctor invenit $+ 2abcx$. Sunt autem, nobis etiam, ſimilia Triangula CBH, DBA; Nam quia angulus HCD eſt rectus, & anguli HCB, BHC æquant rectum, dempto communi HCB, erit BCD (vel æqualis BAD) æqualis CHB, & præterea anguli CBH, ABD ſunt recti, ergo &c. Similia quoque ſunt Triangula ABH, BCD; nam, præter angulos HAB, CDB æquales, æquales habent etiam angulos ABH, CBD, quorum quiſque conſtat ex recto & ex communi CBA.

TAB. B. Fig. 3. Sed in ſolutione Art. XXIV; rectæ BC, AD poſſunt convenire ad partes punctorum B, D. Tunc BC = CF — FB $= \frac{cy}{a} - \frac{ay + ax}{c} = b$ unde fit $\frac{a^3x - abc}{a^4 - c^2} = y$; cujus valor erat in hypotheſi *Newtoniana* $\frac{aax + abc}{aa - cc}$; unde ſignum ipſius abc debet eſſe nobis contrarium ſigno, quod habet in æquatione Auctoris.

Si vero rectæ BC, AD conveniant ad partes punctorum A, C; valor ipſius y idem nobis erit ac NEWTONO, ſed rectangulum FAG nobis erit negativum, quia angulus FAB eſt obtuſus, & ideo (EUCL. 12. II.) TAB. B. Fig. 4.
$BF^2 = FA^2 + AB^2 + 2FAG$; aut $BF^2 - 2FAG = FA^2 + AB^2$; ſed $2FAG = \frac{2a^2y}{x} = \frac{2aa}{x}\frac{(abc + aax)}{aa - cc}$, & rurſus ſignum ipſius abc in una hypotheſi contrarium erit ſigno ejuſdem quatitatis in altera.

Demum ſolutio Art. XXV. paulo difficilius, ut videtur, poteſt aptari noſtræ hypotheſi, idcirco libet eam diligentius proſequi.

Et primo quidem, cum in figura Auctoris, anguli BCD, CBA ſint obtuſi, perpendiculares a verticibus B, C actæ in oppoſita latera DC, AB, debent cadere extra quadrilaterum. Sed in figura noſtra, quia iidem anguli BCD, CBA ſunt acuti, ut & oppoſiti BDC, BAC, perpendiculares actæ a verticibus B & C in oppoſita latera CD, BA debent cadere intra quadrilaterum. TAB. I. Fig. 10. TAB. B. Fig. 5.

Præterea, in Auctoris figura, triangula ABD, DCB ſimul ſumpta quadrilaterum conficiunt, ut & triangula ACD, CBA. In noſtra vero eadem triangula ABD, DCB ſimul ſumpta quadrilaterum AIBCIDA ſuperant bis triangulo BID; & triangula CAD, CBA ſimul ſumpta quadrilaterum ſuperant bis triangulo CIA, & ideo illorum ſumma non æquat ſummam horum. Si autem ex triangulo ABD aufers triangulum CBD, ſupererit differentia triangulorum AID, CIB; & ſi ex triangulo ACD aufers triangulum CBA, ſupererit differentia corundem triangulorum AID, CIB, quæ differentiæ ſunt æquales. Igitur poni debet

$$(ax - bc)\sqrt{(xx - aa)} = (cx - ab)\sqrt{(xx - cc)}$$

unde, (quadrando, delendo contraria, & dividendo per x,) fiet.

$$-\frac{a^2}{c^2}x^3 \begin{matrix} -a^4 \\ +c^4 \\ -a^2b^2 \\ +b^2c^2 \end{matrix}\, x \begin{matrix} +2a^3bc \\ -2abc^3 \end{matrix} = 0$$

quæ

quæ ab angulis datis poſſunt per calculum trigonometricum derivari, aut a quibus inventis anguli quæſiti per eundem calculum prodeunt; hoc eſt quæ ſe mutuo determinant: cujus rei plures inſtantias videre eſt in ſequentibus.

XXVII. Quod ad Geometriam circa lineas curvas attinet, illæ deſignari ſolent vel deſcribendo eas per motum localem rectarum, vel adhibendo æquationes indefinite exprimentes relationem rectarum certa aliqua lege diſpoſitarum & ad curvas deſinentium. Idem fecerunt Veteres per ſectiones ſolidorum, ſed minus commode. Computationes vero, quæ curvas primo modo deſcriptas reſpiciunt, haud ſecus quam in præcedentibus peraguntur. Quemadmodum ſi AKC ſit curva linea deſcripta per K verticale punctum normæ AKΦ, cujus unum crus AK per punctum A poſitione datum libere dilabitur, dum alterum KΦ datæ longitudinis ſuper rectam AD poſitione datam promovetur, & quæratur punctum C in quo recta quævis CD poſitione data hanc curvam ſecabit, duco rectas ACF, quæ normam in poſitione quæſita referant, & relatione linearum (ſine aliquo dati & quæſiti diſcrimine aut reſpectu ad curvam) conſiderata, percipio dependentiam ceterarum a CF & quamlibet harum quatuor BC, BF, AF & AC ſyntheticam eſſe, quarum duas itaque, ut $CF = a$ & $CB = x$, aſſumo, & inde computum ordiendo ſtatim lucratus ſum $BF = \sqrt{(aa - xx)}$ & $AB = \frac{xx}{\sqrt{(aa - xx)}}$ propter angulum rectum CBF, lineasque BF. BC : : BC. AB continue proportionales. Porro, ex data poſitione CD, datur AD, quam itaque dico b; datur etiam ratio BC ad BD, quam pono d ad e, & fit $BD = \frac{ex}{d}$, & $AB = b - \frac{ex}{d}$. Eſt ergo $b - \frac{ex}{d} = \frac{xx}{\sqrt{(aa - xx)}}$, æquatio quæ (quadrando partes & multiplicando per $aa - xx$ &c.) reducetur ad hanc formam.

$x^4 =$

quæ diviſa per $a^2 - c^2$ dat

$$x^3 \begin{array}{l} - a^2 \\ - c^2 \\ - b^2 \end{array} x + 2abc = 0.$$

In qua rurſus ſignum facti $2abc$ nobis contrarium illo eſt, quod NEWTONUS invenit. Conſtat igitur, quod harum ſolutionum nulla poteſt noſtræ hypotheſi aptari, quin mutationem ſubeat, ex qua ſignum ipſius $2abc$ ex negativo fit poſitivum.

TAB. B. Fig. 6. Sed ultima hæc ſolutio Art. XXVI. utrique hypotheſi aptatur hac unica mutatione quod SP æquat non, ut in Auctore, AD — AP — SD, ſed AP + SD — AD. Nam AP + DS = AS + 2SP + PD, & AD = AS + SP + PD, ergo, auferendo hanc ex illa, AP + DS — AD = SP = $\frac{a^2 + c^2 - x^2}{x}$, quæ ſi quadretur dabit quadratum ſuperius, nam quantitatum oppoſitarum eadem ſunt quadrata.

Cum igitur reliqua reſtent, & hæc mutatio quadratum a quantitate mutata oriundum idem relinquat, patet eandem prorſus futuram æquationem hinc exſurgentem, quæ ideo ambas hypotheſes debet complecti.

15. Ceterum, hæc ultima æquatio, cum ad unam hypotheſim non ſit coarctata, perfectior eſt cenſenda: & quando docetur æquationum idem problema ſolventium perfectiſſimam eſſe ſimpliciſſimam, intelligendum eſt hoc præceptum de iis, quæ omnes hypotheſes, ſeu, ut vocant, *caſus* problematis complectuntur.

Digitized by Google

$$x^4 = \frac{2bdex^3 \begin{matrix}-bbdd\\+aaee\end{matrix} xx - 2aabdex + aabbdd}{dd+ee}$$

unde demum e datis a, b, d & e erui debet x per regulas poſt tradendas, & intervallo iſto x ſive BC acta ipſi AD parallela recta ſecabit CD in quæſito puncto C.

XXVIII. Quod ſi, non deſcriptiones geometricæ, ſed æquationes pro curvis lineis deſignandis adhibeantur, computationes eo pacto faciliores & breviores evadent, in quantum ejusmodi æquationes ipſis lucro cedunt. Quemadmodum, ſi datæ ellipſeos ACE interſectio C cum recta CD poſitione data quæratur; pro ellipſi deſignanda ſumo notam aliquam æquationem ei propriam, ut $rx - \frac{r}{q}xx = yy$, ubi x indefinite ponitur pro qualibet axis parte Ab vel AB & y pro perpendiculo bc vel BC ad curvam terminato; r vero & q dantur ex data ſpecie ellipſis. Cum itaque CD poſitione detur, dabitur & AD, quam dic a; & erit BD $a - x$: dabitur etiam angulus ADC, & inde ratio BD ad BC, quam dic 1 ad e, & erit BC $(y) = ea - ex$, cujus quadratum TAB. I. Fig. 13.

$$eeaa - 2eeax + eexx \text{ æquabitur } rx - \frac{r}{q}xx.$$

indeque per reductionem orietur,

$$xx = \frac{2aeex + rx - aaee}{ee + \frac{r}{q}}, \text{ ſeu } x = \frac{aee + \frac{1}{2}r \pm e\sqrt{(ar + \frac{rr}{4ee} - \frac{aar}{q})}}{ee + \frac{r}{q}}$$

Quin etiam, etſi curva per deſcriptionem geometricam vel per ſectionem ſolidi deſignetur, poteſt tamen inde æquatio obtineri quæ naturam curvæ definiet, adeoque huc omnes problematum, quæ circa eam proponuntur, difficultates reduci.

Sic in exemplo priori ſi AB dicatur x & BC y, tertia proportionalis BF erit $\frac{yy}{x}$, cujus quadratum una cum quadrato BC æquatur CFq, hoc eſt $\frac{y^4}{xx} + yy = aa$; ſive $y^4 + xxyy = aaxx$. Eſtque hæc æquatio qua curvæ AKC unumquodque punctum C unicuique baſis longitudini AB congruens (adeoque ipſa curva) definitur, & e qua proinde ſolutiones problematum, quæ de hac curva proponuntur, petere liceat.

Ad eundem fere modum cum curva non datur ſpecie ſed determinanda pro-

propoſitur, poſſis pro arbitio æquationem fingere quæ naturam ejus generaliter contineat; & hanc pro ea deſignanda, tanquam ſi daretur, aſſumere ut ex ejus aſſumptione quomodocunque perveniatur ad æquationes ex quibus aſſumpta tandem determinentur: cujus rei exempla habes in nonnullis ſequentium problematum, quæ in pleniorem illuſtrationem hujus doctrinæ & exercitium diſcentium congeſſi, quæque jam pergo tradere. (*r*)

CAPUT

(*r*) Hactenus quidem de problematis ad æquationem revocandis. Nunc pauca dicenda ſunt de æquationum conſtructionibus.

16. Probe obſervandum eſt dari aliqua problemata, in quibus de lineis & figuris quidem agitur; ſed algebraica unius expreſſio reſpectu alterius quæritur; & aliqua in quibus ratio aliquid geometrice efficiendi inveſtigatur.

17. Prioribus omnino ſatisfactum eſt inventa expreſſione quæ poſcebatur.

18. In aliis autem etiam requiritur effectio geometrica, ſeu conſtructio.

19. Per problematis conſtructionem intelligitur inventio puncti, aut lineæ quæſitæ, problemati reſpondentis, aut illud ſolventis.

20. Quod ſic fit in problematis unius aut duarum dimenſionum. Invento quæſitæ valore, inveniendæ ſunt rectæ, quæ reſpondent datis quantitatibus ſimplicibus, quarum aggregatum, aut differentia æquivalent quæſitæ. Hæ rectæ, per additionem aut ſubtractionem, quæque per proprium ſignum, omnes jungendæ ſunt, & ſic problema eſt conſtructum.

21. Omnis fractio ($\frac{ac}{b}$) indicat inventionem quartæ proportionalis poſt tres datas, quarum prima eſt denominator, ſecunda unus ex factoribus numeratoris, tertia vero alter, quod fit per EUCL. 11. VI.

22. Cum vero numerator habet plus quam duas dimenſiones, & denominator plus quam unam, hæc operatio repetenda eſt; ſic recta $\frac{abcef}{ghlm}$ invenitur per has analogias $g.\ a::b,\ n = \frac{ab}{g}$ (EUCL. 15. VI.), quare $\frac{abcef}{ghlm}$ fit $\frac{cefn}{hlm}$, & deinde $h.\ e::c.\ p = \frac{ce}{h}$ unde habetur $\frac{cefn}{hlm} = \frac{fnp}{lm}$, & rurſus $l.\ f::n.\ q = \frac{fn}{l}$, ac $\frac{fnp}{lm} = \frac{pq}{m}$, & denique $m.\ p::q.\ r = \frac{pq}{m}$ = datæ fractioni $\frac{abcef}{ghlm}$.

23. Omnis radix quadrata indicat lineam quæſitam eſſe mediam proportionalem inter duos factores quantitatis ſub ſigno poſitæ, & hæc media reperitur per EUCL. 12. VI. Sic $\surd 3aa$ invenitur quærendo mediam inter $3a$, & a, ac $\surd\frac{3bc}{4}$ eſt media inter $\frac{3b}{2}$ & $\frac{c}{2}$ aut $3b$, & $\frac{c}{4}$, aut $\frac{3b}{4}$, & c, aut b, & $\frac{3c}{4}$ &c.

24. Si vero quantitas ſub ſigno ſit complexa, hæc in lineis exhiberi poteſt per ſimilem mediæ inventionem, quando quantitas ſub ſigno tota per eandem dividitur, aut ſemper per hypothenuſam, aut latus trianguli rectanguli. Per hypothenuſam inquam, ubi quantitas complexa eſt aggregatum ex ſimplicibus, ubi vero eſt differentia, per latus. Hoc pacto $\surd(al + ac)$ exhiberi poteſt, aut quærendo mediam inter a, & $b + c$, nam hujus mediæ quadratum æquabit rectangulum ex illis (EUCL. 16. VI.), aut inveniendo mediam inter $a;b$ & $a;c$, & his lineis efficiendo angulum rectum, nam hujus trianguli hypothenuſa erit radix quæſita, ut facile deducitur ex EUCL. 47. I.

Haud aliter $\surd(aa - bb)$ invenitur quærendo mediam inter $a + b$, & $a - b$, aut latus trianguli rectanguli, cujus hypothenuſa a ſit radix quadrati poſitivi aa, & latus unum ſit b radix quadrati negativi $-bb$, quod efficitur deſcripto ſemi-circulo ACB ſuper diametrum AB $= a$, & ei inſcripta recta BC $= b$ (EUCL. 1. IV.) ab altera diametri extremitate B, & juncta AC, quæ eſt radix quæſita, (EUCL. 47. I.) & ſic de ceteris. TAB. B. Fig. 7.

25. His recte intellectis. Quantitates ex his compoſitæ facile reperientur: ſic $\frac{a}{b}\surd(ff - gg)$ obtinebitur inventa recta $= \surd(ff - gg)$ (No. 24. hujus) quam dico n, & poſtea recta $= \frac{an}{b}$.

Et hæ quidem ſunt regulæ generales; at non

raro

CAPUT SECUNDUM.

PROB. I.

Data recta terminata BC, a cujus extremitatibus duæ rectæ BA, CA, ducuntur in datis angulis ABC, ACB: invenire AD altitudinem concurſus A ſupra datam BC. (*a*):

XXVIII. Sit BC $= a$, & AD $= y$; & cum angulus ABD detur, dabitur (ex tabula ſinuum & tangentium) ratio inter lineas AD & BD quam pone ut d ad e. Eſt ergo $d . e ::$ AD (y) BD. Quare BD $= \frac{ey}{d}$. Similiter propter datum angulum ACD dabitur ratio inter AD ac DC quam pone ut d ad f & erit DC $= \frac{fy}{d}$. At BD $+$ DC $=$ BC, hoc eſt $\frac{ey}{d} + \frac{fy}{d} = a$. Quæ reducta multiplicando utramque partem æquationis per d, ac dividendo per $e + f$ evadit $y = \frac{ad}{e+f}$. Tab. I. Fig. 14.

PROB.

raro peculiaris quædam ratio miniſtrat ſimpliciores rectarum inventiones & problematum conſtructiones, cui rei experientia magis & ingenium, quam regulæ, conducunt.

Nam *vires omnes in id intendendæ ſunt, ut propoſitum, quam ſimplicius fieri poſſit, obtineatur.*

Sic, ubi expreſſio algebraica ſolum quæritur, quo ſimplicior illa eſt, eo melior: ubi vero ad conſtructionem progrediendum eſt, æquatio pluris facienda non eſt illa, quæ ſimplicioribus & paucioribus terminis conſtat, ſed illa, quæ faciliorem conſtructionem habet; atque hæc longe eſt illi præferenda, ubi ſimul & æquationis ſimplicitatem & conſtructionis facilitatem nanciſci non poſſumus.

(*a*) In hoc problemate quæritur ratio exprimendi quæſitam per literas aut per numeros, nam punctum concurſus geometrice datur. Summa enim angulorum trianguli datur; & dantur anguli ABC, ACB ſeorſim; ergo & eorum ſumma (3. *dat.*) quare & angulus BAC [4. *dat.*); igitur ſinguli anguli dantur in triangulo ABC, & ideo triangulum ſpecie datur (40. *dat.*); ſed recta BC datur magnitudine, triangulum ABC datur etiam magnitudine (52. *dat.*); quapropter & ejus latera AB, AC magnitudine dantur, atque ideo punctum A (25. *dat.*). &c.

Hoc problema ſic poteſt trigonometrice enunciari.

Dato latere trianguli, & angulis ſupra illud conſtitutis, quæritur diſtantia puncti A a recta BC.

Si centro A, radio AD deſcribatur circulus; erit BC tangens; quare BD tangens anguli BAD, qui datur, quia eſt dati complementum ad rectum. Item DC eſt tangens anguli dati: & BC ſumma tangentium eorum angulorum ad radium DA; & tabulæ, datis angulis, dant tangentes; ergo, ſi ambo anguli dati ſunt acuti, *ut ſumma cotangentium angulorum datorum, ad radium, ita data recta ad diſtantiam quæſitam.*

Si vero alter eſt obtuſus; *ut exceſſus, quo cotangens minoris ex his angulis ſuperat cotangentem majoris, ad radium, ita data recta ad diſtantiam quæſitam.*

Digitized by Google

PROB. I I.

Cujuslibet trianguli ABC datis lateribus AB, AC, & baſi BC, quam perpendiculum AD ab angulo verticali ſecat in D: invenire ſegmenta BD ac DC. (*a*)

TAB. I. Fig. 15. XXIX. Sit $AB = a$, $AC = b$, $BC = c$, & $BD = x$, eritque $DC = c - x$. Jam cum $ABq - BDq\,(aa - xx) = ADq$;

&

$$ACq - DCq\,(bb - cc + 2cx - xx) = ADq:$$

Erit $aa - xx = bb - cc + 2cx - xx$; quæ per reductionem fit $\frac{aa - bb + cc}{2c} = x$.

Ceterum ut pateat omnes omnium problematum difficultates per ſolam linearum proportionalitatem ſine adminiculo Prop. 47. primi Elementorum, licet non abſque circuitu, enodari poſſe; placuit ſequentem hujus ſolutionem ex abundanti ſubjungere. A puncto D in latus AB demitte DE normalem, & ſtantibus jam poſitis linearum nominibus, erit $AB . BD :: BD . BE.\ a.\ x :: x. \frac{xx}{a}$. Et $BA - BE\,(a - \frac{xx}{a}) = EA$. Nec non $EA . AD :: AD . AB$ adeoque $EA . AB\,(aa - xx) = ADq$. Et ſic ratiocinando circa triangulum ACD invenietur iterum $ADq = bb - cc + 2cx$. (*b*) Unde obtinebitur ut ante $x = \frac{aa - bb + cc.}{2.}$

PROB.

(*a*) Hic rurſus potius expreſſio algebraica; quam res ipſa quæri videtur.

Nam ſegmenta BD, & DC dantur: ſiquidem ob data tria latera, datur ſpecie triangulum ABC (39. *datorum*); dantur igitur anguli ad B, & C (*dat. def.*); item anguli ad D, utpote recti dantur; ergo & anguli DAB in triangulo BAD, & DAC in triangulo CAD; dantur itaque ſpecie hæc triangula (40. *dat.*). Datur etiam illius latus BA; hujus latus AC, ideo quoque magnitudine illa eadem triangula (52. *dat.*). Dantur ergo latera BD, DC (*dat.* 55.).

(*b*) Ducta ſiquidem normali DF, erit (EUCL. 8. VI.) AC (b). CD ($c - x$) :: CD ($c - x$). TAB. B. Fig. 8.
$CF = \frac{cc - 2cx + xx}{b}$: Itaque $AC - CF = b - \frac{cc + 2cx - xx}{b} = AF$. Eſt autem $AP . AD :: AD . AC$; unde colligitur, ductis invicem mediis & extremis, $AD^2 = AF.AC = bb - cc + 2cx - xx = aa - xx$. & deletis æqualibus, ac tranſponendo, $2cx = aa - bb + cc$.

Ceterum hoc problema ſolutum pro quovis Triangulo rectilineo vide infra Prob. XII.

PROB. III

Trianguli rectanguli ABC perimetro & area datis invenire hypothenuſam BC.

XXX. Eſto perimeter a; area bb, BC $= x$, & AC $= y$; Eritque AB $\sqrt{(xx - yy)}$; unde rurſus perimeter (BC + AC + AB) eſt $x + y + \sqrt{(xx - yy)}$, & area ($\frac{1}{2}$ AC . AB) eſt $\frac{1}{2} y \sqrt{(xx - yy)}$. Adeoque $x + y + \sqrt{(xx - yy)} = a$, & $\frac{1}{2} y \sqrt{(xx - yy)} = bb$. TAB. II. Fig. 1.

Harum æquationum poſterior dat $\sqrt{(xx - yy)} = \frac{2bb}{y}$ quare ſcribo $\frac{2bb}{y}$ pro $\sqrt{(xx - yy)}$ in æquatione priori, ut aſymmetria tollatur; & prodit $x + y + \frac{2bb}{y} = a$, ſive multiplicando per y & ordinando, $yy = ay - xy - 2bb$. Porro ex partibus æquationis prioris aufero $x + y$ & reſtat $\sqrt{(xx - yy)} = a - x - y$, cujus partes quadrando, ut aſymmetria rurſus tollatur, prodit

$$xx - yy = aa - 2ax - 2ay + xx + 2xy + yy,$$

quæ in ordinem redacta & per 2 diviſa fit $yy = ay - xy + ax - \frac{1}{2} aa$. Denique ponendo æqualitatem inter duos valores ipſius yy, habeo

$$ay - xy - 2bb = ay - xy + ax - \frac{1}{2} aa,$$

quæ reducta fit $\frac{1}{2} a - \frac{2bb}{a} = x$.

Idem aliter.

Eſto $\frac{1}{2}$ perimeter $= a$, area $= bb$, & BC $= x$ eritque AC + AB $= 2a - x$, Jam cum ſit xx (BCq) $=$ ACq + ABq, & $4bb = 2$AC . AB $=$ erit $xx + 4bb =$ ACq + ABq + 2AC . AB $=$ quadrato ex AC + AB $=$ quadrato ex $2a - x = 4aa - 4ax + xx$. (c) Hoc eſt $xx + 4bb = 4aa$

(c) Sit BC $= x$, AC $= y$, AB $= z$. Erit $x + y + z = 2a$ perimetro; & $z + y =$ AC + AB $= 2a - x$. Eſt, $xx = yy + zz$ (Eucl. 47. I.), & $\frac{zy}{2} = bb$ areæ, aut $zy = 2bb$, vel $2zy = 4bb$ ſed $z + y = 2a - x$, & quadrando $zz + 2zy + yy = 4aa - 4ax + xx$; ponendo nunc pro $2zy$, & $zz + yy$, reſpectivos valores $4bb$, & xx, emergit $4bb + xx = 4aa - 4ax + xx$; & demum $x = a - \frac{bb}{a}$.

$= 4aa - 4ax + xx$; quæ reducta fit $a - \frac{bb}{a} = x$. (*e*)

PROB.

(*e*) Cetera inveſtigaturus pono $\frac{aa - bb}{a} = 2f$; obſervo, quod ex hypotheſi, eſt $2a = z + y + 2f$, atque ideo $2a - 2f = z + y$; hanc quantitatem facio $= 2c$. Nunc fingo $z - y = 2u$; erit itaque $z = c + u$, & $y = c - u$. Verum quia $zy = 2bb = cc - uu$, eſt $uu = cc - 2bb$, unde $u = \sqrt{(cc - 2bb)}$; hinc $z = c + \sqrt{(cc - 2bb)}$, adeoque $y = c - \sqrt{(cc - 2bb)}$.

CONSTRUCTIO.

TAB. B. Fig. 9. & 10. Sit DF data perimeter. Hanc biſeca in F, erit $DF = FE = a$. Sit quadratum LMNO areæ datæ æquale; & quia baſis $x = a - \frac{bb}{a}$, aut $a - x = \frac{bb}{a}$; ipſum $\frac{bb}{a}$, quod ſi ex a dematur, dabit baſim, determino, elevando ex F normalem $FK = LM = b$, jungendo DK, & ex K ducendo KG ipſi KD normalem. Erit enim (EUCL. 8. VI.) DF (a). FK (b) :: FK (b). $FG = \frac{bb}{a}$: hinc patet GE eſſe baſem quæſitam.

Veniamus ad latera. Baſim jam inventam diximus $= 2f$, & $2c = 2a - 2f$; erit ideo $DG = 2c$, hanc biſeca in I, & duc quadrati diagonalem $LN = \sqrt{2bb}$ (EUCL. 47. I.). Si hæc minor non eſt quam IG patet problema eſſe impoſſibile; nam $\sqrt{(cc - 2bb)}$ eſt latus trianguli rectanguli, cujus hypothenuſa $= c$; latus alterum $= \sqrt{2bb} =$ LN; hypothenuſa vero eſt maximum trianguli rectanguli latus (EUCL. 19. I.). Sit igitur LN minor quam IG, & ſuper IG diametrum deſcribatur ſemicirculus IYG, & ex puncto G ei inſcribatur chorda GY ipſi LN par, & junctæ IY æqualis in DG abſcindatur IQ. Erit DQ majus latus; QG vero, minus.

Nam, ex his tribus lineis fac triangulum BCA, ita ut GE (*Fig.* 10.) = BC (*Fig.* 9.) $= a - \frac{bb}{a}$, DQ (*Fig.* 10.) = AC (*Fig.* 9.) $= c + \sqrt{(cc - 2bb)}$, & QG (*Fig.* 10.) = AB (*Fig.* 9.) $= c - \sqrt{(cc - 2bb)}$. Quapropter perimeter æquat $a - \frac{bb}{a} + 2c = $ (ob $2c = 2a - 2f$ & $2f = a - \frac{bb}{a}$) $a - \frac{bb}{a} + a + \frac{bb}{a} = 2a$ rectæ datæ. Dico nunc hoc triangulum eſſe rectangulum, & ejus aream æqualem bb.

Eſt enim $AC^2 = 2cc + 2c\sqrt{(cc - 2bb)} - 2bb$, & $AB^2 = 2cc - 2c\sqrt{(cc - 2bb)} - 2bb$, quare $AC^2 + AB^2 = 4cc - 4bb = $ (quia $2c = a + \frac{bb}{a}$) $aa + 2bb + \frac{b^4}{aa} - 4bb = aa - 2bb + \frac{b^4}{aa} = BC^2$. Eſt igitur triangulum ABC rectangulum in A, & eſt BC ejus hypothenuſa (EUCL. 48. I.). *Quod erat unum.*

Jam quia angulus ad A eſt rectus, erit dupla area trianguli æqualis rectangulo ex AB in AC. (EUCL. 41. I.) $= (c - \sqrt{(cc - 2bb)})(c + \sqrt{(cc - 2bb)}) = cc - cc + 2bb = 2bb$, & ejus area $= bb$. *Quod erat alterum.*

Data baſi facile perpendiculum determinatur. Eſt enim rectangulum ſub baſi & perpendiculo æquale quadrato ex LN; aut data baſis ad datam LN, ut eadem ad perpendiculum quod, per EUCL. 11. VI. invenietur.

Datis autem baſi & perpendiculo, deſcribetur triangulum, ut videbis infra N°. 14. hujus.

Sed poſterior ſolutio brevius exponi poteſt *analyſi geometrica.*

TAB. C. Fig. 1. Sit AB data perimeter, & quadratum CDEF data area. Puta factum, & triangulum AGH ſit illud quod petitur. Jam datur, per hyp., rectangulum ſub AG; GH, æquale bis dato quadrato CDEF (41. I. EUCL.). Sed quadratum ex AH æquale eſt quadrato ex HG & quadrato ex GA ſimul (47. I. EUCL.); ergo addendo utrinque bis rectangulum ſub AG; GH, quadratum ex AH una cum bis rectangulo ſub AG; GH, æquat quadratum ex HG, una cum quadrato ex GA, & bis rectangulo ſub AG; GH, id eſt quadratum ex HB (4. II. EUCL.), quia ponitur HB æqualis HG & GA ſimul. Quare bis datum rectangulum ſub AG; GH æquat exceſſum quadrati ex HB ſupra quadratum ex HA; ideſt (ponendo HI æqualem HA) rectangulum ſub AB & BI, (6. II. EUCL.) quod ideo datur (EUCL. def. 1. Dat.). Datur autem AB per hypoth; ergo & BI (EUCL. 47. Dat.). Et datur punctum B; quare & punctum I (EUCL. 27. Dat.). Ergo datur AI (EUCL. 4. Dat.): igitur & AH. (EUCL. 7. Dat.) at-

Digitized by Google

PROB. IV.

Dato trianguli rectanguli perimetro & perpendiculo, invenire triangulum. (*f*)

XXXI. Trianguli ABC ſit C rectus angulus & CD perpendiculum inde ad baſem AB demiſſum. Detur $AB + BC + AC = a$, & $CD = b$. Pone baſem $AB = x$, & erit laterum ſumma $a - x$. Pone laterum differentiam y, & erit majus latus $AC = \frac{a - x + y}{2}$, minus $BC = \frac{a - x - y}{2}$. (*g*) Tab. II. Fig. 10.

Jam ex natura trianguli (*h*) rectanguli eſt $ACq + BCq = ABq$, hoc eſt $\frac{aa - 2ax + xx + yy}{2} = xx$. Eſt & AB. AC : : BC. DC, adeoque AB. DC,

atque HB. Datur autem rectangulum ſub AG; GH (per hyp.), & utraque ſimul AG; GH, vel HB: quare datur tum AG, tum GH (Eucl. 85. Dat.).

Componetur autem ſic. Recta CD producatur in K donec ſit DK æqualis DC, & quadrato ex CK æquale rectangulum applicetur ipſi AB (ex 43. I. Eucl.), & ſit BI altitudo applicationis. Biſecetur AI in H (per 10. I. Eucl.). Producta FE donec ipſi KL occurrat in N, ſpatio CKNF rectangulum æquale & deficiens quadrato applicetur ad datam HB; (per 28. VI. Eucl.), & ſit BO altitudo applicationis; erit AH hypothenuſa, HO latus unum, & OB alterum petiti trianguli; e quibus deſcribatur triangulum AHG per Eucl. 22. I.

Jam illius perimeter æquat datam rectam; & cum rectangulum ſub AB, BI æquet quadratum CKLM per conſtr. & exceſſum quadrati ex HB ſupra quadratum ex AH, vel HI (6. II. Eucl.), erit quadratum CKLM, id eſt bis rectangulum ſub HO; OB (per conſtr.) una cum quadrato ex AH æquale quadrato ex HB, id eſt quadratis ex HO; OB; & bis rectangulo ſub HO; OB, (4. II. Eucl.), manebit ergo quadratum ex AH æquale quadratis ex HO; & ex OB; id eſt ex HG, & ex GA; quare triangulum AGH eſt rectangulum in G (48. I. Eucl.); & quia rectangulum ſub AG & GH eſt duplum quadrati CDEF (per conſtr.) & areæ trianguli AGH (41. I. Eucl.); area trianguli æquat datum quadratum.

Determinatio deducitur ex 27. VI. Eucl.

Hoc autem problema generalius & facilius ſolutum vide infra Probl. VIII.

(*f*) Hoc problema ſic generale reddi poteſt. *Datis Trianguli cujuſvis perimetro, angulo uno ACB, & perpendiculo CD demiſſo ab angulo dato, inveſtigare triangulum.*

(*g*) Poſitis quæ hactenus ſcripſit Newtonus, ab altero ignotorum angulorum A demitte in oppoſitum latus CB perpendicularem AE. Ad extremum datæ perimetri FG punctum F conſtitue angulum GFH parem dato ACB, & ex altero puncto G demitte in indefinitam FH ad rectos angulos rectam GI. Tab. C. Fig. 2.

Triangulum GFI datum erit ſpecie & magnitudine, ut jam oſtendimus.

Sit $FI = g$, & $IG = f$.

Quoniam Triangulum ACE ſimile eſt ipſi GFI; erit GF (a). FI (g) : : AC $\left(\frac{a - x + y}{2}\right)$. $CE = \frac{ag - gx + gy}{2a}$.

(*h*) Jam ex natura Trianguli oxygonii eſt $BA^2 = AC^2 + CB^2 - 2BC \cdot CE$; hoc eſt

$$xx = \frac{aa - 2ax + 2ay + xx - 2xy + yy}{4}$$
$$+ \frac{aa - 2ax - 2ay + xx + 2xy + yy}{4} -$$
$$\frac{aag + agx - agy + agx - gxx + gxy}{2a}$$
$$\frac{+ agy - gxy + gyy}{2a}$$

nempe, demtis fractionibus,

$$4axx = 2a^3 - 4aax + 2axx + 2ayy - 2aag + 4agx - 2gxx + 2gyy;$$

ſeu, æquatione ordinata.

$$\frac{\begin{matrix}+a\\+g\end{matrix}\, xx \begin{matrix}+2aa\\-2ag\end{matrix}\, x \begin{matrix}+aag\\-a^3\end{matrix}}{a+g} = yy.$$

(*i*)

DC, (i) hoc eſt $bx = \frac{aa - 2ax + xx - yy}{4}$. Per priorem æquationem eſt $yy = xx + 2ax - aa$. Per poſteriorem $yy = xx - 2ax + aa - 4bx$. Adeoque (k) $xx + 2ax - aa = xx - 2ax + aa - 4bx$. Et per reductionem $4ax + 4bx = 2aa$; ſive $x = \frac{aa}{2a + 2b}$.

Geome-

(i) Triangula CDB, AEB, habentia angulum B communem, ſimilia ſunt. Igitur BC $(\frac{a - x - y}{2})$. CD (b) :: BA (x). AE $= \frac{2bx}{a - x - y}$. Sed, quia FG (a). GI (f) :: CA $(\frac{a - x + y}{2})$. AE; eſt AE $= \frac{af - fx + fy}{2a}$; igitur $\frac{af - fx + fy}{2a} = \frac{2bx}{a - x - y}$; quapropter, ſublatis fractionibus,

$$aaf - afx + afy - afx + fxx - fxy - afy + fxy - fyy = 4abx;$$

&

$$\frac{xx - 4abx - 2afx + aaf}{f} = yy.$$

(k) Adeoque $\frac{axx + gxx + 2aax - 2agx + aag - a^3}{a + g} = \frac{fxx - 2afx - 4abx + aaf}{f}$; & , ſublatis fractionibus $afxx + gfxx + 2aafx - 2afgx + aafg - a^3f = afxx + gfxx - 2aafx - 2afgx - 4aabx - 4abgx + a^3f + aagf$; ſeu, deletis delendis & ordinata æquatione, $4aafx + 4aabx + 4abgx = 2a^3f$ & $x = \frac{aaf}{2af + 2ab + 2bg}$.

Si vero angulus ABC fieret obtuſus, g evaderet quantitas negativa, & foret

$$x = \frac{aaf}{2af + 2ab - 2bg}.$$

Si denique angulus C eſſet rectus, fieret $g = 0$, & $f = a$; unde $x = \frac{aa}{2a + 2b}$.

Constructio Geometrica.

Ex GF abſcinde FK $= b$; & ex K duc KL ipſi GI parallelam. Cum ſit GF (a). FI (g) :: KF (b). FL, erit FL $= \frac{bg}{a}$. Produc GI in M, ita ut IM æquet FK; & erit GM $= f + b$.

Nunc, quando angulus datus eſt acutus, iterum produc GM in N, ita ut MN æquet FL. Habebis GN $= f + b + \frac{bg}{a}$. Biſecta GF in O junge NO cui per I duc parallelam IP; erit GP baſis quæſita. Eſt enim NG $(f + b + \frac{bg}{a})$. GO $(\frac{a}{2})$ :: IG (f). GP $= \frac{aaf}{2af + 2ab + 2bg} = x$.

Sed quando datus angulus eſt obtuſus, ex GM deme MN, & cetera fac ut ſupra.

Demum, quando rectus eſt angulus datus, quære quartam poſt $a + b$; $\frac{a}{2}$; a.

Inventa baſi facile deſcribitur triangulum, cujus perpendiculum datur cum angulo baſi oppoſito.

Super baſi AB deſcribe per Eucl. 33. III. arcum dati anguli capacem ABCD; ad alteram baſeos extremitatem A educ ad rectos angulos dato trianguli perpendiculo parem AE, & per E age baſi parallelam ED circulo occurrentem in punctis D & d, & junge AD, CB: dico factum. Tab. C. Fig. 3.

Triangulum hoc habet angulum petitum & perpendiculum datum, ex conſtructione; illud vero habere etiam datam perimetrum facile probabis retro legens veſtigia analyſeos.

Determinatio.

Quoniam vero oportet ut parallela ED circulo occurrat: occurrere autem poteſt vel in duobus punctis, vel in uno, vel nuſquam; atque quando in uno occurrit, tangens eſt; ſit ea tangens in C. Æquales erunt anguli alterni GCA, CAB; ſed æquales quoque ſunt anguli GCA, ABC (Eucl. 32. III.) Ergo æqua- Tab. C. Fig. 4.

les

Digitized by Google

Geometrice ſic. In omni triangulo rectangulo, ut eſt ſumma perimetri & perpendiculi ad perimetrum, ita dimidium perimetri ad baſem.

Aufer $2x$ de a, & reſtabit $\frac{ab}{a+b}$ exceſſus laterum ſuper baſem. Unde rurſus.

Ut

les ſunt anguli CAB, ABC, & triangulum ACB eſt iſoſceles.

Nunc produc BC donec perpendiculari AG occurrat in F. Angulus LCB æqualis eſt angulo CAB; & angulus GCA æqualis angulo ABC (Eucl. 32. III.), æquales autem ſunt anguli ABC; CBA ex oſtenſis, & anguli LCB; GCF (Eucl. 15. I.) ergo & anguli ACG; GCF ut & rectæ AC, CF, quare recta BF æquat rectas BC, CA. Igitur circulus centro C, radio CF deſcriptus tranſibit per puncta A, & B.

Jam produc BD donec circulo FEAB occurrat in E; & junge EA. Angulus AEB æquat angulum AFB (Eucl. 21. III.) & angulus exterior ADB æquat angulum exteriorem ACB eadem de cauſa. Ergo angulus EAD æquat angulum AED, recta ED rectam DA, & recta BE inflexam BDA. Sed eſt BF major quam BE (Eucl. 25. III.) ergo rectæ BC; CA majores ſunt ipſis BD; DA.

Igitur, ſi dimidiata ſumma laterum ſuperet latus trianguli iſoſcelis ſuper datam baſim in dato ſegmento inſcripti, problema eſt impoſſibile; ſi æquet, problema eſt conſtructum; ſi ab eo ſuperetur, problema eſt poſſibile, & conſtruetur ut ſupra.

Tab. C. Fig. 5. Brevius *analyſi geometrica.* Sit AB data perimeter; C datus angulus; DE datum perpendiculum. Puta factum; & trianguli AGF angulus F æquet datum C; perpendicularis FH datam rectam DE, & perimeter AGFA, rectam datam AB. Ergo GB æquabit latera GF; FA, ſimul; & quadratum ex GB erit æquale quadrato ex GF & FA (lateribus angulum datum conſtituentibus) tanquam ex una recta. Quare, ſi ponatur IG æqualis GA, rectangulum ABI erit exceſſus quadrati ex GB (vel ex GF; FA tanquam ex una recta) ſupra quadratum ex AG (Eucl. 6. II.): datur ergo ratio rectanguli ABI ad triangulum AFG (67. Dat.); id eſt ad dimidiatum rectangulum ſub AG; FH (Eucl. 41. I.); & ratio dimidiati rectanguli ſub AG; FH ad rectangulum ſub AI; FH (duplum rectanguli ſub AG; FH (Eucl. 1. VI.) atque ideo quadruplum rectanguli dimidiati ſub AG; FH). Ergo datur ratio rectanguli ABI ad rectangulum ſub AI; FH (8. Dat.). Datur autem datarum AB; FH ratio (1. Dat.): datur igitur & BI ad IA ratio (68. Dat.). Sed harum ſumma AB datur; quare & utraque (7. Dat.). Ergo & AG. (7. Dat.)

Inventa autem AG, cum detur ratio rectanguli ſub AF; FG ad datum rectangulum ſub AG; FH (66. Dat.), dabitur rectangulum ſub AF; FG (2. Dat.) Datur autem illarum ſumma GB; quare & utraque (7. Dat.)

Componetur autem ſic. Produc anguli dati C crus alterum CK ad arbitrium in K, ut fiat angulus dato deinceps; pone CL æqualem, CK; junge KL; poſt CK; KL quære per Eucl. 11. VI. tertiam proportionalem LM. A puncto L in ſubjectam KC age per Eucl. 12. I. perpendicularem LN. Poſt datas DE; AB; LN quære per Eucl. 12. VI. quartam LO, cujus duplam pone LP, & per 10. VI. Eucl. a puncto B ſeca rectam BA in I ut MP ſecta eſt in L. Biſeca AI in G, erit AG baſis trianguli quæſiti. Poſt datas NL; LC; AG quære quartam proportionalem GQ. Tandem ad datam GB applica per 28. VI. Eucl., datum rectangulum ſub GQ; DE, deficiens quadrato, & ſit BR altitudo applicationis; erit BR latus unum; RG latus alterum trianguli quæſiti; quod deſcribes per 22. I. Eucl.

Produc enim trianguli deſcripti latus alterum AF in S donec FS æquet FG; & a puncto A in FG demitte perpendicularem AT, & FH ex F perpendicularem in AG

Jam per conſtructionem perimeter trianguli AGF æquat datam rectam AB. Nunc autem fecimus AB ad DE ut LO ad LN; & BI ad IA ut ML ad bis OL, vel BI ad AG ut ML ad OL; ergo, per compoſitionem rationum, rectangulum ABI (exceſſus quadrati ex AF; FG tanquam ex una recta vel ex GB ſupra

In omni triangulo rectangulo, ut ſumma perimetri & perpendiculi ad perimetrum, ita perpendiculum ad exceſſum laterum ſuper baſem.

PROB. V. (*l*)

Datis trianguli rectanguli baſi AB, & ſumma perpendiculi & laterum CA + CB + CD, invenire triangulum.

TAB. II. Fig. 10. XXXII. Eſto CA + CB + CD $= a$, AB $= b$, CD $= x$, & erit AC + CB $= a - x$. Pone AC — CB $= y$, & erit AC $=$

ſupra quadratum ex GA) ad rectangulum ſub DE; AG, ut ML ad LN; eſt autem rectangulum ſub DE; AG ad rectangulum ſub GQ; DE, vel ad æquale rectangulum ſub AF; FG, ut NL ad LC (per conſtr,) ergo *ex æquo ordinate*, rectangulum ABI ad rectangulum ſub AF; FG, ut ML ad LC, ut quadratum ex KL ad quadratum ex LC (EUCL. cor. 2. prop. 20. VI.); & eſt ABI rectangulum ad rectangulum ſub AF; FG ut quadratum ex GS ad quadratum ex FS (ex 67. Dat.). Eſt ergo quadratum ex KL ad quadratum ex LC ut quadratum ex GS ad quadratum ex SF, & ipſæ rectæ KL; LC; GS; SF proportionales ſunt (EUCL. 22. VI.); & triangula iſoſcelia LCK; GFS ſimilia ſunt (EUCL. 5. VI.); angulus LCK eſt æqualis angulo GFS; ideo reliquus GFA æqualis eſt dato angulo C. Quod erit unum.

Nunc ob ſimilia triangula rectangula FAT; CLN, eſt TA ad AF ut NL ad LC ut rectangulum ſub TA; FG ad rectangulum ſub AF; FG (1. VI. EUCL.) ut AG ad GQ (per conſtr.) ut rectangulum ſub AG; DE ad rectangulum ſub GQ; DE, vel ad ei æquale rectangulum ſub AF, FG; ergo rectangulum ſub TA; GF (duplum trianguli AFG (EUCL. 41. I.) & ideo æquale rectangulo ſub AG; FH) æquat rectangulum ſub AG; DE, & ipſa FH ipſam DE. Quod erat alterum.

Determinatio pro lateribus deducitur ex. 27. VI. EUCL.

Ubi vero triangulum AFG eſt rectangulum, ABI rectangulum æquale eſt bis rectangulo ſub AF; FG, id eſt bis rectangulo ſub AG; FH, vel rectangulo ſub AI; FH; datur autem ratio AB ad FH, ergo & ratio BI ad IA &c. Compoſitio eſt manifeſta, AB eſt ad FH ut AI ad IB (EUCL. 16. VI.)

Cum ſit perimeter ad perpendiculum, ut dupla baſis ad reliquam perimetrum, erit ſumma perimetri & perpendiculi ad perimetrum ut perimeter ad duplam baſem; & biſecando duos ultimos terminos, inveniemus primum theorema *Newtonianum*.

Quoniam ſumma perpendiculi & perimetri ad perimetrum ut eſt perimeter ad duplam baſem; erit per 19. V. EUCL. ſumma perpendiculi & perimetri ad perimetrum ut perpendiculum ad perimetrum dupla baſi multatam. Sed perimeter æquat baſim & latera ſimul ſumpta, ergo perimeter multata duplo baſeos eſt æqualis exceſſui laterum ſupra baſim. Quod eſt ſecundum NEWTONI theorema.

(*l*) *Sequens problema, cum ſit quadraticum, admonet, ut jam tradam horum problematum conſtructionem.*

34. Horum problematum æquationes, ut dictum eſt, his continentur formulis (Art. IX. & X. Sect. II.)

$$1^\circ.\quad xx - ax - bc = 0.$$
$$2^\circ.\quad xx + ax - bc = 0.$$
$$3^\circ.\quad xx - ax + bc = 0.$$
$$4^\circ.\quad xx + ax + bc = 0.$$

Jam 1°, $x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{(\frac{aa}{4} + bc)}$; ubi $\sqrt{(\frac{aa}{4} + bc)}$ eſt major quam $\frac{a}{2}$, quia $\frac{aa}{4} + bc$ eſt major $\frac{aa}{4}$: ergo ſi radix ſit poſitiva, poſitivus erit valor x, ſin vero, negativus; quod etiam liquet in ſecunda formula, $x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{(\frac{aa}{4} + bc)}$, ſed tertia dat $x = \frac{a}{2} \pm$

$\surd$

Digitized by Google

$\sqrt{(\frac{aa}{4} - bc)}$, hic $\sqrt{(\frac{aa}{4} - bc)}$ minor eſt quam $\frac{a}{2}$; habebit ergo x duos valores poſitivos. Quarta autem eſt $x = -\frac{a}{2} \mp \sqrt{(\frac{aa}{4} - bc)}$, & x habet duos valores negativos.

Hæ formulæ conſtrui poſſunt per 28 & 29. VI. Eucl. Sed has conſtructiones addere libet.

35. In duabus primis formulis ſemper poſſibilis eſt valor ipſius x: in duabus ultimis autem is eſſe poteſt impoſſibilis, quod accidit ubi bc major $\frac{aa}{4}$, nam tunc $\sqrt{(\frac{aa}{4} - bc)}$ eſt imaginaria.

Prima & ſecunda reſolvuntur in hanc $xx \pm ax = bc$, unde ſequens analogia $b . x :: x \pm a . c$. quo poſito.

Tab. D. Fig. 1. Deſcribatur quivis circulus, cujus diameter non minor ſit quam a, nec quam $b - c$ (poſito b majore quam c), ex cujus puncto quovis A inſcribantur chordæ AD $= b - c$, AB $= a$, & producta AD in F, ut DF $= c$, deſcribatur per F circulus priori concentricus, cui donec occurrant in punctis E, H, G; producantur chordæ AB, AD.

Jam ſi ex communi centro C demittatur CL perpendicularis in AD, erit EL $=$ LF, & AL $=$ LD (Eucl. 3. III.) quare AE $=$ FD $= c$, & eadem de cauſa AG $=$ BH.

Sed AF $=$ FD $+$ AD $= c + b - c = b$, & AH $=$ AB $+$ BH $=$ AB $+$ AG $= a +$ AG, & (Eucl. 34. III.) eſt AF . AE $=$ AG . AH, id eſt $bc = (a +$ AG) AG $= (a + x)\, x$, (in formula $xx + ax = bc$); ergo $a +$ AG . $x :: a + x$. AG, & *componendo* $a +$ AG $+ x . x :: a + x +$ AG . AG, & *alternando* $a +$ AG $+ x . a + x +$ AG $:: x$. AG; ſed duo primi termini ſunt æquales, ergo & $x =$ AG.

36. Aſt ubi $bc = xx - ax$, eſt $(a +$ AG) AG $= (x - a)\, x$, & $a +$ AG . $x - a :: x$. AG, & *componendo* AG $+ x . x - a :: x +$ AG . AG, vel *alternando* AG $+ x . x +$ AG $:: x - a$. AG, quare $x - a =$ AG, & $x = a +$ AG $=$ AH.

37. Si $b = c$, aut ultimus formulæ terminus, quadratum, tunc AD $= 0$, & duobus punctis A, D, coincidentibus, deſcribi deberet circulus rectam EF, in A tangens radio non minori quam $\frac{a}{2}$, & cetera ut ſupra.

Sed tunc eſt etiam alia conſtructio ſimplicior.

Nam ſit circuli ABA radius $= \frac{a}{2}$, tangens AE $= b$, & ex E ducatur EMCN per centrum, erit NM $= a$, & (Eucl. 36. III. 13. VI.) NE $(a +$ ME) . AE :: AE . EM; quare AE² $(bb) = (a +$ ME) ME $= xx + ax$; unde $a +$ ME . $x :: a + x$. ME; & inſiſtendo ſuperioris ratiocinii veſtigiis, invenitur ME $= x$, & ubi $xx - ax = bb$, $x =$ NE valor poſitivus. Tab. D. Fig. 2.

38. Nunc dico in prima formula negativum eſſe AH $= -x$.

Tunc enim $xx + ax$ fieret $= -x\,(-a - x)$, unde oriretur analogia $a +$ AG . $-x :: -a - x$. AG; ſed $a +$ AG $=$ AH & AG $=$ H $- a$ ergo AH . $-x :: -a - x$. AH $- a$, & *alternando* AH . $-a - x :: -x$. AH $- a$, & *componendo* AH $- a - x$. $-a - x :: -x +$ AH $- a$. AH $- a$, & rurſus *alternando* AH $- a - x$. $-x +$ AH $- a :: -a - x$. AH $- a$; ſed duo primi termini ſunt æquales; ergo $-a - x =$ AH $- a$, & $-x =$ AH, quæ recta eſt ideo valor negativus ipſius ignotæ.

39. Sed in ſecunda formula $xx - ax = -x\,(-x + a)$; tunc ergo $a +$ AG . $-x + a :: -x$. AG, & *alternando* $a +$ AG . $-x :: -x + a$. AG; & *componendo* $a +$ AG $- x$. $-x :: -x + a +$ AG . AG; ergo tunc AG $= -x$.

40. Veniamus ad duas ultimas formulas $xx - ax + bc = 0$, & $xx + ax + bc = 0$, ergo $bc = -xx \mp ax$, unde naſcitur analogia $b . \pm a - x :: x . c$.

Deſcribatur circulus ABD cujus diameter non ſuperetur nec ab a, neque a $b + c$, & ex quovis peripheriæ puncto A inſcribantur chordæ AB $= a$, AD $= b + c$, tunc ſumta DF $= c$, eodem centro C, & radio CF deſcribatur circulus FEGH. Hic aut ſecabit chordam AB in duobus punctis, aut in uno, aut nuſpiam. Tab. D. Fig. 3.

Secet eam in duobus punctis G, H; dico AG, & AH eſſe duos valores poſitivos ipſius x. Nam, ut ſupra monſtratum eſt, AE $=$ FD, unde AF $=$ AD $-$ DF $= b$, & AG $=$ HB, quare AH $=$ AB $-$ BH $= a -$ BH. Sed AF . AE $(bc) =$ AH . AG $= (a -$ BH) BH $= -xx \pm ax$, ergo (ſi ſumatur $ax - xx$) $a -$ BH . $x :: a - x$. BH, & *dividendo* $a -$ BH $- x . x :: a - x -$ BH . BH, atque ideo $x =$ BH $=$ AG.

41. Rurſus quia BH $=$ AG $=$ AB $-$ AH $= a -$ AH, eſt AH . $x :: a - x$. $a -$ AH, & *alternando* AH . $a - x :: x$. $a -$ AH, & *di-*

In omni triangulo rectangulo, ut ſumma perimetri & perpendiculi ad perimetrum, ita perpendiculum ad exceſſum laterum ſuper baſem.

PROB. V. (*l*)

Datis trianguli rectanguli baſi AB, & ſumma perpendiculi & laterum CA + CB + CD, invenire triangulum.

TAB. II. Fig. 10. XXXII. Eſto $CA + CB + CD = a$, $AB = b$, $CD = x$, & erit $AC + CB = a - x$. Pone $AC - CB = y$, & erit $AC =$

ſupra quadratum ex GA) ad rectangulum ſub DE; AG, ut ML ad LN; eſt autem rectangulum ſub DE; AG ad rectangulum ſub GQ; DE, vel ad æquale rectangulum ſub AF; FG, ut NL ad LC (per conſtr.) ergo *ex æquo ordinate*, rectangulum ABI ad rectangulum ſub AF; FG, ut ML ad LC, ut quadratum ex KL ad quadratum ex LC (EUCL. cor. 2. prop. 20. VI.); & eſt ABI rectangulum ad rectangulum ſub AF; FG ut quadratum ex GS ad quadratum ex FS (ex 67. Dat.). Eſt ergo quadratum ex KL ad quadratum ex LC ut quadratum ex GS ad quadratum ex SF, & ipſæ rectæ KL; LC; GS; SF proportionales ſunt (EUCL. 22. VI.); & triangula iſoſcelia LCK; GFS ſimilia ſunt (EUCL. 5. VI.); angulus LCK eſt æqualis angulo GFS; ideo reliquus GFA æqualis eſt dato angulo C. Quod erit unum.

Nunc ob ſimilia triangula rectangula FAT; CLN, eſt TA ad AF ut NL ad LC ut rectangulum ſub TA; FG ad rectangulum ſub AF; FG (1. VI. EUCL.) ut AG ad GQ (per conſtr.) ut rectangulum ſub AG; DE ad rectangulum ſub GQ; DE, vel ad ei æquale rectangulum ſub AF, FG; ergo rectangulum ſub TA; GF (duplum trianguli AFG (EUCL. 41. I.) & ideo æquale rectangulo ſub AG; FH) æquat rectangulum ſub AG; DE, & ipſa FH ipſam DE. Quod erat alterum.

Determinatio pro lateribus deducitur ex. 27. VI. EUCL.

Ubi vero triangulum AFG eſt rectangulum, ABI rectangulum æquale eſt bis rectangulo ſub AF; FG, id eſt bis rectangulo ſub AG; FH, vel rectangulo ſub AI; FH; datur autem ratio AB ad FH, ergo & ratio BI ad IA &c. Compoſitio eſt manifeſta, AB eſt ad FH ut AI ad IB (EUCL. 16. VI.)

Cum ſit perimeter ad perpendiculum, ut dupla baſis ad reliquam perimetrum, erit ſumma perimetri & perpendiculi ad perimetrum ut perimeter ad duplam baſem; & biſecando duos ultimos terminos, inveniemus primum theorema *Newtonianum*.

Quoniam ſumma perpendiculi & perimetri ad perimetrum ut eſt perimeter ad duplam baſem; erit per 19. V. EUCL. ſumma perpendiculi & perimetri ad perimetrum ut perpendiculum ad perimetrum dupla baſi multatam. Sed perimeter æquat baſim & latera ſimul ſumpta, ergo perimeter multata duplo baſeos eſt æqualis exceſſui laterum ſupra baſim. Quod eſt ſecundum NEWTONI theorema.

(*l*) *Sequens problema, cum ſit quadraticum, admonet, ut jam tradam horum problematum conſtructionem.*

34. Horum problematum æquationes, ut dictum eſt, his continentur formulis (Art. IX. & X. Sect. II.)

1°. $xx - ax - bc = 0.$
2°. $xx + ax - bc = 0.$
3°. $xx - ax + bc = 0.$
4°. $xx + ax + bc = 0.$

Jam 1°, $x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{(\frac{aa}{4} + bc)}$; ubi $\sqrt{(\frac{aa}{4} + bc)}$ eſt major quam $\frac{a}{2}$, quia $\frac{aa}{4} + bc$ eſt major $\frac{aa}{4}$: ergo ſi radix ſit poſitiva, poſitivus erit valor x, ſin vero, negativus; quod etiam liquet in ſecunda formula, $x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{(\frac{aa}{4} + bc)}$, ſed tertia dat $x = \frac{a}{2} \pm$

$\sqrt{}$

Digitized by Google

$V(\frac{aa}{4} - bc)$, hic $V(\frac{aa}{4} - bc)$ minor eſt quam $\frac{a}{2}$; habebit ergo x duos valores poſitivos. Quarta autem eſt $x = -\frac{a}{2} \mp V(\frac{aa}{4} - bc)$, & x habet duos valores negativos.

Hæ formulæ conſtrui poſſunt per 28 & 29. VI. Eucl. Sed has conſtructiones addere libet.

35. In duabus primis formulis ſemper poſſibilis eſt valor ipſius x: in duabus ultimis autem is eſſe poteſt impoſſibilis, quod accidit ubi bc major $\frac{aa}{4}$, nam tunc $V(\frac{aa}{4} - bc)$ eſt imaginaria.

Prima & ſecunda reſolvuntur in hanc $xx \pm ax = bc$, unde ſequens analogia $b . x :: x \pm a . c$. quo poſito.

Tab. D. Fig. 1. Deſcribatur quivis circulus, cujus diameter non minor ſit quam a, nec quam $b - c$ (poſito b majore quam c), ex cujus puncto quovis A inſcribantur chordæ $AD = b - c$, $AB = a$, & producta AD in F, ut $DF = c$, deſcribatur per F circulus priori concentricus, cui donec occurrant in punctis E, H, G; producantur chordæ AB, AD.

Jam ſi ex communi centro C demittatur CL perpendicularis in AD, erit $EL = LF$, & $AL = LD$ (Eucl. 3. III.) quare $AE = FD = c$, & eadem de cauſa $AG = BH$.

Sed $AF = FD + AD = c + b - c = b$, & $AH = AB + BH = AB + AG = a + AG$, & (Eucl. 34. III.) eſt $AF . AE = AG . AH$, id eſt $bc = (a + AG) AG = (a + x) x$, (in formula $xx + ax = bc$); ergo $a + AG . x :: a + x . AG$, & *componendo* $a + AG + x . x :: a + x + AG . AG$, & *alternando* $a + AG + x . a + x + AG :: x . AG$; ſed duo primi termini ſunt æquales, ergo & $x = AG$.

36. Aſt ubi $bc = xx - ax$, eſt $(a + AG) AG = (x - a) x$, & $a + AG . x - a :: x . AG$, & *componendo* $AG + x . x - a :: x + AG . AG$, vel *alternando* $AG + x . x + AG :: x - a . AG$, quare $x - a = AG$, & $x = a + AG = AH$.

37. Si $b = c$, aut ultimus formulæ terminus, quadratum, tunc $AD = 0$, & duobus punctis A, D, coincidentibus, deſcribi deberet circulus rectam EF, in A tangens radio non minori quam $\frac{a}{2}$, & cetera ut ſupra.

Sed tunc eſt etiam alia conſtructio ſimplicior.

Nam ſit circuli ABA radius $= \frac{a}{2}$, tangens $AE = b$, & ex E ducatur EMCN per centrum, erit $NM = a$, & (Eucl. 36. III. 13. VI.) NE $(a + ME) . AE :: AE . EM$; quare $AE^2 (bb) = (a + ME) ME = xx + ax$; unde $a + ME . x :: a + x . ME$; & inſiſtendo ſuperioris ratiocinii veſtigiis, invenitur $ME = x$, & ubi $xx - ax = bb$, $x = NE$ valor poſitivus. Tab. D. Fig. 2.

38. Nunc dico in prima formula negativum eſſe $AH = -x$.

Tunc enim $xx + ax$ fieret $= -x(-a-x)$, unde oriretur analogia $a + AG . -x :: -a - x . AG$; ſed $a + AG = AH$ & $AG = H - a$ ergo $AH . -x :: -a - x . AH - a$, & *alternando* $AH . -a - x :: -x . AH - a$, & *componendo* $AH - a - x . -a - x :: -x + AH - a . AH - a$, & rurſus *alternando* $AH - a - x . -x + AH - a :: -a - x . AH - a$; ſed duo primi termini ſunt æquales; ergo $-a - x = AH - a$, & $-x = AH$, quæ recta eſt ideo valor negativus ipſius ignotæ.

39. Sed in ſecunda formula $xx - ax = -x(-x + a)$; tunc ergo $a + AG . -x + a :: -x . AG$, & *alternando* $a + AG . -x :: -x + a . AG$; & *componendo* $a + AG - x . -x :: -x + a + AG . AG$; ergo tunc $AG = -x$.

40. Veniamus ad duas ultimas formulas $xx - ax + bc = 0$, & $xx + ax + bc = 0$, ergo $bc = -xx \pm ax$, unde naſcitur analogia $b . \pm a - x :: x . c$.

Deſcribatur circulus ABD cujus diameter non ſuperetur nec ab a, neque a $b + c$, & ex quovis peripheriæ puncto A inſcribantur chordæ $AB = a$, $AD = b + c$, tunc ſumta $DF = c$, eodem centro C, & radio CF deſcribatur circulus FEGH. Hic aut ſecabit chordam AB in duobus punctis, aut in uno, aut nuſpiam. Tab. D. Fig. 3.

Secet eam in duobus punctis G, H; dico AG, & AH eſſe duos valores poſitivos ipſius x. Nam, ut ſupra monſtratum eſt, $AE = FD$, unde $AF = AD - DF = b$, & $AG = HB$, quare $AH = AB - BH = a - BH$. Sed $AF . AE (bc) = AH . AG = (a - BH) BH = -xx \pm ax$, ergo (ſi ſumatur $ax - xx$) $a - BH . x :: a - x . BH$, & *dividendo* $a - BH - x . x :: a - x - BH . BH$, atque ideo $x = BH = AG$.

41. Rurſus quia $BH = AG = AB - AH = a - AH$, eſt $AH . x :: a - x . a - AH$, & *alternando* $AH . a - x :: x . a - AH$, & *di-*

$AC = \frac{a - x + y}{2}$, & $CB = \frac{a - x - y}{2}$. (*m*) Eſt autem $ACq + CBq = ABq$, hoc eſt $\frac{aa - 2ax + xx + yy}{2} = bb$. Eſt & $AC . CB = AB . CD$, hoc eſt $\frac{aa - 2ax + xx - yy}{4} = bx$. (*n*) Quibus comparatis fit (*o*) $2bb - aa = bb + \frac{aag - 2agx + gxx - gyy}{2a}$,

& ſublatis fractionibus

$a^3 - 2aax + axx + ayy = 2abb + aag - 2agx + gxx - gyy$;

unde eruitur

$$yy = \frac{-axx + gxx + 2aax - 2agx}{a + g} \frac{- a^3 + 2ab^2 + a^2 g}{a + g}.$$

dividendo $AH - a + x . a - x :: x - a + AH . - a AH$; ergo $a - x = a - AH$, & $- x = AH$, ac $x = - AH$.

42. Si vero ſit $- ax - xx$, dico eſſe AH, & AG duos valores negativos ipſius x. Nam erit $a - BH . - x :: + a + x . BH$, & *alternando* $a - BH . + a + x :: - x . BH$, & *dividendo* $- BH - x . + a + x :: - x - BH . BH$; ergo $+ a + x = + BH$, & $- x = - BH + a = AH$. Item $BH = AG = a - AH$, ergo $+ AH . - x :: + a + x . a - AH$, & *dividendo* $+ x + AH . - x :: AH + x . a - AH$, quam ob rem $- x = a - AH = AB - AH = BH = AG$.

43. Si circulus EFHG ſecat rectam AB in uno puncto æquales fient duo valores ipſius x.

44. Si vero nusquam eam ſecat, problema eſt impoſſibile.

TAB. C. Fig. 2. (*m*) Si vero angulus ACB eſſet non rectus, ſed datus, a vertice alterius angulorum non datorum CAB demitte in latus oppoſitum CB ad rectos angulos rectam AE. Triangulum ACE datum erit ſpecie, & dabitur ratio laterum AC, CE, EA; ut jam demonſtravimus.

Sit igitur $a . g :: AC(\frac{a - x + y}{2}) . CE$, & $CE = \frac{ag - gx + gy}{2a}$. Eſt autem $AC^2 + BC^2 = AB^2 + 2BC . CE$; hoc eſt

$$\frac{aa - 2ax + 2ay + xx - 2xy + yy + aa -}{4} \frac{2ax - 2ay + xx + 2xy + yy}{4}$$

$$= bb + \frac{aag - agx + agy + gxx - gxy -}{2a} \frac{agx - agy + gxy - gyy}{2a};$$

nempe deletis delendis,

$$\frac{aa - 2ax + xx + yy}{2}$$

(*n*) Eſt & Triangulum BCD ſimile Triangulo BAE, quapropter $BC (\frac{a - x - y}{2})$. $CD (x) :: BA (b) . AE$; quocirca $AE = \frac{2bx}{a - x - y}$; ſed ob datam rationem CA ad AE, ſit $a . f :: CA(\frac{a - x + y}{2a}) . AE$,

& erit $AE = \frac{af - fx + fy}{2a}$.

Igitur $\frac{2bx}{a - x - y} = \frac{af - fx + fy}{2a}$;

aut ſublatis fractionibus,

$4abx = aaf - afx + afy - afx + fxx - fxy - afy + fxy - fyy$;

ſeu, deletis delendis,

$4abx = aaf - 2afx + fxx - fyy$; aut

$$yy = \frac{fxx - 2afx - 4abx + aaf}{f}.$$

(*o*) Quibus comparatis fit

$$\frac{-axx + gxx + 2aax - 2agx}{a + g} \frac{- a^3 + 2abb + aag}{a + g} =$$

$$\frac{fxx - 2afx - 4abx + aaf}{f};$$

ſeu ſublatis fractionibus, deletis delendis, ordinando, & cuncta dividendo per $2af$,

Digitized by Google

$$xx = 2ax + \frac{2abx + 2bgx}{f} - aa + bb;$$

$$\text{hinc } x = a + \frac{ab + bg}{f} - V(aa + \frac{2aab + 2abg}{f}$$
$$+ \frac{aabb + 2abbg + bbgg}{ff} - aa + bb)$$

quæ quantitas radicalis, deletis contrariis, & cuncta redigendo ad eandem denominationem, ſit

$$V(\frac{2aabf + 2abgf + aabb + 2abbg}{ff}$$
$$\frac{+ bbgg + bbff}{ff})$$

ſed $gg + ff = aa$; ergo ea evadit

$$V(\frac{2aabf + 2abgf + 2aabb + 2abbg}{ff})$$

Si angulus ACB eſſet obtuſus, mutando ſignum ipſius g, haberemus

$$x = a + \frac{ab - bg}{f} \pm$$
$$V(\frac{2aabf - 2abgf + 2aabb - 2abbg}{ff}).$$

Si vero angulus ACB eſſet rectus, tunc $g = 0$, & $f = a$; quapropter $x = a + b \pm V(2ab + 2bb)$. Prorſus ut Newtonus.

Sed, antequam ad conſtructionem tranſimus, cur hic perpendicularis duos habet valores, & quis eligendus eſt?

Reſponſum ad quæſtionem ſecundam facile eſt. Perpendicularis minor eſt uno latere, fortius tota perimetro aucta ipſa perpendiculari $(a + b)$ quare ab ipſa $a + b$ demi debet $V(2ab + 2bb)$ ut habeatur petita perpendicularis; cujus valor erit poſitivus, ut eſſe debet, quia $a + b \,.\, V(2ab + bb) :: V(2ab + 2bb) \,.\, 2b$; ſed, cum a major ſit quam b, eſt $a + b$ major quam $2b$, ergo etiam quam $V(2ab + 2bb)$; ob naturam proportionis continuæ. Hoc verum eſſe in æquatione noſtra, quanquam magis compoſita, ſponte patet, quoniam quantitas radicalis eſt radix ex quadrato quantitatis extra ſignum, minuto quantitate poſitiva $aa - bb$.

Difficilius videtur reſpondere quæſtioni primæ, præſertim cum x, exprimens hic perpendiculum, duos valores diverſos habere non poſſit, & ejuſdem valor ſecundus major ſit quam tota perimeter aucta perpendiculo, nedum ſolo perpendiculo.

Sed, animadvertendum eſt, quod ſi datarum alterutra a aut b, ita poſſet exponere aliquid aliud quam quod exponere poſuimus, ut ſalva maneret relatio inter x perpendiculum, b baſim, & a indicantem aliquid a ſumma laterum & perpendiculi diverſum, valor ipſius x unici duobus diverſis modis poſſet exprimi.

Hoc ajo nunc accidere. Et revera, ſit non $CD + CA + CB = a$, ſed $CD - CA - CB = a$; erit $CD - a = x - a = CD + CB$; quapropter $AC = \frac{x - a + y}{2}$; $CB = \frac{x - a - y}{2}$. His poſitis lege veſtigia ratiocinii ſuperius expoſiti, & invenies eandem æquationem finalem.

Tunc autem a eſt quantitas negativa, ſiquidem $DC + CA$ certe ſuperat CD; pro ea pone $-c$ & æquatio pro angulo recto fiet

$$x = -c + b \pm V(-2bc + 2bb);$$

ubi patet quod perpendiculum debet eſſe $-c + b + V(-2bc + 2bb)$, & quod problema eſſet impoſſibile ſi c eſſet major quam b.

Constructio Geometrica.

Sit $GF = a$; $FI = g$; $IG = f$; produc GF in K ita ut ſit $FK = IF$, eritque $GK = a + g$. Ex IG abſcinde $GL = b$; biſeca IG in N & junge NK, cui parallelam per L duc LM; eritque $NG\,(\frac{f}{2})\,.\,GK\,(a + g) :: LG\,(b)\,.\,GM = \frac{2ab + 2bg}{f}$. Tab. D. Fig. 4.

Item produc GF in O, ut ſit $OF = FG$; & in P ut ſit $PG = GM$, & erit $OP = 2a + \frac{2ab + 2bg}{f}$. Quovis centro deſcribe quemvis circulum tranſeuntem per P & O, cui a puncto P inſcribe chordam $PQ = 2a = GO$; hanc biſeca in R, & abſcinde $RS = b$, demum priore centro deſcribe circulum tranſeuntem per S, qui occurret rectæ PO in T & V, & rectæ PQ iterum in Z. Dico rectam $PT = x$.

Nam eſt $PS = a - b$; & $PZ = a + b$. Sed $TP\,.\,PV = ZP\,.\,PS$; ergo $PT\,(2a + \frac{2ab + 2bg}{f} - PT) = aa - bb$; ſed erat $x\,(2a + \frac{2ab + 2bg}{f} - x) = aa - bb$ ergo &c.

Hæc quidem pro angulo acuto, ſed pro obtuſo ex GF abſcinde $Fk = g$ ut ſit $Gk = g - b$, & cetera perage ut ſupra.

Quando angulus eſt rectus, brevior & facilior eſt conſtructio. Sit $AD = 2a + 2b$. Quovis centro C deſcribe circulum tranſeuntem per A & D, & in eo inſcribe rectam $AB = 2a$, Tab. D. Fig. 3.

$- aa + 2ax - xx = yy = aa - 2ax + xx - 4bx$. Et per reductionem $xx = 2ax + 2bx - aa + bb$, & $x = a + b - \sqrt{(2ab + 2bb)}$.

Geometrice ſic. In omni triangulo rectangulo de ſumma perimetri & perpendiculi aufer mediam proportionalem inter eandem ſummam & duplum baſis, & reſtabit perpendiculum. (*p*)

Idem aliter.

Sit CA + CB + CD $= a$, AB $= b$, & AC $= x$, & erit BC $= \sqrt{(bb - xx)}$, CD $= \frac{x\sqrt{(bb - xx)}}{b}$. (*q*) Et $x +$ CB + CD $= a$, ſive CB + CD $= a - x$, atque adeo $\frac{b + x}{b}\sqrt{(bb - xx)} = a - x$. (*r*) Et quadratis partibus atque multiplicatis per bb, fiet

$$- x^4 - 2bx^3 + 2b^3x + b^4 = aabb - 2abbx + bbxx.$$

Qua æquatione per tranſpoſitionem partium ad hunc modum ordinata

$$x^4 + 2bx^3 \begin{matrix} + 3bb \\ + 2ab \end{matrix} xx \begin{matrix} + 2b^3 \\ + 2abb \end{matrix} x \begin{matrix} + b^4 \\ + 2ab^3 \\ + aabb \end{matrix} =$$

$2bb$

$= 2a$; eam biſeca in R, & abſcinde RG $= b$, deinde eodem centro C, radio CG deſcribe circulum occurrentem AD in E & F & AB rurſus in H; erit AE $= x$ quæſita. Quod demonſtrabis ut ſupra.

Pro angulo recto aliter & brevius, analyſi geometrica.

TAB. D. Fig. 5. (*p*) Sit quæſitum triangulum rectangulum ACB, ejus baſis data AB, recta EF æqualis ſummæ laterum AC, CB, & perpendiculi CD, huic adde in directum FG æqualem baſi, erit EG ſumma perimetri & perpendiculi, pone EH æqualem perpendiculo, & GH erit erit perimeter, ſed EG eſt ad GH, ut dimidia GH ad GF (*ſupra* Prob. IV.) ſive *invertendo* & *alternando* GF ad GH, ut dimidia GH ad EG, ergo (EUCL. 3. V.) dupla GF ad GH, ut GH ad EG; atqui data eſt datarum extremarum ratio, (1. *dator.*) ergo datur ratio primæ ad ſecundam, (24. *dator.*) quare ſecunda, (id eſt perimeter) magnitudine datur (2. *dator.*); ex qua deme datam baſim GF, & data erit ſumma laterum FH: ſed datur tota EF ex hypotheſi, ergo & reliqua EH, id eſt perpendiculum.

Componetur autem ſic.

Quære mediam inter aggregatum ex perimetro, & perpendiculo; ac duplam baſim; erit hæc perimeter, quam deme ex aggregato perimetri & perpendiculi, reſtabit perpendiculum, data autem baſi, & normali facile deſcribitur triangulum rectangulum.

Ex hac ſolutione fluit *Newtonianum* theorema.

(*q*) Eſt enim AB (b), AC (x) : : BC ($\sqrt{(bb - xx)}$) : CD (EUCL. 8. VI.).

(*r*) Item quia AB (b). AC (x) :: BC ($\sqrt{(bb - xx)}$). CD, erit *invertendo & componendo* $x + b . b$ :: DC + CB . $\sqrt{(bb - xx)}$; ergo DC + CB $(a - x) = \frac{(x + b)(\sqrt{(bb - xx)})}{b}$.

Digitized by Google

$$\begin{array}{l}2bb\\+2ab\end{array} xx \begin{array}{l}+4b^3\\+4abb\end{array} x \begin{array}{l}+2b^4\\+2ab^3\end{array} \text{(s)},$$

& extracta radice, orietur

$$xx + bx + bb + ab = (x + b)\sqrt{(2ab + 2bb)}.$$

Et extracta iterum radice (t)

$$x = -\frac{1}{2}b + \sqrt{(\frac{1}{2}bb + \frac{1}{2}ab)} \pm \sqrt{(b\sqrt{(\frac{1}{2}bb + \frac{1}{2}ab)} - \frac{1}{4}bb - \frac{1}{2}ab)}.$$

Conſtructio Geometrica.

Cape igitur AB $= \frac{1}{2}b$, BC $= \frac{1}{2}a$, CD $= \frac{1}{2}$AB, AE mediam proportionalem inter b & AC, & EF hinc inde mediam proportionalem inter b & DE, & erunt BF, BF duo latera trianguli. (*u*) Tab. II. Fig. 2.

PROB.

(*s*) Etenim hæc dat

$$x^4 + 2bx^3 + bbxx \begin{array}{l}-aabb\\+b^4\end{array} = \begin{array}{l}2b^3\\+2abb\end{array} x;$$

& (utrinque additis

$$\begin{array}{l}+2bb\\+2ab\end{array} xx \begin{array}{l}+2b^3\\+2abb\end{array} x \begin{array}{l}+2ab^3\\+2b^3\end{array})$$

$$x^4 + 2bx^3 \begin{array}{l}+3bb\\+2ab\end{array} xx \begin{array}{l}+2b^3\\+2abb\end{array} x \begin{array}{l}+2ab^3\\+aabb\\+b^4\end{array}$$

$$= \begin{array}{l}2bb\\+2ab\end{array} xx \begin{array}{l}+4b^3\\+4abb\end{array} x \begin{array}{l}+2b^4\\+2ab^3\end{array}.$$

Regulæ, quibus inveniri poſſint quantitates in ſimilibus caſibus addendæ, tradentur infra.

(*t*) Licet hæc poſſint iiſdem ſymbolis ſervatis explicare, tamen præſtat ſimpliciores litteras adhibere. Fac ergo $2ab + 2bb = cc$, aut $ab + bb = \frac{cc}{2}$, & $\sqrt{(2ab + 2bb)} = c$; unde ſuperior æquatio fiet $xx + bx + \frac{cc}{2} = cx + bc$, ſive $xx = cx - bx + bc - \frac{cc}{2}$, & $x = \frac{c-b}{2} \pm \sqrt{(\frac{cc-2bc+bb}{4} + bc - \frac{cc}{4})} = \frac{c-b}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(bb + 2bc - cc)}$, & reſtitutis prioribus notis $x = -\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}\sqrt{(2ab + 2bb)} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(-2ab + 2b\sqrt{(2ab + 2bb)} - bb)} = -\frac{1}{2}b + \sqrt{(\frac{1}{2}bb + \frac{1}{2}ab)} \pm \sqrt{(b\sqrt{(\frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}bb)} - \frac{1}{4}bb - \frac{1}{2}ab)}$).

Ubi nota quod, quia duo latera trianguli ſemper tertio majora ſunt, erunt a fortiori duo latera & normalis ſimul tertio majora, id eſt, a major quam b; quare rectangulum ab majus quam bb; & $2ab + 2bb$, quam $4bb$ ($= 2bb + 2bb$), & idcirco cc majus quam $4bb$; aut $\frac{c}{2}$ quam b; vel $\frac{cc}{2}$, quam bc; eſt ergo $bc - \frac{cc}{2}$ quantitas negativa; hanc pone $= -ff$; at eſt poſitiva $c - b$, quam fac $= 2g$, & fiet $xx = 2gx - ff$, vel $xx - 2gx + ff = 0$; tertia formula N°. 34, hujus, in qua x duos habet valores poſitivos.

(*u*) Quamvis hoc problema jam conſtruxerimus, tamen explicanda eſt Auctoris conſtructio. AB $= \frac{b}{2}$, BC $= \frac{a}{2}$; ergo AC $= \frac{a+b}{2}$; AE (cum ſit media inter b, & AC $= \frac{a+b}{2}$) erit $\sqrt{(\frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}bb)}$, & BD ($=$ BC $-$ CD) $= \frac{1}{2}a - \frac{1}{4}b$, ac AD ($=$ AC $-$ CD) $=$

PROB. VI.

Datis in triangulo rectangulo ABC ſumma laterum AC + BC, & perpendiculo CD invenire triangulum.

TAB. II. Fig. 10.

XXXIII. SIt $AC + BC = a$, $CD = b$, $AC = x$, & erit $BC = a - x$, (x) $AB = \sqrt{(aa - 2ax + 2xx.)}$ Eſt & $CD . AC :: BC . AB$, (y) Ergo rurſus $AB = \frac{ax - xx}{b}$. Quare $ax - xx = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}a - \frac{1}{4}b = \frac{1}{4}b + \frac{1}{2}a$: ſed quia b eſt minor quam a, erit (additis utrobique æqualibus) $2b$ minor, quam $a + b$; & b, quam $\frac{a+b}{2}$; AE eſt igitur major quam b, & minor quam $\frac{a+b}{2}$; cadet ideo punctum B inter A, & C. Verum, aut cadet inter A & D, aut inter D & C. Primo, cadat inter A & D; erit hoc caſu AE minor quam AD, id eſt, $\sqrt{(\frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}bb)}$ minor quam $\frac{1}{2}a + \frac{1}{4}b$, vel $b\sqrt{(\frac{1}{2}ab + \frac{1}{1}bb)}$ minor quam $\frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb$; adeoque $b\sqrt{(\frac{1}{2}al + \frac{1}{2}bb)} - \frac{1}{2}ab - \frac{1}{4}bL$ eſt quantitas negativa, cujus radix imaginaria, & problema impoſſibile. Cadat ergo punctum E inter D & C: erit tunc $DE\ (= AE - AD) = \sqrt{(\frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}bb)} - \frac{1}{2}a - \frac{1}{4}b$; quocirca EF (media inter b & DE) $= \pm\sqrt{(l\sqrt{(\frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}bb)} - \frac{1}{2}ab - \frac{1}{4}bb))}$; BF $(= AE \pm EF - AB)$ erit ideo $= \sqrt{(\frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}bb)} \mp (b\sqrt{(\frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}bb)} - \frac{1}{2}ab - \frac{1}{4}b2) - \frac{1}{2}b$.

DETERMINATIO.

Quia vero, ut problema ſit poſſibile, oportet ut $\sqrt{(\frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}bb)}$ minor non ſit quam $\frac{1}{2}a + \frac{1}{4}b$; videamus quo caſu ſint æquales. Si igitur $\sqrt{(\frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}bb)} = \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}b$; erit $\frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}bb = \frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}ab + \frac{1}{16}bb$; vel (auferendo fractiones, & delendo æqualia) $4ab + 7bb = 4aa$; & $b + \frac{7bb}{4a} = a$, vel $\frac{7bb}{4a} = a - b$. Summa laterum & perpendiculi (a) ſecetur in ſeptem partes pares, & quæratur tertia poſt quatuor ex his ſeptimis, & hypothenuſam; ſi hæc minor non eſt quam exceſſus ſummæ laterum, & perpendiculi ſupra baſim, problema eſt poſſibile, & conſtruetur ut ſupra.

Sed in hac ultima hypotheſi triangulum quæſitum eſt iſoſcele, ut patet.

(x) Sed ſi angulus ACB rectus non eſſet, pone $d . g :: AC\ (x) . CE = \frac{gx}{d}$ & $d . f ::$ $CA\ (x) . AE = \frac{fx}{d}$. TAB. C. Fig. 2.

Eritque $AB^2 = AC^2 + CB^2 - 2BCE = 2xx + aa - 2ax - \frac{2agx + 2gxx}{d}$.

(y) Item $DC\ (b) . CB\ (a - x) :: EA\ (\frac{fx}{d})$:

$$AB = \frac{afx - fxx}{bd}$$

cujus valoris quadratum æquatur primo, id eſt

$$\frac{aaffxx - 2affx^3 + ffx^4}{b^2d^2}$$

$$= 2xx + aa - 2ax - \frac{2agx + 2gxx}{d}$$

igitur (ſublatis fractionibus atque ordinatis terminis)

$= b\sqrt{(aa - 2ax + 2xx,)}$ & partibus quadratis & ordinatis, $x^4 - 2ax^3 \begin{array}{l} +aa \\ -2bb \end{array} xx + 2abbx - aabb = 0$. Adde ad utramque partem $aabb + b^4$,

& fiet

$$x^4 - 2ax^3 \begin{array}{l} +aa \\ -2bb \end{array} xx + 2abbx + b^4 = aabb + b^4.$$

Et extracta utrobique radice $xx - ax - bb = - b\sqrt{(aa + bb)}$

& radice iterum extracta

$$x = \frac{1}{4} a \pm \sqrt{(\frac{1}{2} aa + bb - b\sqrt{(aa + bb)})} \ (z).$$

Con-

$$x^4 - 2ax^3 \begin{array}{l} -\frac{2b^2d^2}{ff} \\ -\frac{2b^2dg}{ff} \\ +a^2 \end{array} x^2 \begin{array}{l} +\frac{2abbdd}{ff} \\ +\frac{2abbdg}{ff} \end{array} x - \frac{aabbdd}{ff} = 0$$

adde hinc inde

$$\frac{aabbdd}{ff} + \frac{b^4d^4 + 2b^4d^3g + b^4ddgg}{f^4},$$

& invenies

$$x^4 - 2ax^3 \begin{array}{l} -\frac{2b^2d^2}{ff} \\ -\frac{2b^2dg}{ff} \\ +aa \end{array} xx \begin{array}{l} +\frac{2ab^2d^2}{ff} \\ +\frac{2ab^2dg}{f^2} \end{array} x \begin{array}{l} +\frac{b^4d^4}{f^4} \\ +\frac{2b^4d^3g}{f^4} \\ +\frac{b^4ddgg}{f4} \end{array} = \begin{array}{l} +\frac{b^4ddgg}{f^4} \\ +\frac{2b^4d^3g}{f^4} \\ +\frac{b^4d^4}{f^4} \\ +\frac{a^2b^2d^2}{ff} \end{array}$$

& extracta radice

$$xx - ax - \frac{b^2d^2 - b^2dg}{ff} = \pm \frac{bd}{ff} \text{ in}$$

$$\sqrt{(aaff + bbdd + 2bbdg + bbgg)}$$

aut, poſito $b = f$, vel ſi triangulum ſimile ipſi AEC, quod ſpecie datur, fiat ſuper datum perpendiculum b tamquam dato angulo oppoſitum,

$$xx - ax - d^2 - dg = \pm$$

$$\frac{d}{b}\sqrt{(aabb + bb\ (d + g)^2)}.$$

Sed $xx - ax - dd - dg$ eſt quantitas negativa; nam x eſt latus alterum; & a aggregatum amborum, quare a major eſt quam x, & ax quam xx, & fortius $ax + dd + dg$ ſuperat xx. Ergo radix negative ſumenda eſt; & tranſponendo fiet.

$$d\sqrt{(aa + (d + g)^2)} - d(d + g) = x(a - x).$$

C o n s t r u c t i o.

(z) Sume GI $= b$; ei ad perpendiculum erige IF $= g$; erit juncta FG $= d$. Produc IF quidem in K, ut FK æquet FG, & fit IK $= d + g$, atque IG in L, ut ſit IL $= a$; erit juncta KL $= \sqrt{(aa + (d + g)^2)}$. Nunc per F age ſuper LK ad rectos angulos FM. Triangula LKI, FKM habentia angulos ad M & I. rectos, & ad K communem, ſimilia erunt (Eucl. 4. VI.) Quare LK ($\sqrt{(aa + (d + g)^2)}$). KI ($d + g$) :: FK (d). KM, & KM . $\sqrt{(aa + (d + g)^2)} = d\ (d + g)$. Fiet igitur ultima æquatio, poſitis lineis pro ſymbolis, LK (FK — KM) $= ax - xx$. Produc igitur MK in N ut ſit MN $=$ FK, & fiet LK . KN $= ax - xx$. Per tria puncta N, I, L deſcri- Tab. D. Fig. 6.

be

Conſtructio Geometrica.

TAB. II. Fig. 3. Cape AB $= BC = \frac{1}{2}a$. Ad C erige perpendiculum CD $= b$. Produc DC ad E ut ſit DE = DA. Et inter CD & CE cape medium proportionale CF. Centroque F, radio BC deſcriptus circulus GH ſecet rectam BC in G & H, & erunt BG & BH latera duo trianguli.

Idem aliter.

TAB. II. Fig. 10. Sit AC + BC $= a$, AC — BC $= y$, AB $= x$, ac DC $= b$.

& erit

be circulum (EUCL. 4. IV.) & per K concentricum KPQ, rectæ LI concurrentem in P, & Q, erunt LQ; LP duo valores poſitivi incognitæ x (N°. 34. hujus).

DETERMINATIO.

Quoniam autem ad conſtructionem requiritur ut recta LI circulo KPQR occurrat, & ultima rectarum occurrentium eſt tangens, quæ a circulo concentrico biſecatur, patet triangulum iſoſceles eſſe ultimum poſſibilium in hypotheſi propoſita. Nunc dico quod

Rectangulum ſub PL, LQ *minus eſt quadrato ex dimidiata* IL.

Biſecetur IL in A; erit rectangulum ſub PL; LQ una cum quadrato AQ æquale quadrato ex AL (EUCL. 6. II.); atque ideo rectangulum ſub PL; QL minus quadrato ex AL.

Si ergo ab L ad circulum RQPK ducatur tangens LS, ea erit minor quam LA; & eſt media inter KL; LR (EUCL. 36. III. & 17. VI.)

Eſt autem KL . LR $= d\sqrt{(aa+(d+g)^2)} - dd - dg$, quod debet eſſe minus $\frac{aa}{4}$; ergo $d\sqrt{(aa+(d+g)^2)}$ minus $\frac{a^2}{4} + dd + dg$; & $aadd + d^4 + 2d^3g + ddgg$ minus $\frac{a^4}{16} + \frac{aadd + aadg}{2} + d^4 + 2d^3g + ddgg$; & $16aadd$ minus $a^4 + 8aadd + 8aadg$, vel $8dd$ minus $aa + 8dg$ aut $2dd - 2dg$ minus $\frac{aa}{4}$.

Igitur, propoſito problemate, deſcribe triangulum GIF ut ſupra, e GF abſcinde FT æqualem FI; quære mediam inter GT & bis GF; ſi hæc minor eſt quam LA, problema conſtrues ut ſupra; ſi æqualis, triangulum quæſitum eſt iſoſceles; ſi major, problema eſt impoſſibile.

OBSERVATIO.

Hæc ita ſe habent ubi datus angulus eſt acutus, neque aliter ubi eſt obtuſus, nam in nulla æquationum ſuprà inventarum habetur aliqua poteſtas impar ipſius f aut b, qui dati anguli ſinus eſt; ideo nullius termini ſignum mutari debet; & in ultima

$$d\sqrt{(aa+(d+g)^2)} - d(d+g) = x(a-x)$$

quantitas radicalis debet neceſſario eſſe poſitiva, quia $x(a-x)$ eſt quantitas poſitiva, ut vidimus; quare & ejus valor debet eſſe poſitivus: eſſet autem negativus, ſi quantitas radicalis eſſet negativa.

Sed, quando datus angulus rectus eſt, tunc GF cadit in GI, quapropter IF $= g = 0$; & FG = GI, aut $d = b$; atque ideo æquatio finalis fit $b\sqrt{(aa+bb)} - bb = x(a-x)$ ut Auctor invenit. Tunc etiam triangulum LKI figuræ 6. fit LIK figuræ 7. & LK $= \sqrt{(aa+bb)}$; tunc igitur ſufficit ſumere KO = KI, & LK biſecta in T, centro T radio TO deſcribere ſemicirculum occurrentem rectæ LI in P & Q. Nam circulus centro T radio TK deſcriptus tranſiret per I (EUCL. 3. III.) unde probaretur, ut N°. 34. hujus, LQ = PI &c. TAB. D. Fig. 7.

Sed, cum x indicare non poſſit niſi duo trianguli latera, jure quæri poteſt cur prodeat æquatio quatuor dimenſionum? Id accidit quia a poteſt exprimere tum laterum ſummam, ut hactenus ſuppoſuimus; tum eorum differentiam; ut patet ponendo AC latus majus $= x$, & BC latus minus $= x - a$; unde eadem prodibit æquatio. Nos eam determinavimus ut eſſet laterum ſumma, dum poſuimus a majorem quam x. Eſſet autem differentia ſi foret minor quam x; & tunc $xx - ax$ foret poſitiva, & radix poſitive ſumenda eſſet. Hinc melius quæſita eſſet baſis quæ quadruplicem valorem habere non poteſt; quod facit Newtonus in ſecunda ſolutione.

& erit

$$\frac{a+y}{2} = AC,\ \frac{a-y}{2} = BC,\ \frac{aa+yy}{2} = ACq + BCq = ABq = xx.$$

$$\frac{aa-yy}{4b} = \frac{AC \cdot BC}{DC} = AB = x. \quad \text{Ergo}$$

$2xx - aa = yy = aa - 4bx$, & $xx = aa - 2bx$, & extracta radice $x = -b + \surd(bb + aa)$. Unde in ſuperiori conſtructione eſt CE hypotenuſa trianguli quæſiti. Data autem baſi & perpendiculo tam in hoc quam in ſuperiore problemate, triangulum ſic expedite conſtruitur. Fac parallelogrammum CG cujus latus CE erit baſis trianguli, latus alterum CF perpendiculum. Et ſuper CE deſcribe ſemicirculum ſecantem latus oppoſitum FG in H. Age CH, EH, & erit CHE triangulum quæſitum. TAB. II. Fig. 4.

PROB. VII.

In triangulo rectangulo, datis ſumma laterum, & ſumma perpendiculi & baſis invenire triangulum.

XXXIV. Sit laterum AC & BC ſumma a, baſis AB & perpendiculi CD ſumma b, latus AC $= x$, baſis AB $= y$, & erit BC $=$ TAB. II. Fig. 10. $a - x$, CD $= b - y$, $aa - 2ax + 2xx = ACq + BCq = ABq = yy$, $ax - xx = AC \cdot CD = by - yy = by - aa + 2ax - 2xx$, & $by = aa - ax + xx$. Hujus quadratum $a^4 - 2a^3x + 3aaxx - 2ax^3 + x^4$, pone æquale yy in bb, hoc eſt æquale $aabb - 2abbx + 2bbxx$.

Et ordinata æquatione fiet

$$x^4 - 2ax^3 \begin{matrix} + 3aa \\ - 2bb \end{matrix} xx \begin{matrix} - 2a^3 \\ + 2abb \end{matrix} x \begin{matrix} + a^4 \\ - aabb \end{matrix} = 0.$$

Ad utramque partem æquationis adde $b^4 - aabb$, & fiet

$$x^4 - 2ax^3 \begin{matrix} + 3aa \\ - 2bb \end{matrix} xx \begin{matrix} - 2a^3 \\ + 2abb \end{matrix} x \begin{matrix} + a^4 \\ - 2aabb \\ + b^4 \end{matrix} = b^4 - aabb.$$

Et extracta utrobique radice

$$xx - ax + aa - bb = -b\surd(bb - aa.)$$

& radice iterum extracta

$$x = \frac{1}{2}a \pm \surd(bb - \frac{3}{4}aa - b\surd(bb - aa)) \quad (a)$$

(*a*) Si vero datus angulus rectus non eſſet, ſic problema ſolvi poteſt.

TAB. C. Fig. 2. Pone ſummam AC + BC $= 2a$; differentiam AC − BC $= 2y$; erit AC $= a + y$; CB $= a - y$. Pariter ſit AB + CD $= 2b$; AB − DC $= 2z$; erit AB $= b + z$; DC $= b - z$.

Con-

Item

Conſtructio Geometrica.

Cape R mediam proportionalem inter $b + a$ & $b - a$, & S mediam pro-

Item fac

$d. g :: AC\ (a+y).\ CE = \frac{ag+gy}{d}$.

&

$d. b. :: CA\ (a+y).\ AE = \frac{ab+by}{d}$.

His poſitis, quoniam eſt (Eucl. 13. II.)
$AB^2 = AC^2 + CB^2 - 2BC.CE$

erit

$$bb + 2bz + zz = 2aa + 2yy - \frac{2aag + 2gy^2}{d}$$

eſt autem quoque

CD . AB = CB . AE = bis triangulo ABC,
aut $bb - zz = \frac{a^2b - by^2}{d}$

ergo, addendo æqualia æqualibus,

$$2bb + 2bz = 2aa + 2yy - \frac{2aag + 2gyy + aab - byy}{d}$$

ergo, reducendo ad eundem denominatorem &c.

$$z = \frac{yy(2d + 2g - b) + aa}{2bd}$$
$$\frac{(2d - 2g + b) - 2bbd}{2bd}$$

& ex æquatione ſuperiore invenitur

$$zz = b\left(\frac{bd - aa + yy}{d}\right).$$

Ergo, ponendo $2d + 2g - b = m$; $2d - 2g + b = n$; erit, his valoribus ſubſtitutis, & tranſponendo

$$z = \frac{yym + aan - 2bbd}{2bd},$$

aut

$$\frac{2bdz - aan + 2bbd}{m} = yy$$

&

$$\frac{dzz - bbd + aab}{b} = yy \text{ quare}$$

$$\frac{dzz - bbd + aab}{b} = \frac{2bdz - aan + 2bbd}{m}$$

aut

$$zz = \frac{2bbdz - aabn + 2b^2d^2 + bbdm - aabm}{dm}$$

Constructio.

Cape $GI = b$; ei ad I erige perpendicularem $IF = g$: juncta FG erit $= d$. Eam pro- Tab. E. Fig. 1.
duc in K ut ſit $GK = 4GF = 4d$; qua biſecta in L, fac $LM = 2g - b$; quæ cadet inter L & G ſi b ſuperat $2g$; ſecus autem inter L & K. Eritque $GM = 2d + 2g - b = m$; & $KM = 2d - 2g + b = n$. Age nunc per M. perpendicularem $MO = GI = b$; & ſuper junctam GO ad rectos angulos educ OP; Quoniam eſt GM. MO :: OM. MP. (Eucl. 4. & 8. VI.) erit $MP = \frac{b^2}{m}$. Fiet ergo æquatio propoſita.

$$zz = 2MP.\ z + bb - \frac{aab}{dm}(m+n) + 2MP.d$$

Et autem $m + n = 4d$; quare terminus $-\frac{aab}{dm}(m+n) = -\frac{4aab}{m}$. Produc MO in Q ut ſit $MQ = 2a$. Junge GQ, & ei ad rectos angulos educ QR, erit $MR = \frac{4aa}{m}$, & æquatio propoſita evadet
$zz - 2MP.z = bb - b.MR + d.3MP.$
Unde eruitur $b.z :: z - 2MP.b - MR + 2MP.\frac{d}{b}$, ſi 2MP ſuperat MR, quod accidit ubi b ſuperat $2a$, vel MO ipſam MQ.

Si vero, ut in figura noſtra, MO ſuperatur ab MQ; æquationis ſigna mutanda ſunt, & fiet
$b.MR - d.2MP - bb = 2MP.z - zz.$

Tunc cape $PS = PM\frac{d}{b}$, eritque $SR = MR - 2MP.\frac{d}{b}$; & cetera fac ut in N°. 34. hujus.

Determinatio pro angulo recto.

Patet quod problema tunc ſit poſſibile, cum bb minor eſt quam $\frac{3}{4}aa + b\sqrt{(bb - aa)}$; ubi vero hæ duæ quantitates æquantur, triangulum petitum ſit iſoſceles. Æquantur autem ubi

proportionalem inter R & $b - R$, & T mediam proportionalem inter $\frac{1}{2}a + S$ & $\frac{1}{2}a - S$, & erunt $\frac{1}{2}a + T$ & $\frac{1}{2}a - T$, latera trianguli.(*b*)

PROB. VIII.

Trianguli cujuſcunque ABC, datis area, perimetro, & uno angulorum A, cetera determinare. Tab. II. Fig. 5.

XXXV. Esto perimeter $= a$, & area $= bb$, & ab ignotorum angulorum alterutro C ad latus oppoſitum AB demitte perpendiculum CD; (*c*) & propter angulum A datum, erit AC ad CD in data ratione, puta *d* ad *e*. Dic ergo AC $= x$ & erit CD $= \frac{ex}{d}$, per quam divide duplam aream, & prodibit $\frac{2bbd}{ex} = $ AB. Adde AD (nempe $\surd(ACq - CDq,)$ ſive $\frac{x}{d}\surd(dd - ee)$ (*d*) & emerget BD $= \frac{2bbd}{ex} + \frac{x}{d}\surd(dd - ee)$; cujus quadrato adde CD*q* & orietur $\frac{4b^4dd}{eexx} + xx + \frac{4bb}{e}\surd(dd - ee) = $ BC*q*. Adhæc a perimetro aufer AC & AB, & reſtabit $a - x - \frac{2bbd}{ex} = $ BC, cujus quadratum $aa - 2ax + xx - \frac{4abbd}{ex} + \frac{4bbd}{e} + \frac{4b^4dd}{eexx}$ pone æquale quadrato prius invento; &, neglectis æquipollentibus, erit $\frac{4bb}{e}$ $\surd(dd$

ubi $4bb - 3aa = 4b\surd(bb - aa)$; id eſt, quadrando, ubi $16b^4 - 24aabb + 9a^4 = 16b^4 - 16aabb$, vel cum $\frac{aa}{4} = \frac{2bb}{9}$: Igitur, propoſito problemate, quære mediam inter duos, & unum trientem baſeos & perpendiculi ſimul; & ſi hæc media major eſt quam dimidium datæ ſummæ laterum, problema eſt impoſſibile; ſi æqualis, biſeca ſummam laterum, triangulum erit iſoſceles; ſi minor, conſtrue ut ſupra.

(*b*) Tamen brevius ſic res expediri poterat

Tab. E. Fig. 2. Sit AB $= b$, deſcribe ſemicirculum ADB, cui ex B inſcribe BD $= a$, erit juncta AD $= \surd(bb - aa)$. Fiat AE $=$ AD, centro C, radio CE deſcribatur ſemicirculus EFGH, erunt BG, BF latera quæſita.

(*c*) Cum angulus BAC (quem hic ponimus obtuſum) detur ex hypotheſi, datur etiam angulus ei deinceps CAD, ſed & angulus ad D rectus datur; datur igitur etiam angulus ACD; ergo ſi in figura noſtra ſuper quavis recta data EF, fiat ad E quidem angulus FEG ipſi DAC æqualis, & ad F angulus rectus (quod fieri poteſt per primam *datorum* def.), & complectur triangulum EFG, erunt æquiangula triangula EFG, & ADC ſimilia (Eucl. 4. VI.), & ſpecie data (40. *dat.*); quin & latera ipſius EFG dantur; datur ergo ratio laterum ipſius ADC. Tab. E. Fig. 3.

(*d*) Dic enim EG $= d$, GF $= e$, & habebis EF $= \surd(dd - ee)$; ac AC ad CD ut EG ad GF.

$\sqrt{(dd - ee)} = aa - 2ax - \frac{4abbd}{ex} + \frac{4bbd}{e}$. Et hæc, aſſumendo $4af$ pro datis terminis $aa + \frac{4bbd}{e} - \frac{4bb}{e}\sqrt{(dd - ee)}$, & reducendo, evadit $xx = 2fx - \frac{2bbd}{e}$, ſive $x = f \pm \sqrt{(ff - \frac{2bbd}{e})}$.

Eadem æquatio prodiiſſet etiam quærendo crus AB; nam crura AB & AC ſimiliter ſe habent ad omnes conditiones problematis. Quare ſi AC ponatur $f - \sqrt{(ff - \frac{2bbd}{e})}$ erit AB $= f + \sqrt{(ff - \frac{2bbd}{e})}$, & viciſſim; atque horum ſumma $2f$ ſubducta de perimetro relinquit tertium latus BC $= a - 2f$. (*e*)

PROB.

Constructio.

(*e*) Hanc ſatis perplexam conſtructionem ſic perago.

Priorem æquationem $4\frac{bb}{e}\sqrt{(dd - ee)} = aa - 2ax - 4\frac{abbd}{ex} + 4\frac{bbd}{e}$, duco in ex, & habeo $4bbx\sqrt{(dd - ee)} = aaex - 2aexx - 4abbd + 4bbdx$; ut xx liberetur a multiplicantibus, omnia divido per $2ae$ inventurus $2\frac{bbx}{ae}\sqrt{(dd - ee)} = \frac{ax}{2} - 2\frac{bbd}{e} + 2\frac{bbdx}{ae} - xx$, & tranſponendo $\frac{2bbd}{e} = \frac{ax}{2} + 2\frac{bbdx}{ae} - 2\frac{bbx}{ae}\sqrt{(dd - ee)} - xx$, unde oritur hæc analogia $2\frac{bb}{e} . x :: \frac{a}{2} + 2\frac{bbd}{ae} - 2\frac{bb}{ae}\sqrt{(dd - ee)} - x . d$. Jam linea quæ per $\sqrt{(dd - ee)}$
Tab. E. Fig. 3. deſignatur, inventa eſt, ea enim eſt ipſa EF, ergo EF $= \sqrt{(dd - ee)}$ dico $= c$, & perplexa quantitas $2\frac{bbd}{ae} - 2\frac{bb}{ae}\sqrt{(dd - ee)}$, fit $\frac{2bbd - 2bbc}{ae}$, quæ rurſus reſolvitur in hanc analogiam $\frac{a}{2} . \frac{bb}{e} :: d - c$ ad quartam, quæ eſt ipſiſſima quantitas $\frac{2bbd - 2bbe}{ae}$, ut patet invicem ducendo media, & ea dividendo per extremum $\frac{a}{2}$. Igitur centro E radio EF, deſcribo arcum FH, occurrentem EG in H puncto; eſt GH $= d - c$. In GF, & in GH (productis ſi opus eſt) ſumo ex G, hinc inde GL $=$ GM $= b$, jungo FM, cui parallelam duco LN, tum eſt (Eucl. 4. VI.) FG (*c*). GM (*b*) :: LG (*b*). GN $= \frac{bb}{c}$, cui æqualem capio NP. Nunc ſit GK $= \frac{a}{2}$, jungatur HK, & tranſeat per puncta K, H, N, circulus ipſi GL occurrens in Q & erit KG ($\frac{a}{2}$). GH ($d - c$) :: GN ($\frac{bb}{c}$). GQ $= \frac{2bbd - 2bbc}{ae}$, eſt ergo KQ $= \frac{a}{2} + \frac{2bbd - 2bbc}{ae}$.

Cetera ut in N°. 34. hujus.

Determinatio.

Fit autem impoſſibile hoc problema, ubi $2\frac{bbd}{e}$ eſt major quam ff; & ſi $2\frac{bbd}{e} = ff$, triangulum petitum eſt iſoſceles.

Si angulus datus eſſet rectus, tunc d fieret $= e$, & $dd - ee = 0$; atque ideo ſuperior æquatio fieret $xx = \frac{ax}{2} + 2\frac{bbx}{a} - 2bb$.

Sin acutus, normalis cadet inter puncta A & B; quare BD tunc eſſet ($=$ BA $-$ AD) $= 2\frac{bbd}{ex} - \frac{x}{d}\sqrt{(dd - ee)}$, & in æquatione mutandum eſſet ſignum ipſius $4\frac{bb}{e}\sqrt{(dd - ee)}$.

Sed problema VIII. multo facilius ſolvitur *analyſi geometrica*. Data perimeter ſit AB; da- Tab. E. Fig. 4.
tus

Digitized by Google

PROB. IX.

Datis altitudine, baſi, & ſumma laterum invenire triangulum.

XXXVI. Sit altitudo CD $=$ a, baſis AB dimidium $=$ b, laterum ſemiſumma $=$ c, & ſemidifferentia $=$ z; eritque majus latus angulus C, & data area DEFG. Tab. II. Fig. 5. Puta factum, & triangulum AHI ſit quod petitur, & ejus angulus H æqualis dato C. Pone IK æqualem baſi AI; rectangulum ABK erit exceſſus quadrati ex lateribus AH; HI tanquam ex una recta, vel ex IB, ſupra quadratum ex AI vel ex IK (Eucl. 6. II.) Datur ergo ratio ABK rectanguli ad triangulum AHI (67. Dat.); id eſt ad quadratum DEFG datum per hyp. Ergo datur rectangulum ABK (2. Dat.). Sed datur AB; quare & BK, ad datam rectam AB applicando ſpatium æquale dato rectangulo ABK. Igitur datur KA (4. Dat.) & AI (5. Dat.).

Jam datur ratio rectanguli ſub AH; HI ad triangulum AHI; id eſt ad datum quadratum DEFG; quare datur rectangulum ſub AH; HI (2. Dat.). Sed datur ſumma AH; HI; æqualis IB; ergo, applicando ad datam IB ſpatium æquale dato rectangulo ſub AH; HI, & deficiens quadrato, dabitur BL, altitudo applicationis, & LI. (48. Dat.).

Componetur autem ſic. Ex anguli, qui dato deinceps eſt, cruribus abſcinde æquales partes MC; CN; junge NM; centro N intervallo NM deſcriptum concipe circulum ipſi MC productæ occurrens in O; & ex M in ſubjectam NC due perpendicularem MP. Dati quadrati DEFG age diagonalem DF; & pone ut PM ad MO ſic DF quadratum ad QR quadratum. Ad datam AB applica ſpatium æquale quadrato ex QR, & ſit BK altitudo applicationis. Biſeca AK in I, erit AI baſis trianguli quæſiti.

Iterum pone ut PM ad MC ſic DF quadratum ad ST quadratum, ad datam IB applica ſpatium æquale quadrato ex ST & deficiens quadrato, & ſit BL altitudo applicationis; erit BL latus unum, LI latus alterum quæſiti trianguli.

Sit illud AHI, & AH ſit æqalis IL; HI æqualis LB. Jam hujus trianguli perimeter æquat datam rectam AB. Produc AH in U ut HU æquet HI, & junge IU.

Ductam intellige NO. Triangula iſoſcelia NCM per conſtr.; & MNO, ob radios MN; NO æquales, communem habent angulum CMN, æqualem tum angulo MNC tum angulo MON: quare angulus ONM æqualis eſt angulo NCM: & eſt OM ad MN ut MN ad MC vel NC atque OM ad MC ut quadratum ex MN ad quadratum ex NC.

Jam eſt rectangulum ABK, vel æquale quadratum ex QR, ad rectangulum ſub AH; HI, vel ad æquale quadratum ex ST, ut quadratum ex IU ad quadratum ex UH (ex 67. Dat.); &, per conſt., eſt quadratum ex QR ad quadratum ex DF ut OM ad MP, & quadratum ex DF ad quadratum ST ut PM ad MC; ergo *ex æquo ordinate*, quadratum ex QR ad quadratum ex ST ut OM ad MC, ut quadratum ex NM ad quadratum ex NC, ut quadratum ex IU ad quadratum ex UH; quare & ipſæ rectæ NM; NC, IU; UH, proportionales ſunt; triangula iſoſcelia NCM; IHU ſimilia; angulus IHU æqualis angulo NCM, & reliquus IHA æqualis reliquo MCP. Quod erat unum.

Nunc ex A ductam puta in HI perpendicularem AX; triangula CMP : HAX ſimilia ſunt, & HA ad AX (vel rectangulum ſub HA; HI ad rectangulum ſub AX; HI, id eſt ad duplum rectangulum AHI) ut CM ad MP, ut quadratum ex ST ad quadratum ex DF per conſtr.; ſed, per conſtr., quadratum ex ST æquale eſt rectangulo ſub HA; HI; ergo duplum triangulum AHI æquale eſt quadrato ex DF; & triangulum illud quadrato ex DE. Quod erat alterum.

Determinatio pro baſi & pro lateribus deducitur ex 27. VI. Eucl.

45. Diximus ponendum ut recta ad rectam ita quadratum ad quadratum, quod fieri poteſt quærendo mediam proportionalem inter datas rectas, & deinde quartam proportionalem poſt primam datarum, mediam, & latus dati quadrati: vel etiam ſic.

Sint duæ datæ rectæ AB; BC; ex AC diametro deſcribe ſemicirculum, cui in D occurrat perpendicularis excitata a puncto B ſuper AC; junge AD; DC, erit angulus ADC rectus (31. III. Eucl.). Ex DA abſcinde DE Tab. II. Fig. 5.

æqua-

tus, puta BC, $= c + z$, & minus AC $= c - z$. Subduc CD*q* de BC*q* & AC*q*, & exibit hinc BD $= \sqrt{(cc + 2cz + zz - aa)}$, & inde AD $= \sqrt{(cc - 2cz + zz - aa)}$. Subduc etiam AB de BD & exibit iterum AD $= \sqrt{(cc + 2cz + zz - aa)} - 2b$. Quadratis jam valoribus AD & ordinatis terminis, orietur $bb + cz = b\sqrt{(cc + 2cz + zz - aa)}$. Rurſuſque quadrando & redigendo in ordinem obtinebitur $cczz - bbzz = bbcc - bbaa - b^4$. Et $z = bb\sqrt{(1 - \frac{aa}{cc - bb})}$. Unde dantur latera (*f*).

PROB. X.

Datis baſi AB, ſumma laterum AC + BC, & angulo verticali C, determinare latera.

Tab. 2. Fig. 6.

XXXVII. Sit baſis $= a$, ſemiſumma laterum $= b$, & ſemidifferentia $= x$, eritque majus latus BC $= b + x$ & minus AC $= b - x$. Ab alterutro ignotorum angulorum A ad latus oppoſitum BC demitte perpendiculum AD; & propter angulum C datum dabitur ratio AC ad CD puta d ad e, & proinde erit CD $= \frac{eb - ex}{d}$. Eſt etiam per 13. II. Elementorum $\frac{ACq - ABq + BCq}{2BC}$ hoc eſt $\frac{2bb + 2xx - aa}{2b + 2x}$ $=$ CD; ideoque habetur æquatio inter valores CD. Et hæc reducta fit $x = \sqrt{(\frac{daa + 2ebb - 2dbb}{2d + 2e})}$. Unde dantur latera. (*g*).

Si

æqualem lateri quadrati dati, per E age EF ipſi AC parallelam & perpendiculari BD occurrentem in G, erit ut AB ad BC ſic quadratum ex ED ad quadratum ex DF.

Eſt enim CA ad AD ut DA ad AB (cor. 8. VI. Eucl.) & rectangulum ſub CA; AB æquale quadrato ex AD (17. VI. Eucl.). Eodem pacto demonſtrabitur rectangulum ſub CA; CB æquale quadrato ex CD; ergo rectangulum ſub CA; AB; ad rectangulum ſub CA; CB, id eſt AB ad BC (1. VI. Eucl.), ut quadratum ex AD ad quadratum ex DC, ut quadratum ex EF ad quadratum ex DF.

Constructio.

(*f*) Æquatio $cczz - bbzz = bbcc - b^4 - aabb$ reſolvitur in hanc analogiam $cc - bb . cc - bb - aa :: bb . zz$, aut $\sqrt{(cc - bb)} . \sqrt{(cc - bb - aa)} :: b . z$. (Eucl. 21. VI.). Ipſas autem $\sqrt{(cc - bb)}$ & $\sqrt{(cc - bb - aa)}$ determinare docuimus (N°. 23. &c. hujus); quibus inventis z reperietur per (Eucl. 17. VI.)

Ceterum geometricam hujus analyſim videbis infra Prob. XXI.

Determinatio.

Fit autem impoſſibile problema cum cc ſuperatur ab $aa + bb$; & cum $aa + bb = cc$, tunc $z = 0$, & triangulum fit iſoſceles. Sed, quando $cc = aa + bb$, etiam $cc - bb = aa$, & $c + b . a :: a . c - b$. Quæratur ergo, problemate propoſito, media inter aggregatum ex laterum ſemiſumma, & dimidiata baſi, atque eorum differentiam. Si hæc æquat datum perpendiculum, ſumma laterum eſt biſecanda & triangulum iſoſceles conſtruendum, ſi major eſt, laterum differentia, ut ſupra, detegenda eſt, ſi minor, problema eſt impoſſibile.

(*g*) Hæc æquatio reſolvitur in analogiam $d + e . \frac{aad}{2bb} - d + e :: bb . xx$, & $\frac{aad}{2bb}$ dat $bb . aa ::$

$\frac{d}{2}$

Tab. E. Fig. 5. $\frac{d}{2}$ ad quartam $= \frac{aad}{2bb}$. Fac ergo ex AD $= b$, & DC $= a$ angulum rectum ADC, junge AC, ſuper quam ex D demitte normalem DB; tunc $AD^2 . DC^2$ :: AB . BC, ergo poſt AB, BC, & $\frac{d}{2}$ inveniatur quarta $= \frac{aad}{2bb}$, quam dic $= f$, & erit $d + e . e - d + f :: bb . xx$; Tab. E. Fig. 6. ſuper baſim MO $= 2e + f$, deſcribe ſemicirculum MKO, ſume MN $= d + e$, erit NO $= 2e + f - e - d = e - d + f$, quare junctarum MK, KO, quadrata erunt ut MN ad NO, ut bb ad xx, igitur ſupereſt ut facias, MK . KO :: b ad quartam $= x$.

Analysis Geometrica.

Quia ſumma laterum, & baſis dantur, earum ratio datur (1. *dat.*); ſed & angulus verticalis datur, ergo triangulum eſt datum ſpecie (45. *dat.*); & ob datam baſim, etiam magnitudine (52. *dat.*); quare ejus latera AC, & BC, data erunt (55. *dat.*).

Componetur autem ſic

Tab. E. Fig. 7. Sit FG data recta æqualis duobus lateribus trianguli quæſiti, ad alteram ejus extremitatem G fac angulum FGH æqualem dati dimidio, deinde centro F, & data baſi, tanquam radio deſcribe arcum circuli qui occurrat ipſi GH in duobus punctis H, *h*, fac in H, aut *h* angulum GHL, aut G*hl* æqualem dato FGH, occurratque recta HL, ſive *hl* ipſi FG in L, aut *l*; dico triangulum FHL, aut F*hl* ſatisfacere problemati. Nam quia triangulum HLG, eſt iſoſceles (Eucl. 6. I.) erit angulus FLH, duplex anguli FGH, (Eucl. 32. I.) aut dato æqualis, *quod erat unum.*

Item FL, LH ſimul æquales FG rectæ datæ, *quod erat alterum.*

Determinatio.

Quia vero ad compoſitionem requiritur, ut circulus, centro F, & data baſi tanquam radio deſcriptus, occurrat ipſi GH poſitione datæ, & quia ſi bis occurrat, duo ſunt triangula ſatisfacientia; ſi ſemel, unum; luſtrandum eſt utrum angulus verticalis in hoc ſecundo caſu, ſit omnium minimus, an maximus.

Ergo ex puncto G demittatur tangens GM ad arcum circuli H*h*, tunc unum erit triangulum FMN problemati ſatisfaciens; ſed angulus FGM eſt angulo FGH major, ergo & FNM eſt major ipſis FLH, aut F*lh*. Tunc vero triangulum, FMN, eſt iſoſceles; nam ob triangulum FMG rectangulum, anguli MFG, & FGM, aut NMG, æquantur angulo FMG (32. I.) quapropter reſiduus MFG æquat reſiduum FMN; quare determinaturus utrum poſſibile ſit problema, nec ne, biſeca rectam datam, & ex ea fac ſuper datam baſim triangulum iſoſceles, ſi trianguli hujus angulus verticalis datum æquat, jam problema ſolutum eſt; ſi dato major eſt, problema eſt poſſibile, & conſtrues ut ſupra; ſi vero minor; problema eſt impoſſib.le.

Alia Compoſitio.

Super data baſi AB deſcribatur ſegmentum circuli capax dimidii anguli dati; cui circulo ab altera baſeos extremitate A inſcribatur chorda AE par datorum laterum ſummæ, jungatur BE, & ſiat angulus EBC ipſi AEB æqualis; dico peractum, ut patet. Tab. E. Fig. 8.

Quia vero ad compoſitionem requiritur, ut data laterum ſumma dato circulo poſſit inſcribi, & hoc fieri nequit, ubi ea major eſt dati circuli diametro; ſi par, una inſcriptio fieri poteſt; ceteroquin, duæ: videndum eſt quid accidat cum data laterum ſumma datam diametrum æquat; ea ſit ergo AGF, rectus igitur eſt angulus B; & cum æquant anguli FAB, & AFB, vel (per conſtructionem) FBG, ſimul, æquales igitur ſunt anguli GAB, GBA; & eſt triangulum AGB iſoſceles, & G circuli centrum. Cum autem data ſumma (AE) diametro minor eſt, angulus ABE major eſt recto ABF; quare, demptis æqualibus, angulus CBA major eſt angulo (GBA vel) GAB, & fortius, angulo CAB; eſt ergo latus CA majus latere CB; & ideo, ſi recta AE biſecetur in H; punctum H cadere debet inter puncta A, & C; quapropter angulus AHB exterior, major eſt interiore ACB.

Sed ubi problema eſt impoſſibile, quia data recta AM diametro major eſt, ſtatim apparet quod angulus AFB dati dimidius, exterior, major eſt angulo interiore AMB; quare datus AGB major eſt duplo ipſius AMB, id eſt, ejus qui fieret ſupra datam baſim a recta AM biſecta; unde redit ſuperior determinatio.

Ceterum patet, quod ſumma laterum debet eſſe baſi major.

Si, reliquis ſtantibus, daretur laterum differentia, problema conſtrueretur ut hoc, niſi quod angulus AEB deberet eſſe major angulo EBA, quia laterum differentia minor eſt quam baſis; quare linea BC faciens angulum EBC æqualem ipſi AEB, caderet infra baſim, &c.

PROB.

Si anguli ad baſin quærerentur, concluſio foret concinnior; utpote ducatur EC datum angulum biſecans & baſi occurrens in E; & erit AB. AC + BC (:: AE. AC) :: ſinus anguli ACE. ſinum anguli AEC. Et ab angulo AEC ejuſque complemento BEC ſi ſubducatur dimidium anguli C relinquentur anguli ABC & BAC.

PROB. XI.

Datis trianguli lateribus invenire angulos. (b)

TAB. II. Fig. 7. XXXVIII. Dentur latera $AB = a$. $AC = b$. $BC = c$, quæratur angulus A. Demiſſo ad AB perpendiculo CD quod angulo iſti opponitur, erit imprimis

$$bb - cc = ACq - BCq = ADq - BDq \; (i) =$$
$$(AD + BD)\,(AD - BD) =$$
$$AB\,(2AD - AB)\; (k) = 2AD \,.\, a - aa.$$

Adeoque $\frac{1}{2}a + \frac{bb - cc}{2a} = AD$. (l) Unde prodit hocce *primum Theorema.*

I.

Ut AB, ad AC + BC, ita AC — BC, ad quartam proportionalem. N. $\frac{AB + N}{2} = AD$. Ut AC ad AD, ita radius ad coſinum anguli **A.**

Adhæc

$$DCq = ACq - ADq = \frac{2aabb + 2aacc + 2bbcc - a^4 - b^4 - c^4}{4aa} =$$
$$(a + b + c)\,(a + b - c)\,(a - b + c)\,(-a + b + c)$$

Un-

(b) *Hoc problema Geometram practicum ſpectat. Theoreticus enim illud jam ſolutum habet, ſiquidem, datis trianguli lateribus dantur anguli* (39. & def. 3. datorum). Sed *cum tabula tangentium, &c. tantum* dato ſinu *alicujus anguli indicent arcum, qui angulum illum metitur*, ſinus *vero cum ceteris trianguli lateribus efficiat triangulum rectangulum, & fieri poſſit ut aliquis, terra aut maris tractum dimetiens, cognoſcat tria latera trianguli obliquanguli; ideo clariſſimus Auctor docet qua ratione triangulum obliquangulum, cujus dantur latera, ad triangula rectangula revocemus. Hoc ipſum appellatur* triangulorum obliquangulorum reſolutio.

(i) Nam $AC^2 = CD^2 + DA^2$, & $BC^2 = BD^2 + DC^2$, ergo $AC^2 - CB^2 = DA^2 + CD^2 - BD^2 - DC^2 = DA^2 - BD^2$.

(k) Siquidem $AD + DB = AB$; Quod eſt unum.

Hinc fluit quod $AD = AB - BD$, & $AD - DB = AB - 2BD$, quæ quantitas (ubi 2BD ſuperat AB) eſt negativa & æqualis $2BD - AB$ nam earundem quantitatum ſemper eadem eſt differentia. Quod eſt alterum.

(l) Sed $AB = a$, ergo $bb - cc = a\,(2AD - a) = 2AD \,.\, a - aa$, & $aa + bb - cc = 2AD \,.\, a$, & $AD = \frac{a}{2} + \frac{bb - cc}{2a}$.

Vide problema II. hujus, ubi jam ſegmenta baſeos invenimus.

Unde multiplicatis numeratoris & denominatoris radicibus per b, conſlatur hocce *Theorema ſecundum*.

II.

Ut $2ab$ ad medium proportionale inter $(a+b+c)\ (a+b-c)$ & $(a-b+c)\ (-a+b+c)$ ita radius ad ſinum anguli A. (*m*)

Inſuper in AB Cape AE = AC, & age CE, & erit angulus ECD æqualis dimidio anguli. A (*n*)

Aufer AD de AE, & reſtabit DE =

$$b - \frac{1}{2}a - \frac{bb+cc}{2a} = \frac{cc-aa+2ab-bb}{2a} = \frac{(c+a-b)(c-a+b)}{2a}.$$

Unde

$$DEq = \frac{(c+a-b)\ (c+a-b)\ (c-a+b)\ (c-a+b).}{4aa}$$

Et hinc conſit *Theorema tertium quartumque, videlicet.*

III.

Ut $2ab$ ad $(c+a-b)\ (c-a+b)$ (ita AC ad DE) ita radius ad ſinum verſum anguli A. (*o*)

IV.

Et, ut medium proportionale inter $a+b+c$, & $a+b-c$ ad medium proportionale inter $c+a-b$, & $c-a+b$ (ita CD ad DE) ita radius ad tangentem dimidii anguli A, vel dimidii cotagens ad radium. (*p*) Præ-

(*m*) Quia DC $= \frac{\surd((a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c))}{2a}$, & R medium proportionale inter $(a+b+c)\ (a+b-c)$, & $(a-b+c)\ (-a+b+c)$ $= \surd((a+b+c)\ (a+b-c)\ (a-b+c)\ (-a+b+c))$, ergo DC $= \frac{R}{2a} = \frac{bR}{2ab}$; ſed (poſita AC = radio) DC eſt ſinus anguli A; ergo $2ab$. R :: b (radius). DC (ſinum).

(*n*) Ob angulos rectos ad D, anguli ACD; DAC ſimul æquant una angulos ECD & DEC, (vel, ob CA, AE æquales,) ECA, aut ECD, & DCA; quare, demptis æqualibus, angulus DAC æquat bis ipſum ECD.

(*o*) Nam DE $= \frac{(c+a-b)\ (c-a+b)}{2a} = \frac{(c+a-b)\ (c-a+b)\,b}{2ab}$; quapropter $2ab$. $(c+a-b)\ (c-a+b)$ :: b. DE.

(*p*) Etenim $DC^2 = \frac{(a+b+c)\ (a+b-c)}{4aa}$ $\frac{(a-a+c)\ (-a+b+c)}{4aa}$;

&

$DE^2 = \frac{(a-b+c)\ (a-b+c)}{4aa}$ $\frac{(-a+b+c)\ (-a+b+c)}{4aa}$,

ergo

$CD^2 . DE^2$ :: $\frac{(a+b+c)\ (a+b+c)}{4aa}$ (c—

Digitized by Google

Præterea eſt $CEq = CDq + DEq =$

$$\frac{2abb + bcc - baa - b^3}{a} = \frac{b}{a}(c + a - b)(c - a + b).$$

Unde *Theorema quintum & ſextum.*

V.

Ut medium proportionale inter $2a$ & $2b$ ad medium proportionale inter $c + a - b$, & $c - a + b$, vel ut 1 ad medium proportionale inter $\frac{c + a - b}{2a}$ & $\frac{c - a + b}{2b}$, (*q*) (ita AC ad $\frac{1}{2}$CE, vel CE ad DE) (*r*) ita radius ad ſinum dimidii anguli A.

V I.

Et ut medium proportionale inter $2a$ & $2b$ ad medium proportionale inter $a + b + c$, & $a + b - c$ (ita CE ad CD) (*s*) ita radius ad coſinum dimidii anguli A.

Si præter angulos deſideretur etiam area trianguli, duc CDq in $\frac{1}{2}ABq$, & radix, *videlicet*

$\frac{1}{2}\surd$

$$\frac{(a - b + c)(-a + b + c)}{4aa} \text{ ad } \frac{(a - b + c)(a - b + c)(-a + b + c)}{4aa}$$

$$\frac{(-a + b + c)}{4aa} ::$$

(cunctis diviſis per $\frac{(a - b + c)(-a + b + c)}{4aa}$,)

$$(a + b + c)(a + b - c) . (a - b + c)(-a + b + c);$$

igitur

$$CD . DE :: \surd((a + b + c)(a + b - c)) . \surd((a - b + c)(-a + b + c)).$$

(*q*) Eſt enim $AC^2 . CE^2 :: bb . \frac{b}{a}(c + a - b)(-a + b + c) ::$ (cunctis diviſis per $\frac{b}{a}$) $ab . (a - b + c)(-a + b + c)$, & $AC : CE :: \surd ab . \surd((a - b + c)(-a + b + c)) :: 2\surd ab . 2\surd((a - b + c)(-a + b + c))$, & *alternando*, $AC . 2\surd ab \; (\surd 4ab) :: CE . 2\surd((a - b + c))(-a + b + c) :: \frac{CE}{2} . \surd((a - b + c)(-a + b + c))$.

(*r*) Nam ob angulos, rectos, ad D, & EAC, CED æquales. $AC . \frac{CE}{2} :: CE . ED$.

(*s*) Siquidem $EC^2 . CD^2 :: \frac{b}{a}(c + a - b)(c - a + b) . \frac{(a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(b - a + c)}{4aa} ::$ (cunctis diviſis per $\frac{(c + a - b)(c - a + b)}{a}$) $b . \frac{(a + b + c)(a + b - c)}{4a} :: 4ab . (a + b + c)(a + b - c)$, & $EC . CD :: \surd 4ab . \surd((a + b + c)(a + b - c))$.

Digitized by Google

$\frac{1}{4}\sqrt{((a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c))}$, erit area illa quæſita.

PROB. XII.

Trianguli cujuſvis rectilinei datis lateribus & baſi, invenire ſegmenta baſis, perpendiculum, aream, & angulos. (t)

XXXIX. Trianguli ABC dentur latera AC, BC, & baſis AB. Biſeca AB in I & in ea utrinque producta cape AF & AE æquales AC, atque BG & BH æquales BC. Junge CE, CF; & a C ad baſem demitte perpendiculum CD. Et erit TAB. II. Fig. 8.

$$ACq - BCq = ADq + CDq - CDq - BDq =$$
$$ADq - BDq = (AD+BD)(AD-BD) = AB.2DI. \ (u)$$

Ergo

$$\frac{ACq - BCq}{2AB} = DI. \quad \text{Et } 2AB.AC+BC :: AC - BC.DI.$$

Quod eſt Theorema pro determinandis ſegmentis baſis. (x)

De IE, hoc eſt de $AC - \frac{1}{2}AB$ aufer DI, & reſtabit

$$DE = \frac{BCq - ACq + 2AC.AB - ABq}{2AB} \ (y)$$

hoc eſt

$$\frac{(BC+AC-AB)(BC-AC+AB)}{2AB}, \text{ ſive } = \frac{HE.EG}{2AB}. \ (z)$$

Aufer

(t) Segmenta baſis inventa ſunt Probl II. & XI. Perpendiculum Probl. XI. ante Theor. II. Area Probl. XI. poſt Theor. VI., & anguli per totum Probl. XI.: uno verbo hoc problema idem eſt ac ſuperius diverſimode ſolutum.

(u) Nam $AD = AI + ID = BI + ID = BD + ID + ID$, ergo $AD - DB = 2ID$. Hoc autem eſt theorema, quod Auctor noſter attulit Art. XIII., & quod nos ibi demonſtravimus.

(x) Idemque, ac I. ſuperioris problematis.

(y) Nam $DE = AC - \frac{1}{2}AB - (DI \text{ vel} -) \left(\frac{AC^2 - BC^2}{2AB}\right)$, omneſque terminos ad eundem denominatorem reducendo,

$$DE = \frac{AC.2AB - \frac{1}{2}AB.2AB - AC^2 + BC^2}{2AB}$$

$= BC^2$. &c.

Idem repertum fuit Probl. XI. ante Theor. III.

(z) Nam $BC + CA = BH + AE = BE + EH + AH + HE$;

ſed

$BE + EH + HA = BA$;

ergo $BC + CA = BA + HE$;

&

$BC + CA - AB = HE$.

 Rur-

Aufer DE de FE ſive 2AC, & reſtabit

$$FD = \frac{CAq + 2AC.AB + ABq - BCq}{2AB},$$

hoc eſt

$$\frac{(AC + AB + BC)\ (AC + AB - BC)}{2AB}, \text{ ſive } = \frac{FG.FH}{2AB}.$$

Et, cum ſit CD medium proportionale inter DE ac DF, CE medium proportionale inter DE & EF, ac CF medium proportionale inter DF & EF: (*a*) erit

$$CD = \surd(\frac{FG.EH.HE.FG}{2AB}),\ (b)\ CE = \surd(\frac{AC.HE.EG}{AB}),\ (c)$$

&

$$CF = \surd(\frac{AC.FG.FH}{AB})$$

Duc CD in $\frac{1}{2}$ AB & habebitur area $= \frac{1}{4}\surd(FG.FH.HE.EG)$. (*d*) Pro angulo vero A determinando prodeunt Theoremata multiplicia, *videlicet*.

1. 2AB.AC : HE.EG (:: AC. DE) :: radius ad ſinum verſum anguli A.
2. 2AB . AC ad FG. FH (:: AC ad FD) :: radius ad coſinum verſum A.
3. 2AB . AC ad $\surd$(FG . FH . HE . EG) (:: AC ad CD) :: radius ad ſinum A.
4. $\surd$(FG . FH.) ad $\surd$(HE . EG) (:: CF ad CE) :: radius ad tangentem $\frac{1}{2}$ A.
5. $\surd$(HE . EG) ad $\surd$(FG . FH) (:: CE ad FC) :: radius ad cotangentem $\frac{1}{2}$ A.

6.

Rurſus

BC—CA = BG—AE, & AB = AE + EB;

ergo

BC — CA + AB = BG — AE + AE + EB = EG.

(*a*) Ob æquales rectas EA; AC; AF; ſemicirculus centro A radio AF deſcriptus tranſibit per C, & E; unde angulus FCE rectus eſt (Eucl. 31. III.)

(*b*) Jam idem invenimus Probl. XI. ante Theor. III.

(*c*) Ut Probl. XI. ante Theor. V.

(*d*) Eodem prorſus pacto Probl. XI. poſt Theor. VI.

Ceterum ſequentia Theoremata coincidunt.

hujus { I. cum III.; III. II.; IV. & V. IV.; VI. V.; VII. VI. } Probl. XI.

Digitized by Google

6. $2\sqrt{(AB.AC)}$ ad $\sqrt{(FG.FH)}$ (:: FE ad FC) :: radius ad ſinum $\frac{1}{2}$ A.

7. $2\sqrt{(AB.AC)}$ ad $\sqrt{(FG.FH)}$ (:: FE ad FC) :: radius ad coſinum $\frac{1}{2}$ A.

PROB. XIII.

Datum angulum CBD recta data CD ſubtendere; ita ut ſi a termino iſtius rectæ D ad punctum A in recta CB producta datum agatur AD, fuerit angulus ADC æqualis angulo ABD. (*e*)

XL. Dicatur $CD = a$, $AB = b$, $BD = x$, & erit BD. BA :: (*f*) CD . DA $= \frac{ab}{x}$. Tab. II. Fig. 9.

Demitte perpendiculum DE, erit

$$BE = \frac{BDq - ADq + BAq}{2BA} \ (g) = \frac{xx - \frac{aabb}{xx} + bb}{2b}$$

Ob datum angulum DBA pone BD . BE :: $b . e$, & habebitur iterum $BE = \frac{ex}{b}$, ergo $xx - \frac{aabb}{xx} + bb = 2ex$. Et $x^4 - 2ex^3 + bbxx - aabb = 0$. (*h*)

PROB.

(*e*) Hoc problema tres habet caſus, aut enim angulus CBD eſt rectus, aut acutus, aut obtuſus. Cum vero ex unius caſus ſolutione facile deducantur alii, animadverto, quod ſi angulus CBD eſſet obtuſus, normalis DE demiſſa ex D caderet extra angulum, ſi acutus, intra, quare, ſi primo caſu valor ipſius BE poſitivus fuiſſet aſſumptus, in ſecundo negativus eſſet; & vice verſa. Si vero angulus CBD poſitus eſſet rectus, valor BE nullus eſſet; quia DE caderet ſuper ipſam DB; ſed poſito aliquo valore ipſius DE facile regredi poſſumus ad caſum, in quo ea nihilo æqualis eſt; at ea poſita nihilo æqualis nullo modo præbet valorem ejuſdem, ubi ſit quanta; præſtat ergo fingere angulum CBD obtuſum, aut acutum. Sit obtuſus.

(*f*) Quia, ſcilicet, triangula BAD, DAC habent angulum communem ad A, & angulos DBA, ADC æquales, ex problematis lege.

(*g*) Nam, ex hypotheſi, angulus CBD eſt obtuſus; igitur AE = EB — BA, & $AE^2 = EB^2 - 2AB.BE + BA^2 = AD^2 - DE^2$, ob triangulum rectangulum DAE; ſed triangulum rectangulum DBE dat $DE^2 = DB^2 - BE^2$, ergo $EB^2 - 2AB.BE + BA^2 = AD^2 - DB^2 + BE^2$, & deletis delendis, ac transponendo BE = &c.

(*h*) Si vero eſſet rectus, patet quod punctum E caderet in B, &

$$BE = 0 = \frac{xx - \frac{aabb}{xx} + bb}{2b}$$

$$= \frac{x^4 - aabb + bbxx}{2b},$$

quam ob rem

$$x^4 = -bbxx + aabb,$$

$$\& \ xx = -\frac{bb}{2} \pm \sqrt{(\frac{b^4}{4} + aabb)}:$$

unde

$$\sqrt{(\frac{bb}{4} + aa)} - \frac{b}{2}.x :: x.b.$$

Quod etiam ſic inveniri poterat.

Jam

PROB. XIV.

Invenire triangulum ABC, cujus tria latera AB, AC, BC, & perpendiculum DC, ſunt in arithmetica progreſſione.

TAB. II. Fig. 10. XLI. Dic $AC = a$, $BC = x$; & erunt $DC = 2x - a$, & $AB = 2a - x$. (*i*) Erunt etiam $AD \; (= \sqrt{(ABq - DCq)}) = \sqrt{(4ax - 4xx)}$

&

$$BD \; (= \sqrt{(BCq - DCq)}) = \sqrt{(4ax - 3xx - aa)}.$$

Atque adeo rurſus

$$AB = \sqrt{(4ax - 4xx)} + \sqrt{(4ax - 3xx - aa)}.$$

Quare

$$2a - x = \sqrt{(4ax - 4xx)} + \sqrt{(4ax - 3xx - aa)},$$

ſive

$$2a - x - \sqrt{(4ax - 4xx)} = \sqrt{(4ax - 3xx - aa)}.$$

Et partibus quadratis

4aa

Jam $DA = \frac{ab}{x}$, ſed AB (b). BD (x) :: BD (x). $BC = \frac{xx}{b}$; atque ideo $CA = \frac{xx + bb}{b}$, & $CA^2 = \frac{x^4 + 2bbxx + b^4}{bb} = CD^2 + DA^2 = aa + \frac{aabb}{xx}$, & ſublatis fractionibus, $x^6 + 2bbx^4 + b^4xx = aabbxx + aab^4$, & cunctis diviſis per $xx + bb$, $x^4 + bbxx = aabb$.

CONSTRUCTIO.

TAB. F. Fig. 1. Quæſita vero ſic facile determinatur. Sit $AB = a$, BC ipſi normalis $= \frac{b}{2}$, & erit $AC = \sqrt{(\frac{bb}{4} + aa)}$. Sumatur $EC = CF = CB$, & diametro AF deſcribatur ſemicirculus AGF, ex E elevetur normalis EG, erit hæc quantitas quæſita, ut patet. Jungantur nunc AG, GF, erit triangulum AGF rectangulum, &

angulus ad G æqualis angulo dato ad E, dico rectam AG æquare datam AB.

Nam FA ad AG eſt ut GA ad AE (EUCL. 8. VI.). Quadratum igitur ex AG æquatur rectangulo FAE (EUCL. 16. VI.) id eſt quadrato ex AB (EUCL. 36. III.) igitur AG æqualis eſt AB rectæ datæ.

Si vero angulus datus eſſet acutus, tunc $AE = EB + BA$, $AE^2 = EB^2 + 2EB.BA + BA^2 = DA^2 - DE^2$, & $DE^2 = DB^2 - BE^2$; quare $EB^2 + 2EB.BA + BA^2 = DA^2 - DB^2 + BE^2$, & $2EB.BA = DA^2 - DB^2 - BA^8$, ac $EB = \frac{DA^2 - DB^2 - BA^2}{2AB} = \frac{aakb}{xx} - \frac{xx - bb}{2b}$.

Reliqua vero ut ſupra.

(*i*) Sit AB terminus maximus, & primus; AC ſecundus, tertius BC; quartus vero DC; tunc ſi AC (a) eſt arithmetice ad CB (x), ut BC (x) ad CD, erit $CD = 2x - a$, & ſi BC (x) eſt arithmetice ad AC (a), ut AC (a) AB, erit $AB = 2a - x$.

$$4aa - 3xx - (4a + 2x)\surd(4ax - 4xx) = 4ax - 3xx - aa,$$

ſive

$$5aa - 4ax = (4a + 2x)\surd(4ax - 4xx)$$

Et partibus iterum quadratis ac terminis rite diſpoſitis

$$16x^4 - 80ax^3 + 144aaxx - 104a^3x + 25a^4 = 0$$

Hanc æquationem divide per $2x - a$, & orietur

$$8x^3 - 36axx + 54aax - 25a^3 = 0,$$

æquatio cujus reſolutione dabitur x ex aſſumpto utcunque a. Habitis a & x conſtitue triangulum cujus latera erunt $2a - x$, a, & x; & perpendiculum in latus $2a - x$ demiſſum erit $2x - a$.

Si poſuiſſem differentiam laterum trianguli eſſe d, & perpendiculum eſſe x; opus evaſiſſet aliquanto concinnius, prodeunte tandem æquatione $x^3 = 24ddx + 48d^3$. (k)

PROB. XV.

Invenire triangulum ABC cujus tria latera AB, AC, BC, & perpendiculum CD, ſunt in geometrica progreſſione. Tab. II. Fig. 10.

XLII. Dic AC $= x$, & BC $= a$; & erit AB $= \frac{xx}{a}$. Et CD $= \frac{aa}{x}$. Eſt &

$$AD\ (= \surd(ACq - CDq)) = \surd(xx - \frac{a^4}{xx})$$

&

$$BD\ (= \surd(BCq - DCq)) = \surd(aa - \frac{a^4}{xx})$$

adeoque

$$\frac{xx}{a}\ (= AB) = \surd(xx - \frac{a^4}{xx}) + \surd(aa - \frac{a^4}{xx}),$$

ſive

(k) En calculum. Cum CD primus progreſſionis arithmeticæ terminus ſit $= x$; terminorum autem differentia d; erit BC $= x + d$, CA $= x + 2d$; AB $= x + 3d$; ſed propter angulum ADC rectum; AD $= \surd(AC^2 - CD^2) = \surd(4dx + 4dd)$, & BD $= \surd(BC^2 - DC^2) = \surd(2dx + dd)$,

ergo AD + DB, ſive tota AB, vel

$x + 3d = \surd(4dx + 4dd) + \surd(2dx + dd)$; nempe $x + 3d - \surd(4dx + 4dd) = \surd(2dx + dd)$, & partibus quadratis, æquatione ad ſimpliciores terminos reducta, $2dx + dd$, ac $-(2x - 6d)\surd(4dx + 4dd)$ in contrarias reſpective partes translatis

$$xx + 8dx + 12dd = (2x + 6d)\surd(4dx + 4dd)$$

& rurſum quadratis partibus

$$x^4 + 16dx^3 + 88ddx + 192d^3x + 144d^4 = 240d^3x + 112ddxx + 16dx^3 + 144d^4,$$

cunctiſque terminis primi membri præter x^4 in ſecundum conjectis, & deletis delendis $x^4 = 24ddxx + 48d^3x$, & tota æquatione per x diviſa $x^3 = 24ddx + 48d^3$.

Conſtructio problematum, quorum æquationes ſecundum gradum ſuperant, invenietur ad hujus operis finem.

ſive

$$\frac{xx}{a} - \sqrt{\left(aa - \frac{a^4}{xx}\right)} = \sqrt{\left(xx - \frac{a^4}{xx}\right)}.$$

Et partibus æquationis quadratis,

$$\frac{x^4}{aa} - \frac{2xx}{a}\sqrt{\left(aa - \frac{a^4}{xx}\right)} + aa - \frac{a^4}{xx} = xx - \frac{a^4}{xx},$$

hoc eſt

$$x^4 - aaxx + a^4 = 2aax\sqrt{(xx - aa)}. \ (l)$$

Et partibus iterum quadratis

$$x^8 - 2aax^6 + 3a^4x^4 - 2a^6xx + a^8 = 4a^4x^4 - 4a^6xx.$$

Hoc eſt

$$x^8 - 2aax^6 - a^4x^4 + 2a^6xx + a^8 = 0.$$

Divide hanc æquationem per $x^4 - aaxx - a^4$, & orietur $x^4 - aaxx - a^4$. Quare eſt $x^4 = aaxx + a^4$. Et extracta radice $xx = \frac{1}{2}aa + \sqrt{\frac{5}{4}a^4}$, ſive $x = a\sqrt{\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}}\right)}$ (m). Cape ergo a, ſive BC, cujuſvis longitudinis, & fac BC.AC :: AC.AB :: 1. $\sqrt{\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}}\right)}$; trianguli ABC ex his lateribus conſtituti perpendiculum DC erit ad latus BC in eadem ratione. (n)

Idem

(l) Nam $\frac{x^4}{aa} - \frac{2xx}{a}\sqrt{\left(aa - \frac{a^4}{xx}\right)} + aa - \frac{a^4}{xx} = xx - \frac{a^4}{xx}$, deleto hinc inde $\frac{a^4}{xx}$, & partibus per aa multiplicatis dat $x^4 - 2axx\sqrt{\left(aa - \frac{a^4}{xx}\right)} + a^4 = aaxx$, & $aaxx$, ac $2axx\sqrt{\left(aa - \frac{a^4}{xx}\right)}$ in contrariam reſpective partem translatis fit $x^4 - aaxx + a^4 = 2axx\sqrt{\left(aa - \frac{a^4}{xx}\right)}$. Si vero xx ſub ſigno ponatur, habebimus $2a\sqrt{(aax^4 - a^4xx)}$, & quantitas radicalis diviſa par $aaxx$ dat $xx - aa$, unde (diviſoris $aaxx$ radice extracta, & ante ſignum poſita, & multiplicata cum $2a$ quæ jam erat extra ſignum, quotiente vero $xx - aa$ ſub ſigno poſito) educitur $2aax\sqrt{(xx - aa)}$.

(m) Jam enim $xx = \frac{aa}{2} + \sqrt{5\frac{a^4}{4}}$; ſed quantitas hæc ſub ſigno (per a^4 dividendo & diviſoris radicem extra ſignum ponendo) $= aa\sqrt{\frac{5}{4}}$, ergo $xx = \frac{aa}{2} + aa\sqrt{\frac{5}{4}}$, ſcilicet $x = \sqrt{\left(\frac{aa}{2} + aa\sqrt{\frac{5}{4}}\right)}$, & denuo quantitatibus ſub ſigno per aa diviſis, & diviſoris hujus radice extra ſignum poſita $x = a\sqrt{\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}}\right)}$

(n) Aut ſic, ſit AB $= a$, BC ei normalis $= \frac{a}{2}$, erit AC $= \sqrt{\left(aa + \frac{aa}{4}\right)} = \sqrt{5\frac{aa}{4}}$, in qua utrinque producta ſumatur DA $=$ AB, EC $=$ CB, diametro DE deſcribatur ſemicirculus DGE, & in A elevetur normalis AG, ea erit x quæſita. TAB. F. Fig. 2.

Nam EA $\left(\frac{a}{2} + \sqrt{5\frac{aa}{4}}\right)$. AG :: GA. AD (a) & $\frac{aa}{2} + a\sqrt{5\frac{aa}{4}} = AG^2 = xx$.

Sunt ergo DA, AG, AE tria latera trianguli.

Idem aliter.

Cum ſit AB . AC :: BC . DC dico angulum ACB rectum eſſe. Nam, ſi negas, age CE conſtituentem angulum ECB rectum. Sunt ergo triangula BCE, DBC ſimilia per 8. VI. Elem., adeoque EB . EC :: BC . DC, hoc eſt EB . EC :: AB . AC. Age AF perpendicularem CE & propter parallelas AF, BC, erit EB . EC :: AE . FE :: AB . FC. (o) Ergo per 9 V. Elem eſt AC = FC, hoc eſt hypothenuſa trianguli rectanguli æqualis lateri contra 19. I. Elem. Non eſt ergo angulus ECB rectus, & proinde ipſum ACB rectum eſſe oportet. (p) Eſt itaque $ACq + BCq = ABq$. Sed eſt $ACq = AB . BC$, ergo $AB . BC + BCq = ABq$, & extracta radice $AB = \frac{1}{2}BC + \sqrt{\frac{5}{4}BCq}$. Quamobrem cape BC . AB :: 1. $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, & AC mediam proportionalem inter BC & AB, & triangulo ex his lateribus conſtituto, erunt AB . AC . BC . DC continue proportionales. Tab. II. Fig. 11.

PROB. XVI.

Super data baſi AB triangulum ABC conſtituere, cujus vertex C erit ad rectam EC poſitione datam; baſis autem medium exiſtet arithmeticum inter latera.

XLIII. Baſis AB biſecetur in F, & producatur donec rectæ EC poſitione datæ occurrat in E, & ad ipſam demittatur perpendicularis CD; dictiſque $AB = a$, $FE = b$, & $BC - AB = x$, erit $BC = a + x$, $AC = a - x$. Et per 13. II. Elem. Tab. II. Fig. 12.

$$BD \left(= \frac{BCq - ACq + ABq}{2AB}\right) = 2x + \frac{1}{2}a.$$

Adeo-

(o) Nam per (Eucl. 12. V.) EB . EC :: BE + EA . CE + EF, id eſt :: BA . CF :: BA . AC per ſuperius oſtenſa.

(p) Quod etiam ſic, & fortaſſe brevius demonſtrari poteſt.

Tab. F. Fig. 3. Quia BA eſt ad AC, ut BC ad CD ex lege problematis, erit rectangulum ACB æquale rectangulo ex BA, in DC, id eſt duplæ areæ trianguli, quod ſi AC non eſt normalis, ſit AG, ergo dupla trianguli area æquatur rectangulo ex CB in AG, id eſt, ACB, ergo AC hypothenuſa erit æqualis lateri AG, quod eſt abſurdum.

His poſitis facillime nullo calculo problema ſolvitur.

Nam eſt ex lege problematis BA ad AC, ut AC eſt ad CB, & BA ad AC ut CA ad AD (Eucl. cor. 8. VI.), ergo AD æquat CB (Eucl. 9. V.); rurſus AB ad BC ut CB ad BD, ergo AB ad AD, ut AD ad DB. Quare, cum hic nihil detur, ſed tantum petatur continua laterum proportio; ſume AB ad libitum, eam ſeca in mediam & extremam rationem in D, ubi erige normalem indefinitam DC, deſcribe ſemicirculum ACB, junge AC, CB erit ABC triangulum quæſitum.

Jam autem eſt rectangulum, & per constructionem AB ad AD ut AD ad DB. Sed AB ad BC ut CB ad DB (Eucl. cor. 8. VI.); ergo BC æquat AD. Rurſus BA ad AC ut CA ad AD, (Eucl. cor. 8. VI.) vel ad æqualem CB; & ob ſimilia triangula CAD, BCD eſt CA ad AD vel ad æqualem BC, ut BC ad CD; ergo BA ad AC, ut AC ad CB ut BC ad CD.

Adeoque FD $= 2x$, (*q*) DE $= b + 2x$, & CD ($= \surd(CBq - BDq)$) $= \surd(\frac{3}{4}aa - 3xx)$. Sed propter datas poſitiones rectarum CE & AB, datur angulus CED; adeoque & ratio DE ad CD; quæ ſi ponatur d ad e dabit analogiam $d.e :: b + 2x . \surd(\frac{3}{4}aa - 3xx)$. Unde, multiplicatis extremis & mediis in ſe, oritur æquatio $eb + 2ex = d\surd(\frac{3}{4}aa - 3xx)$, cujus partibus quadratis & rite diſpoſitis, fit $xx = \frac{\frac{3}{4}ddaa - eebb - 4eebx}{4ee + 3dd}$

Et radice extracta $x = \frac{-2eeb + d\surd(3eeaa - 3eebb + \frac{9}{4}ddaa)}{4ee + 3dd}$.

Dato autem x, datur BC $= a + x$ & AC $= a - x$. (*r*)

PROB.

(*q*) Scilicet, quia BD (majus ſegmentum) æquat aggregatum ex ſummæ ac differentiæ dimidio; ponatur ergo differentiæ dimidium $= z$, & erit $\frac{1}{2}a + z = \frac{1}{2}a + 2x$; ac $z = 2x$. Sed BD $=$ BF $+$ FD & eſt BF $= \frac{1}{2}a$; ergo BD $= 2x$.

CONSTRUCTIO.

TAB. F. Fig. 4. (*r*) Si ponas $e = b$; æquatio Auctoris, tranſponendo $- 4eebx$, fiet

$$xx + \frac{4b^3x}{4bb + 3dd} = \frac{3aadd - 4b^4}{4(4bb + 3dd)}.$$

Quare, cape GI $= b$; ad I fac angulum rectum, & ad G angulum æqualem ipſi ECD

TAB. II. (*Fig.* 12.); erit IH $= d$. Nam ut CD ad DE, vel ut b ad d ita GI ad IH; & eſt GI $= b$; ergo IH $= d$. Quapropter GH$^2 = bb + dd$; aut 3GH$^2 = 3bb + 3dd$. Igitur ſuperior æquatio abit in

$$xx + \frac{4b^3x}{bb + 3GH^2} = \frac{3aadd - 4b^4}{4(bb + 3GH^2)}.$$

Super GH ad rectos angulos eleva HK ipſi GI productæ occurrentem in K; eritque GI, vel b . GK $=$ GH^2. Pariter cape IL $= a$, & age LM parallelam ipſi GH; quoniam eſt GI (b) . IL (a) :: HI (d) . IM, erit b . IM $= ad$, & bb . IM$^2 = aadd$, quæ poſita in præcedentem æquationem, & fractionibus reductis ad ſimpliciores terminos, illam mutant in

$$xx + \frac{4bbx}{b + 3KG} = \frac{b(3IM^2 - 4bb)}{4(b + 3GK)}.$$

Jam, per (EUCL. 11. VI.) quære tertiam N poſt $b +$ 3KG, & b; erit N $= \frac{bb}{b + 3GK}$; quare fiet æquatio conſtruenda

$$xx + 4Nx = \frac{3MI^2 . N}{4b} - bN.$$

Rurſus quære quartam poſt $4b$; MI; & 3MI per (EUCL. 17. VI.); quæ ſit O; denique habebis

$$xx + 4Nx = N(O - b)$$

quam facile conſtrues per Lemma (N°. 36. hujus).

Duas has ultimas proportionales in figura non determinavi, ne illa nimis ſe extenderet.

Digitized by Google

PROB. XVII.

Datis parallelogrammi cujuſcunque lateribus AB, BD, DC & AC, & una linea diagonali BC, invenire alteram diagonalem AD.

XLIV. Sit E concurſus diagonalium, & ad diagonalem BC demitte normalem AF (*s*), &, per 13. II. Elementorum, erit Tab. II. Fig. 13.

$$\frac{ACq - ABq + BCq}{2BC} = CF,$$

atque etiam

$$\frac{ACq - AEq + ECq}{2EC} = CF.$$

Quare cum ſit EC $= \frac{1}{2}$BC, (*t*) & AE $= \frac{1}{2}$AD, erit

$$\frac{ACq - ABq + BCq}{2CB} = \frac{ACq - \frac{1}{4}ADq + \frac{1}{4}BCq}{BC}$$

& facta reductione,

$$AD = \sqrt{(2ACq + 2ABq - BCq)}. \ (u)$$

Unde obiter in quolibet parallelogrammo, ſumma quadratorum laterum æquatur ſummæ quadratorum diagonalium. (*x*)

PBOB.

(*s*) Aut angulus ABC eſt acutus, aut obtuſus.

1° Sit acutus. Perpendicularis AF cadet intra triangulum, & locus erit ratiocinio Auris.

(*t*) 46. *In omni parallelogrammo* ABDC, *diagonales* AD, CB *ſe mutuo biſecant.*

Triangula CED, AEB, habentia angulos ad verticem CED, AEB, & alternos CDA, DAB, æquales, ſunt æquiangula. Sed & baſes CD, AB habent æquales; (Eucl. 34. I.) ergo ſunt æqualia, & æquantur latera CE; EB ac DE; EA (Eucl. 26. I.) Quare &c.

(*u*) Si vero angulus ACB eſſet obtuſus, perpendicularis AF caderet extra parallelogrammum, & per (Eucl. 12. II.) foret

$$\frac{BA^2 - AC^2 - BC^2}{2BC} = CF = \frac{AE^2 - FC^2 - CA^2}{2EC}$$

aut, ponendo $\frac{BC}{2}$ pro CE, & $\frac{AD}{2}$ pro AE;

$$\frac{BA^2 - AC^2 - BC^2}{2} = \frac{1}{4}AD^2 - \frac{1}{4}BC^2 - CA^2;$$

&, ſublatis fractionibus, deletis delendis, ac radice extracta

$$\sqrt{(2AB^2 + 2AC^2 - BC^2)} = AD.$$

(*x*) 47. *In parallelogrammo* ABDC, *ſumma quadratorum ex lateribus* AB, BD, DC, CA, *æquat ſummam quadratorum ex diagonalibus* AD, BC.

Ubi parallelogrammum eſt rectangulum, res nimis eſt facilis. Sit ergo obliquangulum.

Digitized by Google

PROB. XVIII.

Datis Trapezii ABCD angulis, perimetro, & area, determinare latera.

TAB. II. Fig. 14. XLV. Latera duo quælibet (y) AB ac DC produc donec concurrant in E, ſitque AB $= x$ & BC $= y$ & propter angulos omnes datos dantur rationes BC ad CE & BE; quas pone d ad e & f (z), & erit CE $= \frac{ey}{d}$, & BE $= \frac{fy}{d}$, adeoque AE $= x + \frac{fy}{d}$. Dantur etiam rationes AE ad AD ac DE; quas pone g & h ad d (a); & erit AD $= \frac{dx + fy}{g}$ & ED $= \frac{dx + fy}{h}$, adeoque CD $= \frac{dx + fy}{h} - \frac{ey}{d}$, & ſumma omnium laterum $x + y + \frac{dx + fy}{g} + \frac{dx + fy}{h} - \frac{ey}{d}$; quæ, cum detur, eſto a, & abbrevientur etiam termini ſcribendo $\frac{p}{r}$ pro dato $1 + \frac{d}{g} + \frac{d}{g}$, (b) & $\frac{q}{r}$ pro dato $1 + \frac{f}{g} + \frac{f}{h} - \frac{e}{d}$ (c), habebitur æqua-

TAB. F. Fig. 5. 6. 7. Anguli BAC, ACD ſimul æquant duos rectos (EUCL. 27. I.). Si ergo alter eſt acutus, alter erit obtuſus. Obtuſus ſit angulus ACD; quare perpendicularis ducta ex A in oppoſitam rectam DC cadet extra parallelogrammum, & erit quadratum DA par quadratis AC, CD una cum bis rectangulo DCH (EUCL. 12. II.).

Nunc ex C duc in ſubjectam AB, (ſi opus eſt, productam) perpendicularem CG. Erit quadratum BC una cum bis rectangulo BAG æquale quadratis CA, AB; (EUCL. 13. II. ſed æquales ſunt rectæ AB; CD; & AG, CH (EUCL. 34 I.), quare & rectangula BAG, DCH; igitur, addendo æqualia æqualibus, quadrata ex DA, BC una cum bis rectangulo BAG æquant quadrata BA, AC bis, una cum bis rectangulo DCH, quibus rectangulis hinc-inde demptis. &c.

(y) Non parallela.

TAB. F. Fig. 8. (z) Sume quamvis FG ſuper quam conſtrue triangulum FGH ſimile ipſi CEB, quod erit datam ſpecie, & magnitudine, ut jam probavimus, dic FH $= d$, FG $= e$, GH $= f$, & habebis CE $= \frac{ey}{d}$ &c.

(a) Fac angulum HFK æqualem angulo FGH, aut DEA, & angulum FHK parem ipſi EAD, eritque triangulum FHK ſimile EDA, & datum ſpecie, ac magnitudine &c. & dic FK $= g$, & KH $= h$.

(b) Quære quartam proportionalem poſt KH (h), HF (d) & FK (g) quam dic α & habebis $1 + \frac{d}{g} + \frac{d}{h} = \frac{gh + dh + dg}{gh}$ (reducendo ad eumdem denominatorem) quod eſſe debet $= \frac{p}{r}$: ergo $gh . gh + dh + dg :: r . p :: g . g + d + \frac{dg}{h} = g + d + \alpha$; dic ergo $g = r$, & erit aggregatum ipſarum $g + d + \alpha = p$.

(c) Reduc ad eamdem denominationem

$$1 + \frac{f}{g} + \frac{f}{h} - \frac{e}{d},$$

erit $\frac{dgh + dfh + dfg - egh}{dgh} = \frac{q}{r}$; quare $r . q :: dgh . dgh + dfh + dfg - egh :: g . g + f + \frac{fg}{h} - \frac{eg}{d}$. Quære igitur quartas poſt h, f, g, & d, e, g, dic illam $= \beta$, hanc $= \gamma$; & erit $r . q :: g . g + f + \beta - \gamma$.

Digitized by Google

quatio $\frac{px + qy}{r} = a$.

Adhæc propter datos omnes angulos datur ratio BCq ad triangulum BCE (d), quam pone m ad n (e) & erit triangulum BCE $= \frac{n}{m} yy$ (f). Datur etiam ratio AEq ad triangulum ADE; quam pone m ad d (g); & erit triangulum ADE $= \frac{ddxx + 2dfxy + ffyy}{dm}$. Quare cum area AC, quæ eſt horum triangulorum differentia, detur, eſto bb & erit $\frac{ddxx + 2dfxy + ffyy - dnyy}{dm} = bb$. Atque ita habentur duæ æquationes ex quarum reductione omnia determinantur. Nempe ſuperior æquatio dat $\frac{ra - qy}{p} = x$; ſcribendo $\frac{ra - qy}{p}$ pro x in inferiori, provenit $\frac{drraa - 2dqray + dqqyy}{ppm} + \frac{2afry - 2fqyy}{pm} + \frac{ffyy - dnyy}{dm} = bb$ (h). Et abbreviatis terminis ſcribendo s pro dato $\frac{dqq}{pp} - \frac{2fq}{p} + \frac{ff}{d} - n$, & st pro dato $+ \frac{adqr}{pp} - \frac{afr}{p}$, ac stv pro dato $bbm - \frac{drraa}{pp}$, oritur $yy = 2ty + tv$ ſeu $y = t + \sqrt{(tt + tv)}$.

PROB.

(d) Jam enim triangulum GHF, ſpecie & magnitudine datum, ſimile eſt triangulo EBC, quare HF quadratum, eſt ad triangulum GHF, ut BC quadratum, eſt ad triangulum EBC (Eucl. 18. VI.); Atqui datur prima ratio (49. *dat.*) ergo &c.

(e) Hanc autem lineis exprimes ducendo ex G in HF normalem GL; eſt enim GHF triangulum æquale dimidiato rectangulo ex GL in FH; ergo quadratum ex FH, eſt ad (triangulum GFH id eſt) dimidium rectangulum ex GL in FH, ut FH ad dimidiam GL (Eucl. 1. VI.).

Dic igitur GL $= 2\lambda$, & eſſe debet $d . \lambda :: m . n$. quod facile reperies.

(f) Nobis autem eſt triangulum BCE $= \frac{\lambda yy}{d}$.

(g) Item ex H demitte in KF normalem HM, & invenies quadratum ex AE ad triangulum ADE, ut KF ad dimidiam HM; dic HM $= 2\kappa$, eritque juxta nos triangulum ADE $= \frac{\kappa xx}{d} + 2\frac{\kappa fxy}{dd} + \frac{\kappa ffyy}{d^3}$, & eorum differentia $= \frac{dd\kappa xx + 2\kappa dfxy + \kappa ffyy - dd\lambda yy}{d^3} = bb$.

Si vero vis invenire Auctoris expreſſionem, eſſe debet $m . d :: d . \kappa$; quare ex data κ, & d facile invenies tertiam, item $d . \lambda :: m . n$, & ex datis d, λ, m, dabitur n.

(h) Noſtra æquatio (ſubſtituendo pro x; $\frac{ra - qy}{p}$; & pro xx, $\frac{rraa - 2aqry + qqyy}{pp}$) fit $\frac{aarr\kappa - 2aqr\kappa y + qq\kappa yy}{dpp} + \frac{2af\kappa yr - 2fq\kappa yy}{dpp} + \frac{ff\kappa yy}{d^3} - \frac{\lambda yy}{d} = bb$.

PROB. XX.

A dato puncto C rectam lineam CF ducere quæ cum aliis duabus poſitione datis rectis AE & AF triangulum datæ magnitudinis AEF comprehendet.

XLVII. Age CD parallelam AE, & CB ac EG perdendiculares in AF, ſitque AD $= a$, CB $= b$, AF $= x$, & trianguli AEF area cc, & propter proportionales DF . AF (:: DC. AE) :: CB, EG, hoc eſt $a + x . x :: b . \frac{bx}{a + x}$, erit $\frac{bx}{a + x} =$ EG. Hanc duc in $\frac{1}{2}$AF, & emerget $\frac{bxx}{2a + 2x}$ quantitas areæ AEF quæ proinde æquatur cc. Atque adeo, æquatione ordinata, eſt $xx = \frac{2ccx + 2cca}{b}$ ſeu $x = \frac{cc + \sqrt{(c^4 + 2ccab}}{b}$. (*m*) TAB. III. Fig. 1.

Nihil ſecus recta per datum punctum ducitur quæ triangulum, (*n*) vel tra-

:Notabo tamen ponendum eſſe $x = -\frac{db + \sqrt{(bbdd + 4aapd)}}{2p}$ non $x = -\frac{db - \sqrt{(bbdd + 4aapd)}}{2p}$, quia perambulatorium debet piſcinam circumdare, non ab ea circumdari. Patet autem, quod, ſi in prima hypotheſi, x habeat valorem poſitivum, ut ſupponit problematis ſolutio, in ſecunda negativum debet habere, quia tendit ad contrarias partes. Præterea, in prima hypotheſi deambulatorii ambitus major eſt, quam in ſecunda, & ideo minor debet eſſe ipſius x longitudo quod mire congruit cum æquatione; nam in prima hypotheſi, quantitas $\frac{db}{2p}$, quæ eſt negativa, minuit quantitatem radicalem poſitivam; in ſecunda auget eandem negativam.

TAB. F. Fig. 9. (*m*) Ex A ducatur AH ipſi BC parallela & æqualis c, ſit AL $= \frac{BC}{2} = \frac{b}{2}$; junctæ LH ducatur normalis HM; erit $cc = \frac{b}{2}$. AM, quam pono $= f$; quare $2cc = bf$, & æquatio vertetur in hanc $xx - fx = af$.

TAB. III. Fig. 1. Ceterum ſi poſuiſſem GE $= x$, idem fuiſſet proceſſus; nam x . AF $= 2cc$, & AF $= 2\frac{cc}{x}$, unde DF $(a + 2\frac{cc}{x})$. FA $(2\frac{cc}{x})$ :: CB (b). GE (x), & $ax + 2cc = 2\frac{bcc}{x}$, vel $axx + 2ccx = 2bcc$, & $xx + \frac{2ccx = 2bcc.}{a}$

Si vero punctum datum C eſſet intra angulum EAF, tunc punctum D caderet inter A, & F puncta. Quare DF $= x - a$, unde $cc = \frac{bxx}{2x - 2a}$, & $\frac{2ccx - 2acc}{b} = xx$, quam æquationem facile conſtrues. TAB. F. Fig. 10.

Tandem ſi punctum C eſſet in ipſo crure AE, tunc EG data $= b$, & $\frac{bx}{2} = cc$, ac $2\frac{cc}{b} = x$. TAB. F. Fig. 11.

(*n*) Nam ſit datum triangulum AEF, & eſſe debeat data dati trianguli area ad aream quæſiti trianguli ut m ad n, ergo area quæſiti trianguli debebit æquare factum ex dato triangulo in $\frac{n}{m}$, quare area trianguli quæſiti dabitur, & problema recidet in præcedens. TAB. G. Fig. 1.

Notandum tamen fieri poſſe ut recta CG, efficiens cum datis EA, AF triangulum datæ magnitudinis, ſecet rectam AF productam in G, & tunc quidem eſſet triangulum LAG ad datum EAF in imperata ratione, ipſum autem triangulum EAF non ſecuiſſemus, ut jubebamur, ſiquidem trapezium AFHL non habet ad triangulum EAF rationem petitam; tunc quærenda eſt ratio ipſius EAF ad reſiduum EAF—LEH, ſic EAF . LAFH :: $m . n$, & *divid.* EAF—LAFH . EAF :: $m - n . m$, & quærenda recta efficiens cum datis AE, EF triangulum habens ad datum datam rationem $m - n . m$.

Digitized by Google

trapezium quodvis in data ratione ſecabit. (*o*)

PROB. XXI.

Punctum C in data recta linea DF determinare, a quo ad alia duo poſitione data puncta A & B ductæ rectæ AC & BC datam habeant differentiam. (*p*)

TAB. III. Fig. 2. XLVIII. A datis punctis ad datam rectam demitte perpendiculares AD & BF, & dic AD $= a$, BF $= b$, DF $= c$, DC $= x$, & erit AC $= \surd(aa + xx)$, FC $= x - c$, & BC $= \surd(bb + xx - 2cx + cc)$. Si jam data harum differentia d, exiſtente AC majori quam BC erit

$$\surd(aa + xx) - d = \surd(bb + xx - 2cx + cc).$$

& quadratis partibus

$$aa + xx + dd - 2d\surd(aa + xx) = bb + xx - 2cx + cc.$$

Fa-

TAB. G. Fig. 2. (*o*) Sit datum trapezium ABCD, & datum punctum E, per quod tranſiens recta ſecare debeat trapezium, ita, ut totum ſit ad partem ut recta RS ad ST. Duo quævis trapezii latera, quæ parallela non ſint, DA; CB, producantur, donec in H coeant, & recta EGF putetur ſecare trapezium in data ratione.

Quia datur trapezium ſpecie, & magnitudine, dantur anguli DAB, & CBA, ideoque etiam anguli HAB, ABH, BHA, & triangulum ABH ſpecie datur (40. *dat.*) ut & magnitudine ob datam rectam AB (52. *dat.*), datur ergo ratio trapezii ABCD ad triangulum ABH; At datur ratio trapezii ABCD ad trapezium ABFG, datur itaque ratio trianguli ABH ad trapezium ABFG (8. *dator.*), & ipſius AHB ad GFH. (3. *dator.*)

Ita autem componetur.

Sit datum triangulum AHB ad datum trapezium ABCD, ut recta VS ad SR; erit igitur triangulum DHC ad triangulum AHB, ut RV ad VS, & recta ducta per E ſecetur triangulum DHC, ita ut totum ſit ad triangulum GFH, ut RV ad VT. Dico trapezium ABCD eſſe ad trapezium ABFG in imperata ratione RS ad ST.

Eſt enim ex conſtructione triangulum GHF ad triangulum DHC ut TV ad VR; ſed DHC eſt ad AHB ut RV ad VS, ergo ex æquo GHF ad AHB ut TV ad VS; & *divid.* ABFG ad AHB, ut TS ad SV; atqui AHB ad ABCD, ut VS ad SR; igitur ex æquo ABFG, ad ABCD ut TS ad SR. &c. *Q. E. F.*

Quin & rectilineum quodcunque ABCEFGH dividi poteſt in data ratione, recta tranſeunte per datum punctum L per methodum ſuperiori ſimillimam. TAB. G. Fig. 3.

Secandum enim ſit datum rectilineum, ut totum ſit ad partem ut recta RS ad ST.

Per L ducatur quævis recta LMG a dato rectilineo abſcindens trapezium AHGM, & quia rectæ LG, AM, HG poſitione dantur, dantur puncta M, G, ac rectæ AM, MG & MH datæ ſunt magnitudine, dantur ideo magnitudine triangula MAH, HGM, ſive trapezium AHGM (39, 47, & 52. *dat*) datur ergo ratio ipſius AHGM ad totum ABCEFGH, ſit hæc ut VS ad SR; ſed totum ad partem debet eſſe ut RS ad ST, ergo AHGM debet eſſe ad partem quæſitam ut VS ad ST, & problema recidit in præcedens.

Quod ſi trianguli AGF pars GRT caderet extra rectilineum, notandum eſt quod dantur areæ AGF, ARTF, atque ideo reſidua GRT; dividendum ergo reſtat per punctum E in latere TH rectilineum TDCH, vel ARTHB in data ratione ſui ipſius ad triangulum GRT. TAB. G. Fig. 4.

(*p*) Forte ſcribendum in hujus Probl. XXI. enunciatione, *Punctum C in recta linea poſitione data DF determinare, a quo ad alia duo data puncta &c.*

Digitized by Google

Factaque reductione & abbreviandi cauſa pro datis

$aa + dd - bb - cc$ ſcripto $2ee$, emerget $ee + cx = d\sqrt{(aa + xx)}$.

Iterumque quadratis partibus $e^4 + 2ceex + ccxx = ddaa + ddxx$.

Et æquatione reducta $xx = \dfrac{2ceex + e^4 - aadd}{dd - cc}$, ſeu

$$x = \frac{eec + \sqrt{(e^4dd - aad^4 + aaddcc)}}{dd - cc}. \ (q)$$

Haud ſecus problema reſolvitur ſi linearum AC & BC ſumma, *(r)* vel quadratorum ſumma *(s)* aut differentia, *(t)* vel proportio, *(u)* vel rectangulum, *(x)* vel angulus ab ipſis comprehenſus, *(y)* detur; vel etiam ſi vice rectæ DC,

(*q*) Proponetur infra (Probl. XLV.) inveſtiganda ratio deſcribendi per duo data puncta circulum; qui circulum alium poſitione, & magnitudine datum contingat. Problema noſtrum cum illo idem eſſe dico.

Tab. G. Fig. 5. Sint enim data puncta A, B; recta, qua debent differre, M; & recta poſitione data ſit ND.

Puta factum & rectæ AC, CB ſint eæ quæ requiruntur.

Centro A radio AL æquali datæ M deſcribe circulum LPQ, qui datur magnitudine & poſitione (*def. 6. dat.*) Centro C radio CB deſcribe alterum circulum BEL qui priorem tanget in L, quia ex hypotheſi BC & CL æquantur. Ex B demitte in ſubjectam ND; normalem BD, quæ poſitione ac magnitudine quoque datur (30, 25, & 26. *dat.*) hanc produc donec circulo BLE occurrat in E, & erit ED æqualis ipſi DB ac data poſitione atque magnitudine, itaque datur punctum E. Reſtat igitur deſcribendus circulus per data duo puncta, B, E, qui circulum PLQ tangat, quod perficietur problemate XLV.

Tab. G. Fig. 6. Si vero juncta AB ipſi DC parallela eſſet, tunc data perpendicularis AD foret altitudo trianguli ACB, cujus datur baſis AB ob data puncta A, B; igitur ſi proponeretur *deſcribendum triangulum, datis ejus altitudine, baſi, & laterum differentia*, hoc problema (quod fere idem eſt, ac IX. hujus) eſſet caſus hujus problematis XXI.

(*r*) Hic etiam problematis caſus recidit in problema XLV.

Tab. G. Fig. 7. Sint enim rurſus data puncta A, & B ſumma rectarum quæſitarum data M.

Puta factum, & quæſitæ rectæ ſint AC, CB.

Ex alterutro ex datis punctis A, radio AL æquali datæ M deſcribe circulum PLQ qui poſitione, ac magnitudine datur. Centro autem C, radio CB deſcribe circulum BEL qui priorem contingat in L, ex B demitte in ſubjectam ND, normalem BD, quam produc donec occurrat circulo BEL in E, erit datum punctum E, quare deſcribendus eſt circulus per duo data puncta B, E qui alium poſitione, & magnitudine datum contingat.

Si juncta AB eſſet ipſi CD parallela, tunc data normalis BD eſſet altitudo trianguli ACB cujus datur baſis, igitur problema IX. hujus caſus eſt. Tab. G. Fig. 6.

(*s*) Si daretur quadratorum ſumma, (ceteris, ut ſupra, ſtantibus) ea ſit $= \alpha\alpha$; ac erit $2xx - 2cx = \alpha\alpha - aa - bb - cc$; fac $\alpha\alpha - aa - bb - cc = 2\beta\beta$, & habebis $xx - cx = \beta\beta$.

(*t*) Sit quadratorum differentia $= \alpha\alpha$; & ceteris, ut ſupra, ſtantibus, erit $2cx = \alpha\alpha - aa + bb + cc$, pone $\alpha\alpha - aa + bb + cc = 2ee$, & invenies $cx = ee$.

(*u*) Detur 1º. Rectarum AC, CB ratio, & ſit AC $(\sqrt{(aa + xx)})$. CB $(\sqrt{(bb + xx - 2cx + cc)})$ :: $g \,.\, h.$, igitur $h\sqrt{(aa + xx)} = g\sqrt{(bb + xx - 2cx + cc)}$, & quadrando $aahh + hhxx = hhgg + ggxx - 2cggx + ccgg$.

2º. Quadratorum ex AC, CB ratio, & ſit AC^2 $(aa + xx)$. CB^2 $(bb + xx - 2cx + cc)$ :: $gg \,.\, hh.$, invenietur, ductis invicem mediis & extremis, æquatio ſuperior.

(*x*) Si daretur rectangulum AC . CB $= dd$, exſurgeret æquatio quatuor dimenſionum nempe (ceteris, ut ſupra).

$$x^4 - 2cx^3 \begin{array}{l} + aa \\ + bb \\ + cc \end{array} xx - 2aacx \begin{array}{l} + aabb \\ + aacc \\ - d^4 \end{array} = 0,$$

(*y*) Rectæ AC, CB ductæ ex datis punctis A, B in rectam poſitione datam NC conti- Tab. G. Fig. 8.

DC, circumferentia circuli, (z) aut alia quævis curva linea adhibeatur, modo calculus (in hoc ultimo præſertim caſu) referatur ad lineam conjungentem puncta A & B.

PROB.

neant angulum ACB æqualem dato QRS, & per puncta A, B, C tranſeat circulus ABCN, jungatur AB quæ magnitudine ac poſitione datur, & fiat ad datum punctum B angulus ABD æqualis dato QRS, a.t ACB, recta DB poſitione datur (29. dat.) & tangit circulum in B (per converſ. Eucl. 32. III). Excitetur BE indefinita ipſi BD ad rectos angulos, quæ poſitione datur. Biſecetur AB in F, & per F ducatur FE perpendicularis ipſi AB, producatur FE donec ipſi in E occurrat, E punctum datur, eſtque circuli centrum.

Conſtruetur autem ſic. Juncta AB biſecetur in F, unde elevetur normalis indefinita FE. Fiat angulus ABD æqualis dato QRS & ducatur BE indefinita normalis ipſi BD. centro E, ubi rectæ FE, EB, conveniunt deſcribatur per A aut B circulus, datæ rectæ NC occurrens in duobus punctis N, C. Jungantur AC, CB, aut AN; NB. Dico factum: res liquido patet.

DETERMINATIO.

Quia vero ad compoſitionem requiritur ut circulus rectæ poſitione datæ occurrat, id fiet in unico puncto, quando recta poſitione data eſt circuli tangens. Quærendum quando hoc evenit.

Producatur BD donec ipſi NC occurrat in G, & ex G ducatur GH circulum ABCN tangens in H. Erit igitur HG æqualis GB quæ major eſt quam CG, & minor quam GN (Eucl. 8. III.) Sumatur ergo GL ipſi GH æqualis, cadet punctum L intra circulum: quo circa angulus ALB major eſt angulo ACB. Nam producta BM donec circulo occurrat in M & juncta AM, erit angulus exterior ALB major interiore & oppoſito AMB aut ACB.

Sic ergo determinabitur problema.

Fiat angulus ABD dato par, & BD producatur donec ipſi NC occurrat in G. Sumatur GL æqualis GB, & jungantur AL, LB, ſi angulus ALB dato par eſt, problema jam eſt ſolutum; ſi dato major, problema eſt poſſibile, ſi vero minor impoſſibile.

TAB. G. Fig. 9. (z) Si autem daretur circulus CDEF ad cujus peripheriam ducendæ ſint ex datis punctis A, B, rectæ AC, CB quarum data ſit differentia d. jungantur A, B & ex G centro circuli demittatur in AB normalis GM, & per G ducatur diameter EF ipſi MB parallela & per C agatur LCH ipſi MG parallela.

Fiant AM $= a$, ML $= x$, MB $= c$, MG $= b$, EG $= r$.

Jam ex natura circuli CH^q $=$ EH.HF $= rr - xx$.

Erit ergo LC $= b - \sqrt{(rr - xx)}$,

& CA $= \sqrt{(aa - 2ax + bb - 2b\sqrt{(rr - xx)} + rr)}$

&

CB $= \sqrt{(cc - 2cx + bb - 2b\sqrt{(rr - xx)} + rr)}$;

Poſita CA majore quam CB,

$$\sqrt{(aa - 2ax + bb - 2b\sqrt{(rr - xx)} + rr)} - d = \sqrt{(cc - 2cx + bb - 2b\sqrt{(rr - xx)} + rr)};$$

quadratiſque partibus

$$aa - 2ax + bb - 2b\sqrt{(rr - xx)} + rr - 2d\sqrt{(aa - 2ax + bb - 2b\sqrt{(rr - xx)} + rr)} + dd = cc - 2cx + bb - 2b\sqrt{(rr - xx)} + rr;$$

& tranſponendo

$$aa + dd - cc + 2cx - 2ax = 2d\sqrt{(aa - 2ax + bb - 2b\sqrt{(rr - xx)} + rr)}.$$

Fiat, brevitatis cauſa,

$aa + dd - cc = 2ff$, & $2c - 2a = 2e$;

exit demum

$$ex - ff = d\sqrt{(aa - 2ax + bb - 2b\sqrt{(rr - xx)} + rr)};$$

denuoque quadrando

$eexx + 2effx + f^4 = aadd - 2addx + bbdd - 2bdd\sqrt{(rr - xx)} + ddrr$ (& rurſus tranſponendo, & pro $aadd + bbdd + ddrr - f^4$ ſcribendo $2eegg$, & $2ehh$ pro $2eff + 2add$) $2bdd\sqrt{(rr - xx)} = eegg - ehhx - eexx$;

& quadrando

$$bbd^4rr - bbd^4xx = e^4g^4 - 2e^3gghhx - 2e^4ggxx + eeh^4xx + 2e^3hhx^3 + e^4x^4.$$

Ad hujus autem exemplum facile invenitur æquatio pro ſimilibus problematis.

Digitized by Google

PROB. XXII.

Datis poſitione tribus rectis AD, AE, BF quartam DF ducere, cujus partes DE, EF prioribus interceptæ, datarum erunt longitudinum. Tab. III. Fig. 3.

XLIX. Ad BF demitte perpendicularem EG, ut & obliquam EC parallelam AD, & rectis tribus poſitione datis concurrentibus in A, B, & H, dic $AB = a$, $BH = b$, $AH = c$, $ED = d$, $EF = e$, $HE = x$. Jam propter ſimilia triangula ABH, ECH, eſt AH. AB :: HE . $EC = \frac{ax}{c}$, & AH . HB :: HE . $CH = \frac{bx}{c}$. Adde HB, & fit $CB = \frac{bx + bc}{c}$. Inſuper propter ſimilia triangula FEC, FDB, eſt ED . CB :: EF . $CF = \frac{ebx + ebc}{dc}$. Denique per 12 & 13. II. Elem. eſt (a) $\frac{ECq - EFq}{2FC} + \frac{1}{2}FC \; (= CG) = \frac{HEq - ECq}{2CH} - \frac{1}{2}CH$, hoc eſt

$$\frac{\frac{aaxx}{cc} - ee}{\frac{2ebx + 2ebc}{dc}} + \frac{ebx + ebc}{2dc} = \frac{xx - \frac{aaxx}{cc}}{\frac{2bx}{c}} - \frac{bx}{2c}.$$

Sive

$$\frac{aadxx - eedcc}{ebx + cbc} + \frac{ebx}{d} + \frac{ebc}{d} = \frac{ccx - aax - bbx}{b}.$$

Hic, abbreviandi cauſa, pro $\frac{cc - aa - bb}{b} - \frac{eb}{d}$, ſcribe m; & erit $\frac{aadxx - eedcc}{ebx + ebc} + \frac{ebc}{d} = mx$, ac terminis multiplicatis per $x + c$, fiet

aadxx

(a) Nam propter 13 propos. Lib. II. Eucl. $EF^2 = EC^2 + FC^2 - 2FC . CG$; Idcirco $2FC . CG = EC^2 - EF^2 + FC^2$, nempe $CG = \frac{EC^2 - EF^2 + FC^2}{2FC}$; ſed $FC^2 = 2FC . \frac{1}{2}FC$, igitur $CG = \frac{EC^2 - EF^2}{2FC} + \frac{1}{2}FC$. At per 12 prop. Lib. II. Eucl. $EH^2 = CE^2 + CH^2 + 2CG . CH$, ſcilicet $EH^2 - CE^2 - CH^2 = 2CG . CH$, id eſt (cum $CH^2 = 2CH . \frac{1}{2}CH$) $\frac{EH^2 - CE^2}{2CH} - \frac{1}{2}CH = CG$; ergo $\frac{EC^2 - EF^2}{2FC} + \frac{1}{2}FC = \frac{EH^2 - CE^2}{2CH} - \frac{1}{2}CH$. &c.

$\frac{aadxx - eedcc}{eb} + \frac{ebcx}{d} + \frac{ebcc}{d} = mxx + mcx$. Iterum pro $\frac{aad}{eb} - m$, ſcribe p, pro $mc - \frac{ebc}{d}$ ſcribe $2pq$, & pro $- \frac{ebcc}{d} + \frac{eedcc}{eb}$ ſcribe prr, & evadet $xx = 2qx + rr$, & $x = q \pm \sqrt{(qq + rr)}$. Invento x ſive HE, age EC parallelam AB, & cape FC.BC :: $e.d$, & acta FED conditionibus quæſtionis ſatisfaciet.

PROB. XXIII.

TAB. III. Fig. 4. *Punctum Z determinare a quo ad quatuor poſitione datas rectas lineas FA, EB, FC, GD, ſi aliæ quatuor lineæ ZA, ZB, ZC, & ZD in datis angulis ducantur, duarum e ductis ZA & ZB rectangulum & aliarum duarum ZC & ZD ſumma detur.*

L. E Lineis elige aliquam poſitione datam FA ut & poſitione non datam ZA quæ ad illam ducitur, ex quarum longitudinibus punctum Z determinetur, & cæteras poſitione datas lineas produc donec his, ſi opus eſt etiam productis, occurrant, ut vides. Dictiſque $EA = x$, & $AZ = y$, propter angulos trianguli AEH datos dabitur ratio AE ad AH quam pone p ad q, & erit $AH = \frac{qx}{p}$. Adde AZ, ſitque $ZH = y + \frac{qx}{p}$. Et inde cum propter datos angulos trianguli HZB, detur ratio HZ ad BZ ſi ea ponatur n ad p habebitur $ZB = \frac{py + qx}{n}$.

Præterea ſi data EF dicatur a, erit $AF = a - x$, indeque, ſi propter datos angulos trianguli AFI, ſtatuatur AF ad AI in ratione p ad r, evadet $AI = \frac{ra - rx}{p}$. Hanc aufer ab AZ & reſtabit $IZ = y - \frac{ra + rx}{p}$. Et propter datos angulos trianguli ICZ, ſi ponatur IZ ad ZC in ratione m ad p, evadet $ZC = \frac{py - ra + rx}{m}$.

Ad eundem modum ſi ponatur $EG = b$; AG.AK :: $l : s$ & ZK.ZD :: $p.l$. obtinebitur $ZD = \frac{sb - sx - ly}{p}$.

Jam ex ſtatu quæſtionis ſi duarum ZC & ZD ſumma $\frac{py - ra + rx}{m} + \frac{sb - sx - ly}{p}$ ponatur æqualis dato alicui f; & aliarum duarum rectan-

gu-

gulum $\frac{pyy + qxy}{n}$ æquale gg, habebuntur duæ æquationes pro determinandis x & y. Per poſteriorem fit $x = \frac{ngg - pyy}{qy}$, & hunc ipſius x valorem ſcribendo pro eo in priori æquatione, evadet

$$\frac{py - ra}{m} + \frac{rngg - rpyy}{mqy} + \frac{sb - ly}{p} - \frac{sngg + spyy}{pqy} = f.$$

Et reducendo

$$yy = \frac{apqry - bmqsy + fmpqy + ggmns - ggnpr}{ppq - ppr - mlq + mps}. \quad (b)$$

Et abbreviandi cauſa ſcripto $2b$ pro $\frac{apqr - bmqs + fmpq}{ppq - ppr - mlq + mps}$, & kk pro $\frac{ggmns - ggpnr}{ppq - ppr - mbq + mps}$ fiet $yy = 2by + kk$, ſive $y = b \pm \sqrt{(bb + kk)}$. Cujus æquationis ope cum y innoteſcit, æquatio $\frac{ngg - pyy}{qy} = x$, dabit x. Quod ſufficit ad determinandum punctum z.

Ad eundem fere modum punctum determinatur a quo ad plures vel pauciores poſitione datas rectas totidem aliæ rectæ ducantur ea lege ut aliquarum ſumma vel differentia vel contentum detur, aut æquetur ceterarum ſummæ vel differentiæ vel contento, vel ut alias quaſlibet habeant aſſignatas conditiones.

PROB. XXIV.

Angulum rectum EAF data recta EF ſubtendere, quæ tranſibit per datum punctum C, a lineis rectum angulum comprehentibus æquidiſtans. Tab. III. Fig. 5.

LI. QUadratum ABCD compleatur, & linea EF biſecetur in G. Tum dic CB vel CD eſſe a, EG vel FG eſſe b, & CG eſſe

(b) Eſt enim (omnibus terminis, in quibus y non apparet, in contrariam partem translatis, & æquatione ad ſimpliciorem expreſſionem reducta, delendo quicquid denominatoribus, ac numeratoribus commune eſt) $\frac{py}{m} - \frac{rpy}{mq} - \frac{ly}{p} + \frac{sy}{q} = \frac{ar}{m} - \frac{bs}{p} + f + \frac{ggns}{pqy} - \frac{ggnr}{mqy}$, cunctiſque per mqy multiplicatis, $pqyy - pryy - \frac{mqlyy}{p} + msyy = arqy - \frac{bmsqy}{p} + fmqy + \frac{mggns}{p} - ggnr$, rurſumque omnibus in p ductis $ppqyy - ppryy - mqlyy + pmsyy = apqry - bmsqy + pfmqy + mggns - ggnpr$; & omnibus per $ppq - ppr - lmq + mps$ diviſis emerget $yy =$ &c.

Digitized by Google

eſſe x; eritque CE $= x - b$, & CF $= x + b$. Dein cum

$$CFq - BCq = BFq,\ \text{erit}\ BF = \sqrt{(xx + 2bx + bb - aa)}.$$

Denique propter ſimilia triangula CDE, FBC, eſt CE . CD :: CF . BF, ſive $x - b,\ a :: x + b . \sqrt{(xx + 2bx + bb - aa)}$.

Unde

$$ax + ab = (x - b) . \sqrt{(xx + 2bx + bb - aa)}.$$

Cujus æquationis utraque parte quadrata, & prodeuntibus terminis in ordinem redactis, prodit

$$x^4 = \begin{matrix} +2aa \\ +2bb \end{matrix} xx \begin{matrix} +2aabb \\ -b^4 \end{matrix}$$

Et extracta radice ſicut fit in æquationibus quadraticis, prodit

$$xx = aa + bb + \sqrt{(a^4 + 4aabb)}.$$

Adeoque

$$x = \sqrt{(aa + bb + \sqrt{(a^4 + 4aabb)})}.$$

CG ſic inventa dat CE vel CF, quæ determinando punctum E vel F problemati ſatisfacit. (c)

Idem aliter.

Sit CE $= x$, CD $= a$, & EF $= b$, eritque CF $= x + b$ & BF $= \sqrt{(xx + 2bx + bb - aa)}$. Et proinde cum ſit CE . CD :: CF . BF, ſive $x : a :: x + b . \sqrt{(xx + 2bx + bb - aa)}$, erit $ax + ab = x \sqrt{(xx + 2bx + bb - aa)}$. Hujus æquationis partibus quadratis, & terminis in ordinem redactis prodibit

$$x^4 + 2bx^3 \begin{matrix} +bb \\ -2aa \end{matrix} xx - 2aabx - aabb = 0,$$

æquatio biquadratica, cujus radicis inveſtigatio difficilior eſt quam in priori caſu. Sic autem inveſtigari poteſt. Pone

x^4

TAB. I. Fig. 1. (c) Sit CL $= b$, erit ducta LD $= \sqrt{(aa + bb)}$. Fiat CM $= 2b$. Erit DM $= \sqrt{(aa + 4bb)}$, cui par ſumatur DN, & CN diametro deſcribatur ſemicirculus ſecans rectam DO in O. Erit $DO^2 = a\sqrt{(aa + 4bb)} = \sqrt{(a^4 + 4aabb)}$. Ad LD erigatur in D normalis DP $=$ DO. Recta LP $= \sqrt{(LD^2 + DP^2)} = \sqrt{(aa + bb + \sqrt{(a^4 + 4aabb)})}$, cui æqualis capiatur LQ. Centro C radio CQ deſcribatur arcus ſecans rectam BA in F, ducaturque recta CF. Erit EF $= 2b = 2$CL.

$$x^4 + 2bx^3 \begin{array}{c} + bb \\ - 2aa \end{array} xx - 2aabx + a^4 = aabb + a^4,$$

& extracta utrobique radice

$$xx + bx - aa = + a \sqrt{(aa + bb)}. \ (d)$$

Ex his occaſionem nactus ſum tradendi *regulam de electione terminorum* ad ineundum calculum.

Scilicet, cum duorum terminorum talis obvenit affinitas ſive ſimilitudo relationis ad ceteros terminos quæſtionis, ut oporteret æquationes per omnia ſimiles ex utrovis adhibito produci, aut ambos, ſi ſimul adhiberentur, eaſdem in æquatione finali dimenſiones & eandem omnino formam [ſignis forte + & — exceptis] habituros eſſe; [id quod facile proſpicitur;] tunc neutrum adhibere convenit, ſed eorum vice tertium quemvis eligere qui ſimilem utrique relationem gerit, puta ſemiſummam vel ſemidifferentiam, vel medium proportionale forſan, aut quamvis aliam quantitatem utrique indifferenter & ſine compare relatam.

Sic in præcedente problemate cum viderim lineam EF pariter ad utramque AB & AD referri [quod patebit ſi ducas itidem EF in angulo BAH,] atque adeo nulla ratione ſuaderi poſſem cur ED potius quam BF, vel AE potius, quam AF vel CE potius quam CF pro quærenda quantitate adhiberentur; vice punctorum E & F unde hæc ambiguitas proficiſcitur, ſumpſi [in ſolutione priori] intermedium G quod parem relationem ad utramque linearum AE & AD obſervat. Deinde ab hoc G non demiſi perpendiculum ad AF pro quærenda quantitate, quia potui eadem ratione demiſiſſe ad AD. Et eapropter in neutrum CB vel CD demiſi, ſed inſtitui CG quærendum eſſe, quod nullum admittit compar; & ſic æquationem biquadraticam obtinui ſine terminis imparibus.

Potui etiam [animadverſo quod punctum G jaceat in peripheria circuli centro A, radio EG deſcripti] demiſiſſe GK perpendiculum in diagonalem AC, & quæſiviſſe AK vel CK, (quippe quæ ſimilem etiam utrinque AB & AD relationem gerunt;) atque ita in æquationem quadraticam $yy = - \frac{1}{2}ey + \frac{1}{2}bb$ incidiſſem poſito AK $= y$, AC $= e$, & EG $= b$. (*e*) Et

AK

Constructio ſecundæ ſolutionis:

(*d*) Radicis inveſtigatio quidem difficilior, ac conſtructio multo ſimplicior.

Tab. I. Fig. 2. Sit CL $= b$; erit DL $= \sqrt{(aa + bb)}$; LD biſecetur in M. Circulus centro M, radio ML, deſcriptus tranſibit per C. Sumatur DN $=$ DC $= a$; & centro M, radio MN deſcribatur circulus NOPQ. Erit PL $=$ DN $= a$, LQ $=$ CO, quæ, ut patet, ipſius x verus eſt valor.

Quod exemplum docet, non ſemper id quod algebraice ſimplicius eſt, eſſe quoque geometrice ſimplicius. Algebraica ſimplicitas conſtat facilitate inveniendæ æquationis, & terminorum paucitate: geometrica vero paucitate linearum ducendarum, earum ſimplicitate, ac facilitate exſurgit.

(*e*) Quod ſic *acutiſſimus* s'GRAVESANDE reperit.

Ceteris, ut ſupra, pone CE $= z$, ED $= x$. Tab. I. Fig. 3. Erit AE $= a - x$. Habes, ob triangulum rectangulum ADC, $ee = 2aa$; ob triangulum rectangulum CDE, $zz = aa + xx$, ob ſimilia triangula FEA, CDE, $az - xz = 2bx$,

Digitized by Google

AK ſic invento erigendum fuiſſet perpendiculum KG præfato circulo occurrens in G, per quod CF tranſiret.

Ad

$az = 2bx + xz$, $\frac{az}{2b+z} = x$; ob triangulum obtuſiangulum CAG, GC^2 $(bb + 2bz + zz) = AG^2 + AC^2 + 2AC \cdot AK$ $(bb + ee + 2ey)$, vel $2bz + zz = ee + 2ey$. Pone in $zz = aa + xx$ valorem ipſius $xx = \frac{aazz}{4bb + 4bz + zz}$ deſumptum ex ſecunda æquatione, & habebis (ſublatis fractionibus)

$$z^4 + 4bz^3 + 4bbzz = 2aazz + 4aabz + 4aabb.$$

At $z^4 + 4bz^3 + 4bbzz = (2bz + zz)^2 = (ee + 2ey)^2$, ergo (pro $2aa$ poſito ee)

$$eezz + 2eebz + 2eebb = e^4 + 4e^3y + 4eeyy;$$

& dividendo per ee, $zz + 2bz + 2bb = ee + 4ey + 4yy$; ſed $zz + 2bz = ee + 2ey$, igitur $2bb + ee + 2ey = ee + 4ey + 4yy$; deletis delendis, omnibuſque per 4 diviſis $\frac{bb}{2} = \frac{ey}{2} + yy$, ac $y = -\frac{e}{4} \pm \sqrt{(\frac{ee}{16} + \frac{bb}{2}}$, quæ ita conſtrui poteſt.

CONSTRUCTIO.

Centro A, radio b deſcribatur circulus LGPRQ. Sumatur arcus QR = RP. Ducatur AQ. Jungatur LR ſecans AQ in M. Triangulum LMA erit rectangulum in M & iſoſceles, ſiquidem angulus PAR aut RAQ eſt ſemirectus, atque ideo QAL, ut & angulus ALM ad peripheriam, qui inſiſtit quadranti; LM eſt ideo = MA, $LM^2 + AM^2 = 2AM^2 = bb$, & $AM^2 = \frac{bb}{2}$. Abſcindatur nunc $AS = \frac{AC}{4}$. Erit $MS = \sqrt{(\frac{ee}{16} + \frac{bb}{2})}$. Centro S, radio SM, deſcribatur arcus ſecans CP in K, ex quo ducatur KG ipſi MA parallela donec occurrat circulo LPRQ in G, ducatur CG, & erit $EF = 2b$.

Tab. I. Fig. 4. Brevius autem, analyſi geometrica.

Sit M recta magnitudine data, & ABCD datum quadratum.

Puta factum; ſitque EF datæ M par. Ex F demitte ipſi FC ad angulos rectos FL occurrentem CD productæ in L. Ex eodem F eleva normalem FH. Angulus HFL eſt ideo FCL par (Eucl. 8. VI.), atque FH æqualis CD, quapropter CE, & FL æquantur. Fac AK æqualem datæ M, aut EF. Due EL, DK, hæc poſitione ac magnitudine datur (26. *dat.*). Sunt autem quadrata ex ED, DL, ſimul, æqualia (quadrato ex EL, aut quadratis ex EF, FL, ſimul, ſeu) quadratis ex FE, EC, aut ex FE, CD, DE. Quadratum ergo ex DL æquat quadrata ex FE, CD, id eſt ex AD, AK, quæ quadrato ex DK æquantur. Datur igitur DL poſitione, ac magnitudine; quare & CL, & ejus dimidia PL. Si nunc a dato puncto P in rectam poſitione datam AB agatur PF æqualis ipſi PL, dabitur etiam PF poſitione (31. *dat.*), datur ergo punctum F (27. *dat.*).

Componetur autem ſic

In BA producta fac AK datæ M æqualem. Junge DK, qua, tanquam radio, & centro D deſcribe arcum ſecantem CD productam, in L. Biſeca CL in P, quo centro, & radio PL deſcribe ſemicirculum ſecantem rectam BK in F. Age CF. Dico FE æqualem AK.

Sunt enim quadrata ex KA, AD ſimul, æqualia quadrato (ex KD, ſeu per constructionem) ex DL. Adde hinc inde quadratum ex DE; & quadrata ex KA, AD, DE ſimul æquabunt quadrata (ex LD, & ex DE, id eſt ex EL, ſeu) ex EF, FL; ſed ob angulum HFL æqualem angulo FCL, & latus FH æquale lateri CD, eſt FL ipſi EC par. Quadrata igitur ex KA, AD, DE ſimul æquant quadrata (ex FE, EC, ſive) ex FE, ED, DC ſimul. Aufer utrimque quadratum ex DE, & æqualia quadrata ex AD, DC, & reſtabit quadratum ex KA æquale quadrato ex FE, aut, quod idem eſt, AK æqualis FE. *Q. E. F.* Tab. I.

Alia ſolutio quæ locum habet etiam ubi datus angulus rectus non eſt, aut ubi quadrilaterum ABCD eſt rhombus. Fig. 5.

Sit quadrilaterum æquilaterum ABCD datum ſpecie, poſitione, & magnitudine; & ab unius anguli vertice C ducenda ſit recta CF lateri BA occurrens in F, ita ut pars EF æquet rectam magnitudine datam M.

Puta factum; & quia quadrilaterum ABCD datur ſpecie, dantur ejus anguli (*dat. def.* 3.), quapropter datur etiam angulus DAF (4. *dat.*); Due diagonalem CA, & erit quadrilaterum diviſum in triangula ſpecie data (47. *dat.*), datur ideo angulus CAD, ergo etiam angulus

CAF;

Digitized by Google

Ad hanc regulam animum advertens, in Prob. 9. & 10. ubi trianguli latera germana BC & AC determinanda erant, quæſivi potius ſemidifferentiam quam alterutrum eorum. Sed regulæ hujus utilitas ex vigeſimo octavo problemate magis eluceſcet.

PROB. XXV.

Ad circulum centro C radio CD deſcriptum ducere tangentem DB, cujus pars PB, inter rectas poſitione datas AP, AB ſita, ſit datæ longitudinis. Tab. III. Fig. 6.

LII. A Centro C ad alterutram rectarum poſitione datarum puta AB demitte normalem CE, eamque produc donec tangenti DB occurrat in H. Ad eandem AB demitte etiam normalem PG; & dictis EA $= a$, EC $= b$, CD $= c$, BP $= d$, & PG $= x$, propter ſimilia triangula PGB, CDH erit GB ($\sqrt{(dd - xx)}$). PB :: CD. CH $= \frac{cd}{\sqrt{(dd - xx)}}$. Adde EC; & fiet EH $= b + \frac{cd}{\sqrt{(dd - xx)}}$. Porro eſt PG. GB :: EH. EB $= \frac{b}{x}\sqrt{(dd - xx)} + \frac{cd}{x}$. Adhæc propter angulum

lum

CAF; huic parem fac angulum CEK. Jam triangula CAF, CEK communem habent angulum ACF, & æquales angulos CAF, CEK; ſunt itaque ſimilia, & angulus AFC æquat angulum CKE; unde ut FC ad CA ſic KC ad CE, adeoque eſt rectangulum FCE æquale rectangulo KAC; quam ob rem circulus tranſiens per puncta E, A, K tranſibit etiam per F: (quod facile probatur per Eucl. 36. & 37. III.) æquales igitur ſunt anguli FEK, & (FAK, vel) BAC: Junge FK, & rurſus æquantur anguli FKE, & (FAE, vel, ob parallelas AD, BC) ABC; ergo ſimilia ſunt triangula ABC, FEK, & eſt AC ad AB, ut FE ad EK; ſed magnitudine dantur BA, EF per hypotheſin, & AC ob data puncta A & C, datur ergo magnitudine EK (20. *dat.*). Item, quia æquilaterum eſt quadrilaterum ABCD eſt angulus (BAC, vel) KAF æqualis angulo (ACB, vel) CAD; addito igitur communi EAF, eſt angulus KAE æqualis (FAC, aut) KEC; ſed angulus CKE communis eſt triangulis CKE, EKA, ſunt itaque ſimilia: inde CK ad KE ut KE ad KA, & rectangulum CKA æquatur quadrato ex KE; ſed datur hoc quadratum, & recta CA, ergo etiam AK (59. *dat.*); quocirca datur punctum K, & (ob KE magnitudine, & AD poſitione, datas) etiam punctum E (31. & 27. *dat.*).

Compoſitio.

Cape R quartam proportionalem poſt datas AC, AB, M; hujus quartæ quadrato æquale rectangulum applica datæ CA ut excedat quadrato (Eucl. 29. VI.): ſitque applicationis altitudo AK: centro A, radio R deſcribe arcum ipſi AD occurrentem in E: junge CE, quam produc donec BA productæ occurrat in F. Dico EF datæ M eſſe parem.

Nam, quia ex conſtructione rectangulum CKA æquat quadratum ex KE, erit CK ad KE ut KE ad KA, & lineæ proportionales ſunt circa eundem angulum CKE; igitur ſimilia ſunt triangula CKE, EKA (Eucl. 6. VI.); eſt igitur angulus CEK æqualis angulo (KAE, aut propter KAF æqualem BAC, vel CAD, & FAE communem) FAC, ergo triangula CKE, CFA habentia angulum communem KCF, ſunt ſimilia, & angulus CKE æquat angulum CFA, quapropter FC ad CA eſt ut CK ad CE, & rectangulum FCE æquat rectangulum KCA, igitur circulus tranſiens per puncta E, A, K tranſibit etiam per F; ſunt ergo æquales anguli FEK, & (KAF, vel) BAC, ut & (ducta FK) FKE ac (EAF, vel) CBA; quocirca CA ad AB eſt ut FE ad EK; ſed ut CA ad AB ita eſt (per conſtructionem) M ad EK, æquantur itaque M & FE. *Q. E. F.*

Digitized by Google

lum PAG datum, datur ratio PG ad AG, qua poſita e ad f, erit $AG = \frac{fx}{e}$. Adde EA & BG, & habebitur denuo $EB = a + \frac{fx}{e} + \sqrt{(dd - xx)}$.

Eſt itaque

$$\frac{cd}{x} + \frac{b}{x}\sqrt{(dd - xx)} = a + \frac{fx}{e} + \sqrt{(dd - xx)},$$

& per tranſpoſitionem terminorum

$$a + \frac{fx}{e} - \frac{cd}{x} = \frac{b - x}{x}\sqrt{(dd - xx)}.$$

Et partibus æquationis quadratis,

$$aa + \frac{2afx}{e} - \frac{2acd}{x} + \frac{ffxx}{ee} - \frac{2cdf}{e} + \frac{ccdd}{xx} =$$

$$\frac{bbdd}{xx} - bb - \frac{2bdd}{x} + 2bx + dd - xx.$$

Et per debitam reductionem.

$$x^4 \frac{\begin{array}{c} + 2aef \\ - 2bee \end{array} x^3 \begin{array}{c} + aaee \\ + bbee \\ - ddee \\ - 2cdef \end{array} xx \begin{array}{c} + 2bddee \\ - 2acdee \end{array} x \begin{array}{c} + ccddee \\ - bbddee \end{array}}{ee + ff} = 0 \quad (f).$$

PROB.

(f) Pleniorem hujus æquationis conſtructionem invenies infra; ſed docenda videtur ratio inveniendi caſus, in quibus æquatio biquadratica deſcendit ad quadraticam; ut hoc fiat, ſecundus, & quartus terminus ſimul abeſſe debent: ſecundus autem abeſſet in hac hypotheſi ſi $af = be$, & tunc æquatio in hanc mutaretur

$$x^4 \frac{\begin{array}{c} + aaee \\ + bbee \\ - ddee \\ - 2cdef \end{array} xx \begin{array}{c} + 2bddee \\ - 2acdee \end{array} x \begin{array}{c} + ccddee \\ - bbddee \end{array}}{ee + ff} = 0;$$

quartus vero evaneſceret ſi $bd = ae$, & tunc

$$x^4 \frac{\begin{array}{c} + aaee \\ + bbee \\ - ddee \\ - 2cdef \end{array} xx \begin{array}{c} + ccddee \\ - bbddee \end{array}}{ee + ff} = 0;$$

Tunc autem GP . PA :: AE . EC :: CD . PB; aut $a . b :: e . f :: d . c$.

PROB. XXVI.

Invenire punctum D a quo tres rectæ DA, DB, DC ad totidem alias poſitione datas rectas AE, BF, CF perpendiculariter demiſſæ, datam inter ſe rationem obtineant. TAB. III. Fig. 7.

LIII. E rectis poſitione datis producatur una, puta BF, ut & ejus perpendicularis BD donec reliquis AE & CF occurrant, BF quidem in E & F; BD autem in H & G. Jam ſit EB $= x$ & EF $= a$; eritque BF $= a - x$. (g) Cum autem propter datam poſitionem rectarum EF, EA, & FC, anguli E & F, adeoque rationes laterum triangulorum EBH & FBG dentur; ſit EB ad BH ut d ad e; & erit BH $= \frac{ex}{d}$ (h) & EH ($= \sqrt{}$(EBq + BHq) $=$ $\sqrt{}(xx + \frac{eexx}{dd})$, hoc eſt $= \frac{x}{d}\sqrt{}(dd + ee)$. (i) Sit etiam BF ad BG ut d ad f; & erit BG $= \frac{fa - fx}{d}$ (k) & FG ($= \sqrt{}$(BFq + BGq)) $= \sqrt{}(aa - 2ax + xx + \frac{ffaa - 2ffax + ffxx}{dd})$, hoc eſt $= \frac{a - x}{d}\sqrt{}(dd + ff)$. (l) Præterea dicatur BD $= y$, & erit HD $= \frac{ex}{d} - y$, & GD $= \frac{fa - fx}{d} - y$, adeoque cum ſit AD.HD (:: EB.EH) :: d. $\sqrt{}(dd + ee)$, & DC.GD (:: BF.FG) :: d. $\sqrt{}(dd + ff)$, erit AD $= \frac{ex - dy}{\sqrt{}(dd + ee)}$, & DC $=$ $\frac{fa - fx - dy}{\sqrt{}(dd + ff)}$. (m) Denique ob datas rationes linearum BD, AD, DC, ſit BD. AD

TAB. I. Fig. 6. (g) Problema hoc ſimul explicare, & viam conſtructioni ſternere conabimur.

Poſitis, quæ in Auctore; erige FM, EL normales ad EF. Produc EH, FG, donec normalibus occurrant in M & L. Dic FM $= b$, EL $= c$, EM $= \sqrt{}(aa + bb) = m$, FL $= \sqrt{}(aa + cc) = n$

(h) Eſt EB ad BH, ut EF ad FM; ſed quia Auctor facit EB ad BH, ut d ad e, erit $a.b :: d.e$, & BH $\frac{ex}{d} = \frac{bx}{a}$. Quia vero d, & e arbitrariæ longitudinis ſumi poſſunt, (dummodo ſint inter ſe ut EF ad FM) pone $d = a$; erit $e = b$, & $\sqrt{}(dd + ee) = \sqrt{}(aa + bb) = m$.

(i) Id eſt EH $= \frac{mx}{a}$.

(k) Rurſus FB ad BG eſt, ut FE ad EL; ut d ad f. Quia vero poſuimus $d = a$; erit $f = c$, & BG $\frac{af - fx}{d} = \frac{ac - cx}{a} = c - \frac{cx}{a}$; $\sqrt{}(dd + ff) = \sqrt{}(aa + cc) = n$.

(l) Scilicet FG $= \frac{an - nx}{a} = n - \frac{nx}{a}$.

(m) Id eſt AD $= \frac{bx - ay}{m}$, & DC $=$ $\frac{ac - cx - ay}{n}$.

AD :: $\sqrt{(dd+ee)}. b - d$, (n) & erit $\frac{by - dy}{\sqrt{(dd+ee)}}$ (= AD) = $\frac{ex - dy}{\sqrt{(dd+ee)}}$, ſive $by = ex$. (o) Sit etiam BD . DC :: $\sqrt{(dd+ff)}. k - d$ (p) & erit $\frac{ky - dy}{\sqrt{(dd+ff)}}$ (= DC) = $\frac{fa - fx - dy}{\sqrt{(dd+ff)}}$, ſive $ky = fa - fx$. (q) Eſt itaque $\frac{ex}{b}$ (= y) = $\frac{fa - fx}{k}$; & per reductionem $\frac{fba}{ek + fb} = x$. (r) Quare cape EB . EF :: $b . \frac{ek}{f} + b$, dein BD . EB :: $e . b$, & habebitur punctum quæſitum D.

PROB. XXVII.

Tab. III. Fig. 8. *Invenire punctum D, a quo tres rectæ DA, DB, DC ad data tria puncta A, B, C, ductæ, datam inter ſe rationem obtineant.*

LIV. E Datis tribus punctis junge duo quævis, puta A & C; & a tertio B ad lineam conjungentem AC demitte perpendiculum BE, ut & perpendiculum DF a puncto quæſito D; dictiſque AE = a, AC = b, EB = c, AF = x, & FD = y, erit ADq = $xx + yy$. FC = $b - x$. CDq (= FCq + FDq) = $bb - 2bx + xx + yy$. EF = $x - a$, ac BDq (= EFq + (EB + FD) quadratum) (s) = $xx - 2ax + aa + cc + 2cy + yy$. Jam cum ſit AD ac CD in data ratione, ſit iſta ratio d ad e; & erit CD = $\frac{e}{d}\sqrt{(xx+yy)}$. Cum etiam ſit AD ad BD in data ratione, ſit iſta ratio d ad f, & erit BD = $\frac{f}{d}\sqrt{(xx+yy)}$. Adeoque eſt $\frac{eexx + eeyy}{dd}$ (= CDq) = $bb - 2bx + xx + yy$, & $\frac{ffxx + ffyy}{dd}$ (= BDq) = $xx -$

2ax

(n) Sit ME ad FN ut eſſe debet BD ad DA, & dic EN = b, erit EN = $b - a$, vel $b - d$.

(o) Nempe $by = bx$.

(p) Sit rurſus LE ad FO, ut eſſe debet BD ad DC. Dic EO = k, & FO erit $k - a$, vel $k - d$.

(q) Seu juxta nos $ky = ac - cx$.

(r) Noſtris ſymbolis $x = \frac{acb}{bk + cb}$. Reſtat igitur faciendum EB . EF :: $b . \frac{bk}{c} + b$, ſeu EB . EF — EB (BF) :: $b . \frac{bk}{c}$, id eſt quære quartam NP poſt LE, EO, MF, & ſeca datam EF in B ut ſecta eſt EP in N, erit EB = x. Cetera facile inveniuntur.

(s) Nam ſi DF producatur, & per B ducatur BH ipſi EF parallela; patet FH = EB, & BH = EF, atque BD^2 = BH^2 (ſive EF^2) + DH^2 (ſive (DE + EB)^2). Tab. I. Fig. 7.

$2ax + aa + ee + 2ey + yy$. (*t*) In quibus ſi abbreviandi cauſa, pro $\frac{dd - ee}{d}$ ſcribatur p, & q pro $\frac{dd - ff}{d}$, (*v*) emerget

$$bb - 2bx + \frac{p}{d}xx + \frac{p}{d}yy = 0,$$

&

$$aa + ee - 2ax + 2ey + \frac{q}{d}xx + \frac{q}{d}yy = 0.$$

Per priorem eſt $\frac{2bqx - bbq}{p} = \frac{q}{d}xx + \frac{q}{d}yy$. (*x*) Quare in poſteriori pro $\frac{q}{d}xx + \frac{q}{d}yy$ ſcribe $\frac{2bqx - bbq}{p}$ & orietur $\frac{2bqx - bbq}{p} + aa + ee - 2ax + 2ey = 0$. Iterum, abbreviandi cauſa, ſcribe m pro $a - \frac{bq}{p}$, & $2en$ pro $\frac{bbq}{p} - aa - ee$, & erit $2mx + 2en = 2ey$; terminiſque per $2e$ diviſis $\frac{mx}{e} + n = y$. Quamobrem in æquatione $bb - 2bx + \frac{b}{d}xx + \frac{p}{d}yy = 0$, pro yy ſcribe quadratum de $\frac{mx}{e} + n$, & habebitur

$$bb - 2bx + \frac{p}{d}xx + \frac{pmm}{dee}xx + \frac{2pmn}{de}x + \frac{pnn}{d} = 0.$$

Ubi denuo ſi, abbreviandi cauſa $\frac{b}{r}$ ſcribatur pro $\frac{p}{d} + \frac{pmm}{dee}$, (*y*) $\frac{sb}{r}$ pro $b -$

(*t*) In prima æquatione duc omnia in dd, & habebis
$eexx + eeyy = bbdd - 2bddx + ddxx + ddyy$, & tranſponendo, ac rurſus dividendo per dd, erit
$bb - 2bx + (\frac{dd - ee}{dd})xx + (\frac{dd - ee}{dd})yy = 0$.
Idem fac in ſecunda.

(*v*) Sume ad libitum aliquam rectam, quam dic $= d$, hanc fac ad aliam ut debet eſſe AD ad DC, hanc ſecundam dic $= e$. Rurſus fit d ad aliam ut eſſe debet AD ad DB, hancque tertiam dic $= f$. Fac nunc $d . d + e :: d - e$ ad quartam $= p$; & $d . d + f :: d - f$ ad quartam $= q$.

(*x*) Tranſpone $bb - 2bx$ in priori æquatione, ſic inventurus $\frac{p}{d}xx + \frac{p}{d}yy = 2bx - bb$. Duc omnia in q, & divide per p, & obtinebis $\frac{q}{d}xx + \frac{q}{d}yy = \frac{2bqx - bbq}{p}$.

(*y*) Ceteris, ut ſupra, ſtantibus, fit EG $= m$. $GB^2 = ee + mm$; ſed ducta EK normali $GB^2 . BE^2$ ($=$ SB . BK) :: GB . BK. Fiat ergo $p . b :: d$. (*e*), & GB . BK :: e. (*r*), ea æquabit $\frac{eee}{ee + mm} = \frac{bdee}{pee + pmm}$, quare $r(pee + pmm) = bdee$, & $\frac{p}{d} + \frac{pmm}{dee} = \frac{b}{r}$.

$b - \frac{pmn}{dc}$, (z)

&

$\frac{tbb}{r}$ pro $bb + \frac{pnn}{d}$, (a) habebitur $xx = 2sx - tb$.

Et extracta radice $x = s \pm \sqrt{(ss - tb)}$. Invento x æquatio $\frac{mx}{c} + n = y$, dabit y; & ex datis x & y, hoc eſt AF & FD determinatur punctum quæſitum D.

(z) Rurſus quia $\frac{sb}{r}$ debet æquare $\frac{bdc - pmm}{dc}$, & $\frac{sb}{r} = \frac{sb(pcc + pmm)}{bdcc}$, erit $s\left(\frac{pcc + pmm}{c}\right) = bdc - pmn = cpc - pmn$, & $s(cc + mm) = ccc - mnc$. Faciendum eſt ergo $cc + mm$ (BG^2). $cc - mn :: c$. (s).

(a) Item quia $\frac{tbb}{r} = bb + \frac{pnn}{d}$, erit $t = r + \frac{prnn}{bbd} = r + \frac{rnn}{cb} = \frac{ccnn}{b(cc + mm)} + r$. Fac itaque $cc + mm . cc :: \frac{nn}{b}$. (α), cui adjice r.

De locis Geometricis.

1. Natura lineæ rectæ optime percipitur ex prorſus eadem omnium partium poſitione, quomodocunque partes illæ conſiderentur. Natura curvarum luculentiſſime intelligeretur ex diverſa partium poſitione, & una curva ab aliis diſtingueretur varietatibus occurrentibus in hac diverſa partium poſitione. Sic linea circularis ea eſt quæ habet partes eodem modo poſitas, ſi a centro ſpectentur; quod non accidit in aliis curvis: & hæc ipſa diverſitas in partium poſitione, dicitur curvedo. Cum autem difficilior ſit curvedinis determinatio, aliam viam iniverunt Geometræ, & linearum naturam definierunt per relationem rectarum certo modo ductarum.

TAB. K. Fig. 1. 2. Rectæ, quarum relatio exponit lineæ alicujus ABC naturam, ſic determinari ſolent. Sumuntur duæ rectæ BD; DE, concurrentes in puncto D, quarum altera BD rectæ FG poſitione datæ parallela eſt, altera DE rectæ GH pariter poſitione datæ parallela eſt. Hæ rectæ hinc terminantur a puncto D ubi concurrunt, inde vel utraque a linea cujus naturam exponunt, vel altera DB a linea in B; altera ED a puncto quodam determinato E. Et hæ rectæ ED; dicuntur *coordinatæ*.

3. Plerumque ea recta, quæ incipit a dato puncto E, datur poſitione; & tunc illius partes ED; Ed &c, dicuntur *abſciſſæ*; & rectæ parallelæ BD; *bd* &c, vocantur *ordinatæ*, vel *applicatæ*.

4. Sed arbitraria eſt hæc diſtinctio. Agatur enim per datum punctum E recta indefinita EI ipſi FG parallela, & per aliquod lineæ definiendæ punctum B recta BK ipſi ED parallela, & rectæ EI occurrens in K; cum æquales ſint BD; KE, ut & ED; KB (EUCL. 34. l.) lineæ ABC natura æque definietur rectis EK; KB, ac rectis ED; DB. Si lineæ ABC natura definitur rectis EK; KB, erit EK abſciſſa, KB ordinata; contra ED abſciſſa & DB ordinata, ſi linea determinetur rectis ED; DB.

5. Semper autem datum punctum E dicitur *vertex* vel *origo*. Hæc non omittenda cenſui, quanquam ponam cognitas præcipuas lineæ rectæ & ſectionum conicarum proprietates.

6. Relatio inter coordinatas definitur vel ex problematis legibus, vel ex cognita lineæ natura. Exempla primi generis attulit NEWTONUS Sect. IV. Nis. XXVII. & XXVIII; & multa afferet infra. Secundi generis hæc ſint.

7. Si ABC eſt linea recta poſitione data, TAB. K. recta abſciſſarum AE pariter poſitione data, Fig. 2. & cum ea datum angulum conſtituant ordina-

tæ

tæ BD, datur ratio AD ad DB. (Eucl. Dat. 40., & def. 3; & 2. VI.). Et ſi data ſit ratio AD ad DB, recta AE poſitione data, & datum punctum A, tanget punctum B rectam poſitione datam. Si enim aſſumatur AF datæ magnitudinis, ab F ſub dato angulo ducatur FG, ponatur AF ad FG in data ratione, & agatur AG recta, ea tranſibit per B. Compleantur parellologramma AFGH; ADBI; hæc ſunt æquiangula ob æquales angulos AFG; ADB; & habent proportionalia latera AF; FG; AB; BD, ergo ſunt circa eandem diagonalem (Eucl. 26. VI.)

Tab. K. Fig. 3. 8. Iisdem poſitis ſit ABC parabola, AE diameter ordinatarum BD, & A vertex, erit rectangulum ſub parametro & abſciſſa AD æquale quadrato ordinatæ DB; & ſi vertice A, diametro AE, & parametro pertinente ad diametrum AE deſcribatur parabola, & ſit rectangulum ſub parametro & abſciſſa æquale quadrato ordinatæ, alterum extremum B ordinatæ tangent hanc parabolam.

9. Hæc facile accommodantur ad ellipſim, & ad hyperbolam tum circa diametros, tum intra aſymptotos.

10. Lineæ quæ tranſeunt per extrema ordinatarum, appellantur *loci*. Veteres dixerunt *locos planos* quicunque ſunt lineæ rectæ & circuli; *locos ſolidos* ſectiones conicas, & *locos lineares* alias curvas ſuperiores. De locis planis ſcripſit Apollonius libros duos, quos deperditos optime reſtituit *Robertus* Simson.

11. Ex mente recentiorum algebra utentium, abſciſſæ AD dicantur x; ordinatæ DB y;

Tab. K. Fig. 2. 12. Ubi linea ABC eſt recta, data ratio ſit $\delta . \pi$; erit $\delta . \pi :: x . y$; & $x = \frac{\delta y}{\pi}$, vel $x - \frac{\delta y}{\pi} = 0$, æquatio ad rectam.

Tab. K. Fig. 3. 13. Quando linea ABC eſt parabola, & π eſt parameter pertinens ad diametrum AE, erit $\pi x = yy$, vel $\pi x - yy = 0$, æquatio ad parabolam.

Tab. K. Fig. 4. 14. Si linea ABC eſt ellipſis, ejus diameter $Pp = \delta$, & parameter pertinens ad diametrum Pp, $= \pi$, erit $Dp = \delta - x$; & $\delta x - xx . yy :: \delta . \pi$; atque $\delta x - xx = \frac{\delta yy}{\pi}$, vel $xx - \delta x + \frac{\delta yy}{\pi} = 0$, æquatio ad ellipſim.

15. Si linea ABC eſt hyperbola circa diametros, ejus diameter tranſverſa $Pp = \delta$; parameter ad eam pertinens $= \pi$, erit $pD = \delta + x$, & æquatio ad hyperbolam hanc invenietur $xx + \delta x - \frac{\delta yy}{\pi} = 0$. Tab. K. Fig. 5.

16. Si linea ABC eſt hyperbola inter aſymtotos, quarum alteri parallela eſt ordinata DB, ejus diameter ſecunda $= \kappa$, erit $xy - \kappa\kappa = 0$, æquatio ad hanc hyperbolam. Tab. K. Fig. 6.

17. Recentiores diſtinguunt *locos* ex æquationum dimenſionibus, & vocant locum primi gradus, eum cujus æquatio eſt unius dimenſionis, id eſt *locum* ad rectam; *locum* ſecundi gradus cujus æquatio eſt duarum dimenſionum, id eſt ad ſectiones conicas, quibus circulus eſt annumerandus; *locum* tertii gradus, cujus æquatio trium dimenſionum, & ſic de reliquis, quorum exempla nonnulla occurrent infra.

18. Æquationem autem vocant unius dimenſionis, cum neque indeterminatarum aut coordinatarum poteſtates, neque facta ex illis continet. Hujuſmodi eſt æquatio ad rectam. Æquationem dicunt duarum dimenſionum cum habet aut alterius ſaltem coordinatæ quadratum, ut æquatio ad parabolam, aut utriusque coordinatæ quadratum, ut æquatio ad ellipſim & ad hyperbolam circa diametros, aut factum ex coordinatis, ut æquatio ad hyperbolam intra aſymptotos. Uno verbo numerus dimenſionum definitur a maximo aggregato indicum indeterminatarum, quæ conſtituunt unum terminum ſimplicem æquationis.

19. Quivis locus complectitur puncta numero infinita; e ſingulis punctis loci duci poſſunt ordinatæ, quæ determinant totidem abſciſſas; ergo quilibet locus complectitur infinitum coordinatarum numerum; quæ cum exponantur æquatione indeterminata, intelligimus mirum in modum conſentire naturam locorum cum natura æquationum indeterminatarum.

20. Ubi vero lineæ natura definita eſt, ea referri poteſt ad ordinatas a prioribus diverſas. Mutari enim poteſt I. verticis poſitio. II. poſitio ordinatarum. III. poſitio verticis & ordinatarum ſimul. IV. poſitio abſciſſæ. V. poſitio verticis & abſciſſæ. VI. poſitio tum ordinatarum tum abſciſſarum. VII. poſitio tum ordinatarum, tum abſciſſarum, tum verticis.

Digitized by Google

TAB. K. Fig. 7. 21. In ſequentibus ponam lineæ ABC naturam primo, ut in numeris 11——16, definitam eſſe rectis PD; DB, quarum altera PD incipit a dato puncto P, altera DB rectæ ST poſitione datæ & tranſeunti per P, parallela eſt; ita ut ex recta RPQ deſumantur abſciſſæ x, quæ poſitivæ ſunt a P verſus Q, & negativæ a P verſus R; & ordinatæ DB vel PG ex ST, quæ poſitive procedunt a P verſus S, & negative a P verſus T.

22. I. Mutetur vertex, qui ponatur in O vel N, & fingatur NP $=$ PO $= \alpha$.

Statim dicatur ND $= u =$ NP $+$ PD $= \alpha + x$; & $u - \alpha = x$.

Jam dicatur OD $= u =$ DP$-$PO $= x - \alpha$; & $u + \alpha = x$.

Quare in omni æquatione locali, in qua mutatur vertex, poni debet $u \mp \alpha$ pro x, reliquis manentibus; quæ ſubſtitutio ſi fiat in æquationibus ſupra inventis fiet

23. $u \mp \alpha - \frac{\delta y}{\pi} = 0$, æquatio ad rectam.

24. $\pi u \mp \alpha\pi - yy = 0$, æquatio ad parabolam.

25. $uu \begin{matrix} \mp 2\alpha u + \alpha\alpha \\ - \delta u \pm \alpha\delta \end{matrix} + \frac{\delta yy}{\pi} = 0$, æquatio ad ellipſim.

26. $uu \begin{matrix} \mp 2\alpha u + \alpha\alpha \\ + \delta u \mp \alpha\delta \end{matrix} - \frac{\delta yy}{\pi} = 0$, æquatio ad hyperbolam circa diametros.

27. $uy \mp \alpha y - \kappa\kappa = 0$, æquatio ad hyperbolam inter aſymptotos.

Sed quoniam tum ellipſis tum hyperbola circa diametros, habent centrum, quod biſecat diametrum, ſi origo abſciſſarum transferatur in ipſo centro, erit $\alpha = \frac{\delta}{2} =$ PO $=$ Op.

TAB. K. Fig. 4. 28. Erit igitur in ellipſi PD $=$ PO $-$ OD $= \alpha - u$, & Dp $=$ pO $+$ OD $= \alpha + u$, & ideo $\alpha\alpha - uu . yy :: 2\alpha . \pi$; & $\alpha\alpha - uu = \frac{2\alpha yy}{\pi}$, aut $uu - \alpha\alpha + \frac{2\alpha yy}{\pi} = 0$ æquatio ad ellipſim, quando origo abſciſſarum eſt in ipſo centro.

TAB. K. Fig. 5. 29. In hyperbola erit PD $=$ DO$-$OP $= u - \alpha$ & Dp $=$ DO $+$ Op $= u + \alpha$; & $uu - \alpha\alpha . yy :: 2\alpha . \pi$; $uu - \alpha\alpha = \frac{2\alpha yy}{\pi}$, aut $uu - \alpha\alpha - \frac{2\alpha yy}{\pi} = 0$, æquatio ad hyperbolam circa diametros, quando origo abſciſſarum eſt in centro.

30. Æquationes N[i]. 28. & 29, quia carent ſecundo termino, cenſendæ ſunt ſimpliciores æquationibus N[i].25 & 26.

31. II. Mutetur poſitio ordinatarum, & curva quæ referebatur ad coordinatas PD; DB, referatur ad coordinatas PE; EB, quarum altera PE $= u$, abſcinditur ab eadem recta RQ, & originem ducit ab eodem puncto P, ac prior PD; altera BE quam pones $= z$, conſtituit cum ea datum angulum. Age per P rectam indefinitam LM quæ faciat angulum LPR dato æqualem, & quæ ideo poſitione dabitur. Dantur ergo omnes anguli circa punctum P. Dantur quoque omnes anguli in triangulo BDE; quare & ratio laterum DB; BE; ED. Quam determinaturus, abſcinde a PT datam PI, quam dic $= \beta$; per I age IK parallelam ipſi RQ, & dic IK $= \gamma$; & KP $= \varepsilon$. TAB. K. Fig. 8.

Ob parallelas IK; RP, æquales ſunt anguli IKP; RPL ad eaſdem partes partes oppoſiti; ſed RPL angulus factus eſt æqualis angulo BED; ergo æquales ſunt anguli IKP; DEB. Eodem pacto demonſtrabuntur æquales anguli KIP; EDB. Quare æquiangula ſunt triangula IPK; DEB: & IP (β). PK (ε) :: DB (y). BE (z), & $y = \frac{\beta z}{\varepsilon}$.

Item IP (β). IK (γ) :: BD ($y = \frac{\beta z}{\varepsilon}$). DE; eſt ergo DE $= \frac{\gamma z}{\varepsilon}$, & PE $= u =$ PD $+$ DE $= x + \frac{\gamma z}{\varepsilon}$, & $u - \frac{\gamma z}{\varepsilon} = x$, ubi punctum E cadit extra puncta P & D, ut in figura; ſed $u + \frac{\gamma z}{\varepsilon} = x$, ubi punctum E cadit intra puncta P; D. Ergo in æquationibus Nm. 12. 13. 14. 15. 16.

pro y ponamus $\frac{\beta z}{\varepsilon}$

& pro x ambigue $u \mp \frac{\gamma z}{\varepsilon}$, &c.

32. $u \mp \frac{\gamma z}{\varepsilon} - \frac{\beta\delta z}{\varepsilon\pi} = 0$, æquatio ad rectam.

33.

Digitized by Google

33. $\pi u \pm \frac{\pi\gamma z}{\iota} - \frac{\beta\beta zz}{\iota\iota} = 0$, æquatio ad parabolam.

34. $$uu \pm \frac{2\gamma uz}{\iota} \begin{matrix} +\frac{\gamma\gamma zz}{\iota\iota} \\ +\frac{\delta\beta\beta zz}{\pi\iota\iota} \end{matrix} - \delta u \mp \frac{\delta\gamma z}{\iota} = 0,$$

æquatio ad ellipſim.

35. $$uu \pm \frac{2\gamma uz}{\iota} \begin{matrix} +\frac{\gamma\gamma zz}{\iota\iota} \\ -\frac{\delta\beta\beta zz}{\pi\iota\iota} \end{matrix} + \delta u \pm \frac{\delta\gamma z}{\iota} = 0,$$

æquatio ad hyperbolam circa diametros.

36. $\frac{\beta uz}{\iota} \pm \frac{\beta\gamma zz}{\iota\iota} - uu = 0$, æquatio ad hyperbolam intra aſymptotos.

37. III. Si præterea origo transferretur in O aut N.

pro y poni deberet $\frac{\beta z}{\iota}$

& pro x $\quad u \pm \frac{\gamma z}{\iota} \pm \alpha.$

in æquationibus primo inventis, unde evaderet

38. $u \pm \frac{\gamma z}{\iota} - \frac{\beta\delta z}{\iota\pi} \pm \alpha = 0$, æquatio ad rectam.

39. $\pi u \pm \frac{\pi\gamma z}{\iota} \pm \alpha\pi - \frac{\beta\beta zz}{\iota\iota} = 0$, æquatio ad parabolam.

40. $$uu \pm \frac{2\gamma uz}{\iota} \begin{matrix} +\frac{\gamma\gamma zz}{\iota\iota} \pm 2\alpha u + \frac{2\alpha\gamma z}{\iota} + \alpha\alpha \\ +\frac{\delta\beta\beta zz}{\pi\iota\iota} - \delta u \mp \frac{\delta\gamma z}{\iota} \mp \alpha\delta \end{matrix}$$

$= 0$, æquatio ad ellipſim.

41. $$uu \pm \frac{2\gamma uz}{\iota} \begin{matrix} +\frac{\gamma\gamma zz}{\iota\iota} \pm 2\alpha u + \frac{2\alpha\gamma z}{\iota} + \alpha\alpha \\ -\frac{\delta\beta\beta zz}{\pi\iota\iota} + \delta u \pm \frac{\delta\gamma z}{\iota} \pm \alpha\delta \end{matrix}$$

$= 0$, æquatio ad hyperbolam circa diametros.

42. $\frac{\beta uz}{\iota} \pm \frac{\beta\gamma zz}{\iota\iota} \pm \frac{\alpha\beta z}{\iota} - uu = 0$, æquatio ad hyperbolam intra aſymptotos.

43. IV. Mutetur poſitio abſciſſæ, & curva quæ referebatur ad PD (x); DB (y), referatur ad PH (u); BH (z). Quia dantur anguli DPH; PHD, per hypotheſim, datur ratio PD ad DH, & PH ad HD. Sit $\beta . \zeta ::$ PD (x). DH $= \frac{\zeta x}{\beta}$; & $\gamma . \zeta ::$ PH (u). HD ($\frac{\zeta x}{\beta}$); erit $\zeta u = \frac{\zeta\gamma x}{\beta}$; & $\frac{\beta u}{\gamma} = x$. Eſt autem BH $=$ BD $+$ DH $= y + \frac{\zeta u}{\gamma}$, ubi recta XPY cadit intra angulum QPT, & ubi ea cadit intra angulum QPS eſt BH $= y - \frac{\zeta u}{\gamma}$ Quare $z = y \pm \frac{\zeta u}{\gamma}$. Igitur in æquationibus N^{m}. 12. 13. 14. 15. 16. Tab. K. Fig. 9.

pro x ponamus $\frac{\beta u}{\gamma}$

& pro y $\quad z \pm \frac{\zeta u}{\gamma}$

& fiet

44. $\frac{\beta u}{\gamma} - \frac{\delta z}{\pi} \mp \frac{\delta\zeta u}{\pi\gamma} = 0$, æquatio ad rectam.

45. $\frac{\pi\beta u}{\gamma} - zz \pm \frac{2\zeta uz}{\gamma} - \frac{\zeta\zeta uu}{\gamma\gamma} = 0$,

vel, liberando uu a coefficiente, & tranſponendo.

$$uu \mp \frac{2\gamma uz}{\zeta} + \frac{\gamma\gamma zz - \pi\beta\gamma u}{\zeta\zeta} = 0,$$

æquatio ad parabolam.

46. $\frac{\beta\beta uu}{\gamma\gamma} - \frac{\delta\beta u}{\gamma} + \frac{\delta zz}{\pi} \pm \frac{2\delta\zeta uz}{\pi\gamma} + \frac{\delta\zeta\zeta uu}{\pi\gamma\gamma} = 0$,

vel, liberando uu a coefficientibus,

$$uu \pm \frac{2\delta\gamma\zeta uz + \delta\gamma\gamma zz - \delta\gamma\beta\pi u}{\pi\beta\beta + \delta\zeta\zeta} = 0,$$

æquatio ad ellipſim.

47. $\frac{\beta\beta uu}{\gamma\gamma} + \frac{\delta\beta u}{\gamma} - \frac{\delta zz}{\pi} \mp \frac{2\delta\zeta uz}{\pi\gamma} - \frac{\delta\zeta\zeta uu}{\pi\gamma\gamma} = 0$

vel, liberando uu a coefficientibus,

$$uu \mp \frac{2\delta\gamma\zeta uz - \delta\gamma\gamma zz + \delta\beta\gamma\pi u}{\pi\beta\beta - \delta\zeta\zeta} = 0,$$

æquatio ad hyperbolam circa diametros.

48. $\frac{\beta uz}{\gamma} \pm \frac{\beta\zeta uu}{\gamma\gamma} - uu = 0$,

æquatio ad hyperbolam intra aſymptotos.

49. V. Mutetur præterea poſitio originis, quæ transferatur in O, aut N.

pro x ponere debebimus $\frac{\beta u}{\gamma} \pm \kappa$

& pro y $\qquad z \mp \frac{\zeta u}{\gamma}$

in æquationibus Nm. 12. 13. 14. 15. 16. & fiet

50. $\frac{\beta u}{\gamma} - \frac{\delta z}{\pi} \pm \frac{\delta\zeta u}{\pi\gamma} \mp \kappa = 0$, æquatio ad rectam.

51. $\frac{\pi\beta u}{\gamma} \mp \kappa\pi - zz \pm \frac{2\zeta uz}{\gamma} - \frac{\zeta\zeta uu}{\gamma\gamma} = 0$,

vel liberando uu a coefficiente, & transponendo,

$$uu \mp \frac{2\gamma uz}{\zeta} + \frac{\gamma\gamma zz - \pi\gamma\beta u \pm \kappa\pi\gamma\gamma}{\zeta\zeta} = 0,$$

æquatio ad parabolam.

52. $\frac{\beta\beta uu}{\gamma\gamma} \begin{matrix} \mp \frac{2\kappa\beta u}{\gamma} + \kappa\kappa \\ - \frac{\beta\delta u}{\gamma} \mp \kappa\delta \end{matrix} + \frac{\delta zz}{\pi} \mp \frac{2\delta\zeta uz}{\pi\gamma} + \frac{\delta\zeta\zeta uu}{\pi\gamma\gamma} = 0$,

vel, liberando uu a coefficientibus,

$$uu \mp \frac{2\delta\gamma\zeta uz + \delta\gamma\gamma zz \mp u\,(2\kappa\beta\pi\gamma \pm \beta\delta\pi\gamma) + \pi\gamma\gamma\,(\kappa\kappa \mp \kappa\delta)}{\pi\beta\beta + \delta\zeta\zeta} = 0,$$

æquatio ad ellipſim.

53. $$uu \frac{\pm 2\delta\gamma\zeta uz - \delta\gamma\gamma zz \mp u\,(2\kappa\beta\pi\gamma \mp \beta\delta\pi\gamma) + \pi\gamma\gamma\,(\kappa\kappa \mp \kappa\delta)}{\pi\beta\beta - \delta\zeta\zeta} = 0,$$

æquatio ad hyperbolam circa diametros, facile invenienda ad modum ſuperioris.

54. $\frac{\beta uz}{\gamma} \mp \kappa z \mp \frac{\beta\zeta uu}{\gamma\gamma} + \frac{\kappa\beta u}{\gamma} - uu = 0$;

æquatio ad hyperbolam intra aſymptotos.

55. VI. Nunc mutetur poſitio utriusque coordinatæ, & linea ABC, quæ referebatur ad coordinatas PD (x); DB (y), referatur ad PE (u); EB (z), quarum altera PE abſcinditur a recta XZ, poſitione data, altera BE rectæ LPM poſitione datæ parallela eſt. Tab. L. Fig. 1. 2. 3. 4.

Abſcindatur, ut N°. 31, PI = β, agatur IK parallela ipſi RQ & occurrens rectæ LM in K, & rectæ XZ in Y; & ponatur IK = γ; KP = ϵ; KY = ζ; YP = λ.

Triangula IPK; DBU oſtendentur ſimilia ut N°. 31, & hinc invenietur BU = $\frac{\epsilon y}{\beta}$, & DU = $\frac{\gamma y}{\beta}$; & PU = PD $\pm$ DU = $x \pm \frac{\gamma y}{\beta}$.

Sed, ob parallelas MP; EB, anguli alterni KPY; PEB ſunt æquales, ut & anguli KYP; EPU alterni inter parallelas KI; PQ; ergo eſt KY (ζ). YP (λ) :: UP $\left(\frac{\beta x \pm \gamma y}{\beta}\right)$. PE ($u$); & $\beta\zeta u = \beta\lambda x \pm \gamma\lambda y$.

Item YK (ζ). KP (ϵ) :: PU $\left(\frac{\beta x \pm \gamma y}{\beta}\right)$. UE = $\frac{\beta\epsilon x \pm \gamma\epsilon y}{\beta\zeta}$; & BE = BU $\pm$ UE = $\frac{\zeta\epsilon y \pm \beta\epsilon x \mp \gamma\epsilon y}{\beta\zeta} = z$.

Æquatio $\beta\zeta u = \beta\lambda x \pm \gamma\lambda y$, dat $\frac{\beta\zeta u \mp \gamma\lambda y}{\beta\lambda} = x$.

Æquatio $\pm\beta\epsilon x \mp \gamma\epsilon y + \zeta\epsilon y = \beta\zeta z$, dat $x = \frac{\pm\beta\zeta z \pm \gamma\epsilon y \mp \zeta\epsilon y}{\beta\epsilon}$; quare $\frac{\beta\zeta u \mp \gamma\lambda y}{\lambda} = \frac{\beta\zeta z \pm \gamma\epsilon y \pm \zeta\epsilon y}{\epsilon}$; unde $\beta\epsilon\zeta u \mp \gamma\epsilon\lambda y = \beta\lambda\zeta z \mp \gamma\epsilon\lambda y \pm \zeta\epsilon\lambda y$: & deleto commune $\gamma\epsilon\lambda y$, manet $\beta\epsilon\zeta u = \beta\lambda\zeta z \pm \zeta\epsilon\lambda y$, unde $y = \frac{\beta\lambda\zeta z \pm \beta\epsilon\zeta u}{\zeta\epsilon\lambda} = \frac{\beta\lambda z \pm \beta\epsilon u}{\epsilon\lambda}$.

Hic valor poſitus in $x = \frac{\zeta u}{\lambda} \mp \frac{\gamma y}{\beta}$, dat $x = \frac{\zeta u}{\lambda} \pm \frac{\beta\gamma\lambda z \pm \beta\epsilon\gamma u}{\beta\epsilon\lambda} = \frac{\zeta u}{\lambda} \mp \frac{\gamma\lambda z \pm \epsilon\gamma u}{\epsilon\lambda} =$

u

Digitized by Google

$u\left(\frac{\zeta \pm \gamma}{\lambda}\right) \pm \frac{\gamma z}{\epsilon}$, & ponendo KY $\pm$ IK $=$ IY $= \zeta \pm \gamma = \eta$, fiet $\frac{\eta u}{\lambda} \pm \frac{\gamma z}{\epsilon} = x$.

Quapropter in æquationibus ſæpius citatis

pro x poni debet $\frac{\eta u}{\lambda} \pm \frac{\gamma z}{\epsilon}$

& pro y $\frac{\beta z}{\epsilon} \pm \frac{\beta u}{\lambda}$

Hinc fiet

$$56.\ u\left(\frac{\pi\eta + \beta\delta}{\pi\lambda}\right) - z\left(\frac{\mp \pi\gamma + \beta\delta}{\pi\epsilon}\right) = 0,$$

æquatio ad rectam

$$57.\ uu = 2uz\frac{\lambda}{\epsilon} + zz\frac{\lambda\lambda}{\epsilon\epsilon} - u\frac{\pi\lambda\eta}{\beta\beta} \mp z\frac{\pi\lambda\lambda\gamma}{\epsilon\beta\beta} = 0,$$

æquatio ad parabolam ope ſolitæ reductionis.

$$58.\ uu - \frac{2uz\,(\mp\pi\epsilon\lambda\gamma\eta \mp \delta\beta\beta\epsilon\lambda) +}{\pi\epsilon\epsilon\eta\eta + \delta\beta\beta\epsilon\epsilon}$$

$$\frac{zz(\pi\lambda\lambda\gamma\gamma + \delta\beta\beta\lambda\lambda) - u\pi\delta\epsilon\epsilon\lambda\eta + z\pi\delta\epsilon\lambda\lambda\gamma}{\pi\epsilon\epsilon\eta\eta + \delta\beta\beta\epsilon\epsilon} = 0,$$

æquatio ad ellipſim.

$$59.\ uu - \frac{2uz\,(\mp\pi\epsilon\lambda\gamma\eta \pm \delta\beta\beta\epsilon\lambda) +}{\pi\epsilon\epsilon\eta\eta - \delta\beta\beta\epsilon\epsilon}$$

$$\frac{zz(\pi\lambda\lambda\gamma\gamma - \delta\beta\beta\lambda\lambda) + u\pi\delta\epsilon\epsilon\lambda\eta \pm \pi\delta\epsilon\lambda\lambda\gamma z}{\pi\epsilon\epsilon\eta\eta - \delta\beta\beta\epsilon\epsilon} = 0,$$

æquatio ad hyperbolam circa diametros.

$$60.\ uu - \frac{uz(\mp\epsilon\lambda\eta \mp \epsilon\lambda\gamma) \mp zz\lambda\gamma\gamma}{\epsilon\eta} \mp \frac{\kappa\kappa\lambda\lambda}{\beta\epsilon} = 0,$$

æquatio ad hyperbolam inter aſymptotos.

61. VII. Tandem etiam origo mutetur, & ea transferatur in O vel N.

pro x ponendum erit $\frac{\eta u}{\lambda} \pm \frac{z\gamma}{\epsilon} \mp \alpha$

manente y valore $\frac{\beta z}{\epsilon} \pm \frac{\beta u}{\lambda}$

Unde evadet.

$$62.\ u\left(\frac{\pi\eta + \beta\delta}{\pi\lambda}\right) - z\left(\frac{\mp\pi\gamma + \beta\delta}{\pi\epsilon}\right) \mp \alpha = 0$$

æquatio ad rectam

$$63.\ uu = 2uz\frac{\lambda}{\epsilon} + zz\frac{\lambda\lambda}{\epsilon\epsilon} - u\frac{\pi\lambda\eta}{\beta\beta} \mp z\frac{\pi\lambda\lambda\gamma}{\epsilon\beta\beta} \pm \frac{\alpha\lambda\lambda\pi}{\beta\beta} = 0$$

æquatio ad parabolam per ſolitam reductionem

$$64.\ uu - \frac{2uz\,(\mp\pi\epsilon\lambda\gamma\eta \mp \delta\beta\beta\epsilon\lambda) +}{\epsilon\epsilon\eta\eta\pi + \beta\beta\delta\epsilon\epsilon}$$

$$\frac{zz(\pi\lambda\lambda\gamma\gamma + \delta\beta\beta\lambda\lambda) - u(\mp 2\alpha\epsilon\epsilon\lambda\eta\pi + \delta\epsilon\epsilon\lambda\eta\pi) +}{\epsilon\epsilon\eta\eta\pi + \beta\beta\delta\epsilon\epsilon}$$

$$\frac{z(\mp 2\alpha\epsilon\lambda\lambda\gamma\pi \mp \delta\epsilon\lambda\lambda\gamma\pi) +}{\epsilon\epsilon\eta\eta\pi + \beta\beta\delta\epsilon\epsilon}$$

$$\frac{\alpha\pi\lambda\lambda\ (\alpha \mp \delta)}{\eta\eta\pi + \beta\beta\delta} = 0$$

æquatio ad ellipſim.

$$65.\ uu - \frac{2uz\,(\mp\pi\epsilon\lambda\gamma\eta \mp \delta\beta\beta\epsilon\lambda) +}{\epsilon\epsilon\eta\eta\pi - \beta\beta\delta\epsilon\epsilon}$$

$$\frac{zz(\pi\lambda\lambda\gamma\gamma - \delta\beta\beta\lambda\lambda) - u(\mp 2\alpha\epsilon\epsilon\lambda\eta\pi - \delta\epsilon\epsilon\lambda\eta\pi) +}{\epsilon\epsilon\eta\eta\pi - \beta\beta\delta\epsilon\epsilon}$$

$$z\,\frac{(\mp 2\alpha\epsilon\lambda\lambda\gamma\pi \mp \delta\epsilon\lambda\lambda\gamma\pi) +}{\epsilon\epsilon\eta\eta\pi - \beta\beta\delta\epsilon\epsilon}$$

$$\frac{\alpha\pi\lambda\lambda\ (\alpha \mp \delta)}{\eta\eta\pi + \beta\beta\delta} = 0$$

æquatio ad hyperbolam circa diametros.

$$66.\ uu - \frac{uz\,(\mp\epsilon\lambda\pi \mp \epsilon\lambda\gamma) \mp zz\lambda\gamma}{\epsilon\eta} \mp \frac{\alpha\lambda u}{\eta} \mp \frac{\alpha\lambda\lambda z}{\epsilon\eta} \mp \frac{\kappa\kappa\lambda\lambda}{\beta\eta} = 0$$

æquatio ad hyperbolam intra aſymptotos.

67. Hinc patet æquationem ad rectam ſemper eſſe unius dimenſionis.

68. Unius pariter dimenſionis eſſe quantitates, quæ in coordinatarum permutatione ponuntur pro primis coordinatis in æquationibus primariis ad lineam quamvis; atque ideo coordinatarum permutationem gradum æquationis ad lineam non mutare.

69.

69. Æquationes ad ſectiones conicas ſemper eſſe duarum dimenſionum.

70. In omni æquatione ad *parabolam* terminus altiſſimus conſtat duobus factoribus *realibus* & *æqualibus*. Nam terminus altiſſimus in Nis. 13. & 24. eſt $yy = \pm y . \pm y$.

In Nis. 33. & 39. eſt $\frac{\beta\beta zz}{\iota\iota} = \pm \frac{\beta z}{\iota} . \pm \frac{\beta z}{\iota}$.

In Nis. 45. & 51. eſt $uu \mp \frac{2\gamma uz}{\zeta} + \frac{\gamma\gamma zz}{\zeta\zeta} = (u \mp \frac{\gamma z}{\iota})(u \mp \frac{\gamma z}{\iota})$.

In Nis. 57 & 63 eſt $uu \pm 2uz\frac{\lambda}{\iota} + zz\frac{\lambda\lambda}{\iota\iota} = (u \pm \frac{\lambda z}{\iota})(u \pm \frac{\lambda z}{\iota})$.

71. In omni æquatione ad *ellipſim* terminus altiſſimus conſtat duobus factoribus *imaginariis* & *inæqualibus*. Nam terminus altiſſimus in No. 14 eſt $xx + \frac{\delta yy}{\pi} = (x + \sqrt{-\frac{\delta yy}{\pi}})(x - \sqrt{-\frac{\delta yy}{\pi}}) = (x + y\sqrt{-\frac{\delta}{\pi}})(x - y\sqrt{-\frac{\delta}{\pi}})$.

In Nis. 25. & 28. eſt $uu + \frac{\delta yy}{\pi} = (u + y\sqrt{-\frac{\delta}{\pi}})(u - y\sqrt{-\frac{\delta}{\pi}})$.

In Nis. 34. & 40. eſt $uu \pm \frac{2\gamma uz}{\iota} + zz(\frac{\pi\gamma\gamma + \delta\beta\beta}{\pi\iota\iota}) = (u \pm \frac{\gamma z}{\iota} + \frac{\beta z}{\iota}\sqrt{-\frac{\delta}{\pi}})$ & $(u \pm \frac{\gamma z}{\iota} - \frac{\beta z}{\iota}\sqrt{-\frac{\delta}{\pi}})$.

Quandoquidem multiplicatio factorum huc usque allatorum reſtituit ipſos terminos.

In Nis. 46. & 52. eſt $uu \mp \frac{2\delta\gamma\zeta uz + \delta\gamma\gamma zz}{\pi\beta\beta + \delta\zeta\zeta}$

cujus factores

$$u + \frac{z(\mp\delta\gamma\zeta + \beta\gamma\sqrt{-\delta\pi})}{\pi\beta\beta + \delta\zeta\zeta},$$

$$\& \quad u + \frac{z(\mp\delta\gamma\zeta - \beta\gamma\sqrt{-\delta\pi})}{\pi\beta\beta + \delta\zeta\zeta}$$

Facta enim multiplicatione horum factorum, & deletis delendis, inveniemus

$$uu \mp \frac{2\delta\gamma\zeta uz}{\pi\beta\beta + \delta\zeta\zeta} + \frac{\delta\pi\beta\beta\gamma\gamma zz + \delta\delta\gamma\gamma\zeta\zeta zz}{(\pi\beta\beta + \delta\zeta\zeta)^2}.$$

Eſt autem

$$\frac{\delta\pi\beta\beta\gamma\gamma zz + \delta\delta\gamma\gamma\zeta\zeta zz}{(\pi\beta\beta + \delta\zeta\zeta)^2} = \frac{\delta\gamma\gamma zz(\pi\beta\beta + \delta\zeta\zeta)}{(\pi\beta\beta + \delta\zeta\zeta)^2}$$

hoc eſt

$$\frac{\delta\gamma\gamma zz}{\pi\beta\beta + \delta\zeta\zeta}.$$

In Nis. 58. & 64. terminus altiſſimus eſt

$$uu \frac{-2uz(\pm\pi\iota\lambda\gamma\eta \pm \delta\beta\beta\iota\lambda)}{\pi\iota\iota\eta\eta + \delta\beta\beta\iota\iota} + \frac{zz(\pi\lambda\lambda\gamma\gamma + \delta\beta\beta\lambda\lambda)}{\pi\iota\iota\eta\eta + \delta\beta\beta\iota\iota}$$

qui reſolvitur in factores

$$u \frac{-z(\pm\pi\iota\lambda\gamma\eta \pm \delta\beta\beta\iota\lambda}{\pi\iota\iota\eta\eta + \delta\beta\beta\iota\iota} + \frac{\beta\iota\lambda\sqrt{(-\pi\delta\eta\eta \pm 2\pi\delta\eta\gamma - \pi\delta\gamma\gamma)})}{\pi\iota\iota\eta\eta + \delta\beta\beta\iota\iota}$$

&

$$u \frac{-z(\pm\pi\iota\lambda\gamma\eta \pm \delta\beta\beta\iota\lambda}{\pi\iota\iota\eta\eta + \delta\beta\beta\iota\iota} - \frac{\beta\iota\lambda\gamma\sqrt{(-\pi\delta\eta\eta \pm 2\pi\delta\eta\gamma - \pi\delta\gamma\gamma)})}{\pi\iota\iota\eta\eta + \delta\beta\beta\iota\iota}$$

Facta enim multiplicatione & deletis delendis, manebit

$$uu \frac{-2uz(\pm\pi\iota\lambda\gamma\eta \pm \delta\beta\beta\iota\lambda)}{\pi\iota\iota\eta\eta + \delta\beta\beta\iota\iota} + \frac{zz(\pi\pi\iota\iota\eta\eta\lambda\lambda\gamma\gamma + \delta\delta\beta^4\iota\iota\lambda\lambda +}{(\pi\iota\iota\eta\eta + \delta\beta\beta\iota\iota)^2} \frac{\pi\delta\eta\eta\beta\beta\iota\iota\lambda\lambda + \pi\delta\beta\beta\iota\iota\lambda\lambda\gamma\gamma)}{(\pi\iota\iota\eta\eta + \delta\beta\beta\iota\iota)^2}$$

Eſt autem

$$\pi\pi\iota\iota\eta\eta\lambda\lambda\gamma\gamma + \delta\delta\beta^4\iota\iota\lambda\lambda + \pi\delta\eta\eta\beta\beta\iota\iota\lambda\lambda + \pi\delta\beta\beta\iota\iota\lambda\lambda\gamma\gamma$$

Factum ex

$$\pi\lambda\lambda\gamma\gamma + \delta\beta\beta\lambda\lambda \text{ in } \pi\iota\iota\eta\eta + \delta\beta\beta\iota\iota.$$

Quare

Digitized by Google

Quare dividendo numeratorem & denominatorem coefficientis zz, inveniemus ipſum terminum altiſſimum ellipſeos.

72. In omni æquatione ad *hyperbolam* terminus altiſſimus conſtat duobus factoribus *realibus* & *inæqualibus*. Nam terminus altiſſimus in N°. 15. eſt $xx - \frac{\delta yy}{\pi} = (x + y\sqrt{\frac{\delta}{\pi}})(x - y\sqrt{\frac{\delta}{\pi}})$.

In N°. 16 eſt $xy = x \cdot y$.

In Nis. 26. & 29. eſt $uu - \frac{\delta yy}{\pi} = (u + y\sqrt{\frac{\delta}{\pi}})$ $(u - y\sqrt{\frac{\delta}{\pi}})$.

In N°. 27. eſt $uy = u \cdot y$.

In Nis. 35. & 41. eſt $uu \pm \frac{2\gamma uz}{\varepsilon} +$

$$\frac{zz(\pi\gamma\gamma - \delta\beta\beta)}{\pi\varepsilon\varepsilon}$$

qui reſolvitur in factores

$$u \pm \frac{\gamma z}{\varepsilon} + \frac{\beta z}{\varepsilon}\sqrt{\frac{\delta}{\pi}}, \ \& \ u \pm \frac{\gamma z}{\varepsilon} - \frac{\beta z}{\varepsilon}\sqrt{\frac{\delta}{\pi}} \ \text{vel}$$

$$u \frac{+z(\pm\gamma + \beta\sqrt{\frac{\delta}{\pi}})}{\varepsilon} \ \& \ u \frac{+z(\pm\gamma - \beta\sqrt{\frac{\delta}{\pi}})}{\varepsilon}$$

In Nis. 36. & 42. eſt $\frac{\beta uz}{\varepsilon} \mp \frac{\beta\gamma zz}{\varepsilon\varepsilon} =$

$$(u \mp \frac{\gamma z}{\varepsilon}) \cdot \frac{\beta z}{\varepsilon}$$

In Nis. 47. & 53 eſt $uu \frac{\pm 2\delta\gamma\zeta uz - \delta\gamma\gamma zz}{\pi\beta\beta - \delta\zeta\zeta}$

cujus factores

$$u \frac{\pm z(\pm \delta\gamma\zeta + \beta\gamma\sqrt{\delta\pi})}{\pi\beta\beta - \delta\zeta\zeta} \ \&$$

$$u \frac{\pm z(\pm \delta\gamma\zeta - \beta\gamma\sqrt{\delta\pi})}{\pi\beta\beta - \delta\zeta\zeta}$$

Siquidem facta multiplicatione, & deletis delendis, ſupereſt

$$uu \frac{\pm 2\delta\gamma\zeta uz}{\pi\beta\beta - \delta\zeta\zeta} + \frac{zz(\delta\delta\gamma\gamma\zeta\zeta - \pi\delta\beta\beta\gamma\gamma)}{(\pi\beta\beta - \delta\zeta\zeta)^2}$$

& eſt

$$\delta\delta\gamma\gamma\zeta\zeta - \pi\delta\beta\beta\gamma\gamma = -\delta\gamma\gamma(-\delta\zeta\zeta + \pi\beta\beta)$$

unde redit factum Num. 47. & 53.

In N°. 48.

eſt $\frac{\beta uz}{\gamma} \mp \frac{\beta\zeta uu}{\gamma\gamma}$

cujus factores

$$\frac{\beta u}{\gamma}, \ \& \ z \mp \frac{\beta u}{\gamma}.$$

In N°. 54. eſt $\frac{\beta uz}{\gamma} \mp \frac{\beta\zeta uu}{\gamma\gamma}$ pariter

cujus factores

$$\frac{\beta u}{\gamma}, \ \& \ z \mp \frac{\zeta u}{\gamma}$$

In Nis. 59. & 65. eſt

$$uu \frac{-2uz(\mp \pi\varepsilon\lambda\gamma\eta \pm \delta\beta\beta\varepsilon\lambda) + zz(\pi\lambda\lambda\gamma\gamma \cdot \delta\beta\beta\lambda\lambda)}{\pi\varepsilon\varepsilon\eta\eta - \delta\beta\beta\varepsilon\varepsilon}$$

cujus factores ſunt

$$u - \frac{z(\mp \pi\varepsilon\lambda\gamma\eta \pm \delta\beta\beta\varepsilon\lambda + \gamma\varepsilon\lambda(\eta \cdot \gamma)\sqrt{\pi\delta}}{\pi\varepsilon\varepsilon\eta\eta - \delta\beta\beta\varepsilon\varepsilon}$$

atque

$$u - \frac{z(\pi\varepsilon\lambda\gamma\eta - \delta\beta\beta\varepsilon\lambda - \beta\varepsilon\lambda(\eta - \gamma)\sqrt{\pi\delta}}{\pi\varepsilon\varepsilon\eta\eta - \delta\beta\beta\varepsilon\varepsilon}$$

Quod probabitur ut ſupra, facta multiplicatione, deletis delendis, & reducendo coefficientem fractum ipſius zz, cujus fractionis denominator erit $(\pi\varepsilon\varepsilon\eta\eta - \delta\beta\beta\varepsilon\varepsilon)^2$.

In N°. 60. & 66. eſt

$$uu \frac{-uz(\pm \varepsilon\lambda\eta \pm \beta\varepsilon\lambda\gamma) + zz\beta\lambda\lambda\gamma}{\beta\varepsilon\varepsilon\eta}$$

vel

$$uu - \frac{uz(\mp\lambda\eta \pm \lambda\gamma)}{\varepsilon\eta} + \frac{zz\lambda\lambda\gamma}{\varepsilon\varepsilon\eta}$$

cujus factores ſunt

$$u - \frac{\lambda\gamma z}{\varepsilon\eta} \ \& \ u - \frac{\lambda z}{\varepsilon}$$

73.

73. Æquatio gradus m, in qua indeterminatæ ſunt x & y, eſt completa, quando in ea ſunt poteſtates m; $m-1$; $m-2$; .... 1, tum ipſius x, tum ipſius y; omnia facta $x^{m-1}y$; $x^{m-1}y^2$; &c; xy^{m-1}; x^2y^{m-2} &c; & factum ex puris determinatis, ut ſponte patet.

74. Ideo æquationes ad rectam & ad ſectiones conicas, quas invenimus Nis. 62. 63. 64. 65. & 66. ſunt completæ.

75. Datis lineis inveniuntur æquationes; hoc eſt, ſi rectæ, parabolæ, ellipſeos, & hyperbolæ natura exprimatur æquatione, hæc æquatio erit aliqua ex iis quas aſſignavimus pro quaque linea. Nunc dico æquationes aſſignatas pertinere ad lineas quibus eas tribuimus; id eſt, ſi hæ æquationes conſtruantur lineis, ſingulas conſtrui lineis quas aſſignavimus. Nam

Æquatio unius dimenſionis, reducendo quantitates determinatas ad ſimpliciorem expreſſionem, revocatur ad formam.

$$\frac{mx}{n} - \frac{py}{q} \pm r = o.$$

quæ auferendo fractiones, & tranſponendo, fit

$$mqx \pm nqr = npy.$$

unde educitur analogia $np \cdot mq :: x \pm \frac{nr}{m} \cdot y$. Datur autem datarum np & mq ratio; ergo & indeterminatarum $x \pm \frac{nr}{m}$ & y; prior enim quantitas complexa variabilis eſt ob variabilem x. Sed hæ indeterminatæ ſunt unius dimenſionis, atque ideo linea recta terminantur: ergo illarum locus eſt recta.

76. Æquationes indeterminatæ duarum dimenſionum revocantur ad formulam completam

$$yy + \frac{2mxy}{n} + 2ry + \frac{pxx}{q} + 2sx + tt = o$$

unde deducitur analogia

$$p.q :: 2ry + 2sx + tt . \frac{qyy}{p} + \frac{2mqxy}{np} + xx$$

Signorum enim rationem nunc non habemus.

Poſteriores termini hujus proportionis conſtant ſinguli duobus factoribus, & datur productorum ratio. Ergo hæc æquatio pertinet ad aliquam e ſectionibus conicis.

77. In hac demonſtratione ſubſumſimus poſſe deſcribi lineam rectam & ſectiones conicas propoſitis æquationibus convenientes. Si enim lineæ deſcriptæ eſſent, demonſtrandæ manerent converſæ præcipuarum propoſitionem ad has lineas pertinentium. Nempe

Si recta linea AE poſitione detur, & in ea puncta A & D; atque ad rectam AE datumque in ea punctum D ſub dato angulo ducatur DB recta magnitudine data, & per A & B indefinita AC, & per quodvis punctum F in AE agatur FG ipſi DB parallela, & ſit ut AD ad DB ſic AF ad FG, tanget punctum G rectam AC. TAB. K. Fig. 2.

Si rectæ RQ; ST poſitione datæ ſibi occurrant in P, & recta RP magnitudine detur, deſcribatur autem diametro PQ, parametro RP, & vertice P parabola PAB rectam ST tangens in P, & agatur quavis recta DB ipſi PS parallela, & fuerit quadratum ex BD æquale rectangulo ſub parametro RP & abſciſſa PD, erit punctum B in deſcripta parabola. TAB. K. Fig. 7.

Similia dicantur de reliquis ſectionibus conicis.

Hæ autem propoſitiones facile demonſtrantur per deductionem ad abſurdum; quo pacto etiam facile demonſtratur hæc propoſitio generalis.

78. Si data ſit relatio inter abſciſſas & ordinatas, & linea tranſeat per extrema omnium ordinatarum, alia linea per eadem extrema tranſire nequit. Aut enim duæ lineæ prorſus congruent, & tunc duæ non erunt; aut alicubi different, & tunc eidem abſciſſæ reſpondebunt duæ ordinatæ inæquales; quod aut fieri non poteſt, aut ſi fieri poteſt per leges, quibus determinatur relatio inter abſciſſas & ordinatas, prior linea tranſibit per extrema ordinatarum inæqualium, & ſic duæ lineæ congruent.

Non ſemper quidem ex datis legibus & abſciſſa, poteſt determinari ordinata; ſed intelligitur ſemper futurum eſſe ut hæc detur illis datis. Recte veteres notarunt diſcrimen inter ea quæ intelliguntur, & quæ dicebant *gnorima*, & ea quæ effici poſſunt, quæ dicebant *porima*, ut & inter ea quæ per ſe poſſibilia, ſed in poteſtate noſtra non ſunt, quæ vocabant *poriſta*, & ea quæ fieri non poſſunt, quæ vocabant *apora*. Vide *Marini* præfationem ad *Euclidis* DATA. Hæc obſervatio mihi viam aperuit ad reſtituenda *Euclidis* PORISMATA.

Supereſt igitur ut oſtendamus quomodo lineæ datis æquationibus convenientes deſcribi poſſint. Ubi obſervandum.

79.

79. Has lineas tranſire debere per extrema ordinatarum tum poſitivarum tum negativarum, reſpondentium abſciſſis tum poſitivis tum negativis, ubi rerum natura id patitur: quod melius exempla explicabunt.

80. Signa eſſe negligenda ubi tantum quæritur rectarum ratio, nam ſigna indicant poſitionem, quæ rationem non mutat; ſed ſignorum rationem eſſe habendam, quando præter rationem quæritur poſitio.

Tab. L. Fig. 5. 81. Poſitis quæ N°. 21. abſciſſa x evaneſcit quando ordinata cadit in ipſa recta ST; nam poſitio ordinaræ definit magnitudinem abſciſſæ incipientis a puncto P, & in hac hypotheſi ea magnitudo nulla eſt.

82. Pariter ordinata y evaneſcit ubi locus æquationis ſecat rectam RQ; nam magnitudo ordinatæ definit intervallum puncti in loco a puncto reſpondente in linea abſciſſarum QR; quod intervallum nullum eſt quando locus occurrit rectæ QR; tunc ergo magnitudo ordinatæ pariter nulla eſt.

De locis ad rectam

83. Æquatio generalis unius dimenſionis inventa N°. 75., recipit quatuor ſignorum diverſitates.

$$1°.\ x + \frac{nr}{m} - \frac{ny}{m} = o$$

$$2°.\ x - \frac{nr}{m} - \frac{ny}{m} = o$$

$$3°.\ x + \frac{nr}{m} + \frac{ny}{m} = o$$

$$4°.\ x - \frac{nr}{m} + \frac{ny}{m} = o$$

Nam harum, quæ addi poſſent,
$\frac{nr}{m} - x + \frac{ny}{m}$, & $\frac{nr}{m} - x - \frac{ny}{m} = o$,
prima eſt ipſa ſecunda mutata per tranſlationem primi membri in ſecundum, & altera eſt quarta ſimilem mutationem paſſa. Hæ formulæ conſtruuntur eodem pacto, aliquantiſper mutata rectarum poſitione, pro ſignorum diverſitate, & facile præbent ſimpliciores formulas.

84. Pro prima $x + \frac{nr}{m} - \frac{ny}{m} = o$, pone $x = o$, manet $\frac{nr}{m} - \frac{ny}{m} = o$, vel $r = y$, quare locus occurrit rectæ ST in K, ubi PK $= r$ & punctum K ſumi debet verſus S, quia valor y eſt poſitivus. Nunc pone $y = o$, manet $x + \frac{nr}{m} = o$, vel $x = -\frac{nr}{m}$: ergo locus hujus æquationis occurrit rectæ QR in F, ubi PF $= \frac{nr}{m}$ & quidem ab P verſus R, quia valor ipſius x negativus eſt. Invenietur autem punctum F, ſumendo PG $= m$ ex TS a puncto P verſus S, & PH $= n$ ex RQ ab P verſus R, jungendo HG, & ei per K ducendo parallelam KF; eſt enim PK $= r$. Tab. L. Fig. 5.

Producta igitur indefinite recta KF, ea recta erit locus æquationis propoſitæ. Nam age BD ipſi ST parallelam; quia eſt GP (m) ad PH (n) ut PK (r) ad PF, eſt PF $= \frac{nr}{m}$;

quare FD $= \frac{nr}{m} + x$.

Eſt autem HP (n) ad PG (m), ut FD ($\frac{nr}{m} + x$) ad BD (y); ergo $ny = nr + mx$;

& $x + \frac{nr}{m} - \frac{ny}{m} = o$.

Hic pars indefinita KC eſt locus pro ordinatis poſitivis quæ reſpondent abſciſſis poſitivis; pars finita KF eſt locus pro ordinatis poſitivis quæ reſpondent abſciſſis negativis, & pars indefinita FA pro ordinatis negativis quæ reſpondent abſciſſis pariter negativis.

85. Si æquatio eſſet $x + \frac{nr}{m} - y = o$;

poſito $y = o$, maneret $x + \frac{nr}{m} = o$, ut in N°. 84, & eadem rediret conſtructio, qua inveniretur punctum F.

Sed poſito $x = o$, maneret $\frac{nr}{m} - y = o$; unde punctum K determinaretur quærendo quartam proportionalem poſt m; n; & r.

86. Sed propoſita æquatione $x + r - y = o$; puncta F & K invenirentur ponendo PF $=$ PK $= r$.

87. Secunda formula erat $x - \frac{nr}{m} - \frac{ny}{m} = o$; in qua ſi ponatur $x = o$, manebit $-r = y$, Tab. L.
quare ſumi debet PK $= r$ verſus T quia valor y eſt negativus. Sed ſi ponatur $y = o$, Fig. 6.
manet $x = \frac{nr}{m}$, quare punctum F determinabitur abſcindendo PG $= m$; PH $= n$; & qui-

quidem a P verſus Q, quia valor ipſius x poſitivus eſt, & junctæ GH ducendo parallelam KF.

Acta igitur per F & K recta indefinita AC; hæc erit locus æquationis propoſitæ, quod demonſtratur ut ſupra.

Hic pars indefinita FC pertinet ad ordinatas & abſciſſas poſitivas; pars finita FK ad ordinatas negativas & ad abſciſſas poſitivas; pars indefinita KA ad ordinatas & ad abſciſſas negativas.

88. Si æquatio eſſet $x - r - y = o$, puncta F & K invenirentur ponendo PF ab P verſus Q, quia valor ipſius x eſt poſitivus, & PK ab P verſus T, quia valor ipſius y eſt negativus, ſingulas $= r$.

Tab. L. Fig. 7. 89. Si ea eſſet $x - y = o$, angulus SPQ biſecandus eſſet recta AC quia tunc $x = y$.

Tab. L. Fig. 8. 90. Si tandem $x - \frac{ny}{m} = o$, abſcindatur ex P in Q, pars PH $= n$, per H agatur HK parallela ipſi ST & $= m$, & per P & K agatur indefinita AC, ea erit locus æquationis; quia PH (n) ad HK (m), ut PD (x) ad DB (y) & $x = \frac{ny}{m}$; & pars indefinita PC reſpondet ordinatis & abſciſſis poſitivis, PA ordinatis & abſciſſis negativis.

Æquationes Num: 89 & 90. oriuntur tum ex prima tum ex ſecunda formula.

91. Veniamus ad tertiam $x + \frac{nr}{m} + \frac{ny}{m} = o$: Tab. L. Fig. 9. poſito $y = o$ rurſus erit $x + \frac{nr}{m} = o$, & PF invenietur ut No. 84.

Sed poſito $x = o$, manet $r = - y$, quare PK $= r$ ſumi debet ex P in T.

Indefinita AC erit locus æquationis, & pars indefinita KC ſpectabit ad abſciſſas poſitivas & ordinatas negativas; pars finita KF ad ordinatas & abſciſſas negativas; & pars indefinita FA ad ordinatas poſitivas & abſciſſas negativas.

92. Si æquatio eſſet $x + r + y$; tunc PF $=$ PK $= r$ ſumendæ eſſent verſus R & T, ob negativos valores tum x, tum y.

Tab. L. Fig. 10. 93. Quarta & ultima formula eſt $x - \frac{nr}{m} + \frac{ny}{m} = o$, in qua ſi ponatur $y = o$, erit $x = \frac{nr}{m}$, & invenietur ut in No. 87; ſi vero ponatur $x = o$, erit $y = r$, & PK $= r$ ſumi debebit ex P verſus S.

Indeterminata AC acta per F & K puncta, erit locus quæſitus; pars indefinita FC ſerviet abſciſſis poſitivis & ordinatis negativis; pars terminata FK ordinatis & abſciſſis poſitivis; pars indefinita KA ordinatis poſitivis & abſciſſis negativis.

94. Si æquatio eſſet $x - \frac{nr}{m} + y$; determinaretur punctum F ut No. 93; & punctum K ab P verſus S, ob valorem ipſius y poſitivum, quærendo quartam poſt m; n; & r.

95. Si ea eſſet $x - r + y = o$: ſumendæ eſſent PF $=$ PK $= r$, ad partes Q & S, ob valores ipſarum x & y poſitivos.

96. Si tandem haberetur $x + \frac{ny}{m} = o$, ſumi deberet vel PH $= + n$; & per F agenda HK $= - m$: vel P$h = - n$, & per h agenda $hk = + m$, indefinita AC acta per P; K eſſet locus petitus. Tab. L. Fig. 11.

De locis ad ſectiones conicas.

97. Æquatio indeterminata Ni. 76. habebat hanc formam

$$yy \ldots \frac{2kxy}{l} \,..\, 2my \ldots \frac{nxx}{p} \,..\, 2qx \ldots rr = o$$

Ubi puncta ſunt pro ſignis, quæ poſſunt eſſe poſitiva vel negativa in ſingulis terminis. Ad hanc æquationem pervenimus permutatione ordinatarum, ex æquationibus ſimpliciſſimis ad ſectiones conicas. Rurſus ex æquatione maxime compoſita perveniemus ad ſimplicem apta coordinatarum permutatione. Quænam vero ſit hæc apta permutatio, duobus præcipue modis detegitur; quorum primus perficitur per extractionem radicis ut ſit in æquationibus quadraticis affectis, tanquam ſi una eſſet incognita x vel y, ſi utriusque quadratum adſit in æquatione componenda, (quod accidit in noſtra maxime compoſita,) vel ejus incognitæ cujus adeſt quadratum in æquatione propoſita, ſi unicum ſit, quod accidere poteſt in æquationibus peculiaribus. Nos quæremus valorem ipſius y. Erit ergo

$$y = \,..\, \frac{kx}{l} \ldots m + \sqrt{}(xx(+\frac{kk}{ll} \,..\, \frac{n}{p}) \ldots x(\frac{2km}{l} \,..\, 2q) + mm \ldots rr)$$

Pone

y =

Digitized by Google

$$y = u + z$$

& quidem

$$u = \dots \frac{kx}{l} \dots m$$

atque

$$z = \sqrt{(xx\,(+\frac{kk}{ll} \dots \frac{n}{p}) \dots x(2\frac{km}{l} \dots 2q) + mm \dots rr)}\,.$$

Ut antem penitius intelligantur ea, quæ dicenda ſunt, ad mentem revocemus ſequentia deſumta e conicorum doctrina.

98. Diameter & ordinata comprehendere poſſunt quemvis angulum vel acutum, vel rectum, vel obtuſum.

99. Quapropter, ſi y exponat ordinatas, quæcunque linea dicta fuerit y, ea erit vera curvæ ordinata; ſupererit quærenda diameter ad eam pertinens.

100. Diameter ordinatas biſecat, & quævis alia recta eas dividit in duas partes inæquales.

Tab. M. Fig. 1. 101. Si ergo ſit QR curvæ diameter ad quam ſpectant ordinatæ parallelæ ad rectam ST, quarum una eſt BE, erit BD = DE; harum valores ex æquatione depromti, erunt æquales, ſed alter poſitivus alter negativus.

102. Si vero eidem ordinatæ BE in H occurrat alia recta XZ diametrum RQ ſecans in F, inæquales erunt BH; & HE, & earum differentia erit HD.

103. Quare, ſi curva relata fuerit in æquatione ad coordinatas PH, HB, valor tum rectæ HB, tum rectæ HE continebit partem BD aut DE, cujus valor debet eſſe duplex, & DH cujus valor eſt ſimplex & continetur æquatione ad rectam.

104. Abſcindantur ergo more ſolito x ab XZ, incipiant a puncto P, & poſitive tendant in Z; ſed indeterminatæ y abſcindantur ab ST, inciant a puncto P & poſitive tendant in S. Æquatio ad rectam

$$u = \dots \frac{kx}{l} \dots m$$

indicabit poſitionem diametri RQ, & conſtruetur per Num. 84. ſi ſit $u = \frac{kx}{l} + m$; per Num. 87. ſi ſit $u = \frac{kx}{l} - m$; per Num. 91. ſi ſit $u = -\frac{kx}{l} - m$; & per Num. 93, ſi ſit $u = -\frac{kx}{l} + m$. His numeris addenda ſunt corollaria contenta in aliis numeris pertinentibus ad æquationes ad rectam. Hic autem diximus u quod ibi y.

105. Ponamus ergo locum æquationis $u = \dots\frac{kx}{l} \dots m$ eſſe rectam QR; id eſt in noſtra Figura eſſe PG = k; PK = l; PI = m; erit BD = DE = z, quæ incipient a puncto I & poſitive tendent in S.

Sed ubi curva occurrit diametro, ibi ordinata nulla eſt. Igitur, ut invenias verticem, pone $z = 0$; habebis

$$\sqrt{(xx(\frac{+kk}{ll} \dots \frac{n}{p}) \dots 2x(\frac{km}{l} \dots q) + mm \dots rr)} = 0$$

quæ, quadrando, & liberando xx a coeſſiciente, fiet æquatio quadratica determinata

$$+xx \dots \frac{2klmpx \dots 2llpqx + llmmp \dots llprr}{+pkk \dots lln} = 0$$

cujus radix, extracta & conſtructa ut ſolet, dabit unum punctum, in quo curva concurrit cum diametro, ſi in hac radice quantitas radicalis nulla eſt; aut duo, ſi adeſt quantitas radicalis poſſibilis; aut nullum, ſi quantitas radicalis eſt imaginaria.

Sola parabola diametro occurrit in uno puncto, reliquæ in duobus punctis; & præterea hyperbola diametro ſecundæ non occurrit: quæ recte congruunt cum æquationibus ad has curvas ſupra inventis N°. 97.

106. Nunc tres caſus diſtinguendi ſunt.

Primo, ipſius xx coefficiens $+\frac{kk}{ll} \dots \frac{n}{p}$ evaneſcit.

Secundo, is eſt negativus.

Tertio, is eſt poſitivus.

Coefficiens $+\frac{kk}{ll} \dots \frac{n}{p} = 0$, dat $+\frac{kk}{ll} = \frac{n}{p}$;

Tunc ergo æquatio generalis evadit,

$$yy \dots \frac{2kxy}{l} \dots 2my + \frac{kkxx}{ll} \dots 2qx \dots rr = 0$$

Hujus æquationis altiſſimus terminus $yy \mp \frac{2kxy}{l} + \frac{kkxx}{ll}$ habet duos diviſores reales & æquales $y \mp \frac{kx}{l}$; & $y \mp \frac{kx}{l}$; quare ea eſt ad parabolam.

107. Tunc autem, delendo in quantitate ſub ſigno ipſam $+ \frac{kkxx}{ll} - \frac{nxx}{p}$, quæ nihilo eſt æqualis, manet

$$z = \sqrt{(2x(\frac{km}{l} .. q) + mm \ldots rr)}$$

& ubi hæc eſt nihilo æqualis, id eſt ubi curva occurrit diametro QR, invenitur

$$x = -\frac{lmm \ldots lrr}{..2km .. 2ql}$$

quam abſcindes ex recta XZ a puncto P verſus Z, ſi valor ipſius x poſitivus eſt, & verſus X, ſi is eſt negativus. Sit ex. gr. poſitivus, & æqualis rectæ Pp; age per punctum p indefinitam pA ipſi ST parallelam, & diametro QR occurrentem in A; erit A vertex parabolæ, quam ideo tanget in A recta pA.

108. Sed una coordinatarum eſt $z =$ BD; altera eſt $x =$ PH, quæ non concurrunt, contra hypotheſim. Oportet igitur ut in æquatione ponamus ID (quam dicemus $= t$) pro PH $= x$; quod ſemper eſt faciendum, & quod ſemper ſic perficietur.

Quoniam datur triangulum PGK, dic GK $= f$; erit PK (l) ad KG (f) ut PH (x) ad DI (t); quare $x = \frac{lt}{f}$; quo valore ipſius x poſito in valore ipſius z, quadrato, fiet

$$zz = 2t(\frac{km \ldots ql}{f}) + mm \ldots rr$$

& eſt

$$2t(\frac{km \ldots ql}{f}) + mm \ldots rr =$$

$$(t + \frac{fmm \ldots frr}{..2km .. 2ql})(..\frac{2km .. 2ql}{f})$$

&, quia PK (l) ad KG (f) ut Pp $(\frac{lmm \ldots lrr}{..2km .. 2ql})$ ad IA; erit IA $= \frac{fmm \ldots frr}{\ldots 2kmm \ldots 2ql}$; & $zz =$ AD $(..\frac{2km .. 2ql}{f})$ quapropter erit $\ldots\frac{2km \ldots 2ql}{f}$ valor parametri.

Igitur hac parametro, vertice A, diametro AQ deſcribe parabolam, ea erit locus æquationis propoſitæ, quod facile demonſtrabis retro legendo analyſeos veſtigia ex primaria parabolæ proprietate, *rectangulum ſub parametro & abſciſſa eſt æquale quadrato ordinatæ*. Nam; ſervatis nominibus, erit

$$zz = (t + \frac{fmm \ldots frr}{\ldots 2km \ldots 2ql})(..\frac{2km \ldots 2ql}{f}) =$$

$$2t(\frac{km \ldots ql}{f}) + mm \ldots rr$$

Eſt autem GK (f) ad KP (l) ut ID (t) ad PH (x); quare $\frac{fx}{l} = t$

ergo

$$zz = 2x(..\frac{km \ldots ql}{l}) + mm \ldots rr$$

Pariter eſt GP (k) ad PK (l) ut IP (m) ad PF $= \frac{lm}{k}$, & FH $= \frac{lm}{k} + x$; atque KP (l) ad PG (k) ut FH $(\frac{lm}{k} + x)$ ad HD $= m + \frac{kx}{l}$; & HB $= y = z + m + \frac{kx}{l}$; atque ideo

$$y - m - \frac{kx}{l} = z$$

&

$$yy - 2my - 2\frac{kxy}{l} + mm + 2\frac{kmx}{l} + \frac{kkxx}{ll} = zz$$

Unde, ſubſtituendo pro zz valorem inventum, & delendo æqualia, reſtituetur æquatio propoſita. Nihil enim morari debet ſignorum diverſitas, quæ oritur a poſitione rectarum Pp; IA &c.

109. Si valor parametri eſt negativus, tum curva ſe extendit ad partes contrarias; nam mutato valore ipſius t parameter fiet poſitiva.

Idem etiam detegi poteſt, quærendo an curva occurrat rectæ TS, id eſt ponendo in æquatione $x = o$; manet enim

$$yy \ldots 2my \ldots rr = o$$

id

Digitized by Google

id eſt

$$y = -m \pm \sqrt{(+mm - rr)}$$

ſi hæc quantitas radicalis eſt poſſibilis, ſume IL = IM = $\sqrt{(mm - rr)}$, curva occurret rectæ TS in L & M; atque ideo, ſi ejus vertex eſt ultra punctum I verſus R, ea ſe extendet verſus Q, & verſus R ſi vertex eſt ultra punctum I verſus Q.

Ubi vero quantitas radicalis eſt impoſſibilis, tum curva nuſquam occurret rectæ TS, & ſe extendet verſus Q, ſi vertex eſt ultra punctum I verſus Q; ſecus autem verſus R.

110. *Secundo* Quando coefficiens $\frac{kk}{ll} - \frac{n}{p}$, eſt negativus, hoc fit quia $\frac{n}{p}$ eſt quantitas negativa & major ipſa $\frac{kk}{ll}$. Sed in extractione radicis quadraticæ ex æquatione propoſita, terminus $\frac{nxx}{p}$ translatus fuit in contrarias partes, & ſic translatus eſt negativus: erat ergo poſitivus æquatione propoſita, quæ idcirco erat

$$yy - \frac{2kxy}{l} - 2my + \frac{nxx}{p} - 2qx - rr = 0$$

Hujus terminus altiſſimus $yy - \frac{2kxy}{l} + \frac{nxx}{p}$ duos habet factores inæquales

$$y - \frac{kx}{l} + x\sqrt{(\frac{kk}{ll} - \frac{n}{p})}$$

&

$$y - \frac{kx}{l} - x\sqrt{(\frac{kk}{ll} - \frac{n}{p})}$$

qui ſunt imaginarii; quia ponitur $\frac{kk}{ll}$ minor

Tab. M. Fig. 2. quam $\frac{n}{p}$. Ergo hæc æquatio pertinet ad ellipſim. Igitur, determinata poſitione diametri RQ per æquationem $u = \frac{kx}{l} - m$, ut N°. 105., pone $z = 0$, id eſt

$$xx(+\frac{kk}{ll} - \frac{n}{p}) - 2x(\frac{km}{l} - q) + mm - rr = 0$$

aut, ponendo quantitatem poſitivam

$n - \frac{kkp}{ll} = d$; atque ideo $\frac{kk}{ll} - \frac{n}{p} = -\frac{d}{p}$; $-m - \frac{lq}{k} = g$ & $-km - lq = gk$ atque $-\frac{km}{l} - q = \frac{gk}{l}$, & $+mm - rr = hh$, erit

$$-\frac{dxx}{p} - \frac{2gkx}{l} - hh = 0$$

id eſt

$$xx = -\frac{2gkpx}{dl} - \frac{hhp}{d}$$

&

$$x = -\frac{gkp}{dl} \pm \sqrt{(\frac{ggkkpp}{ddll} - \frac{hhp}{d})}$$

Quare abſcinde a recta XZ partem $Po = \frac{gkp}{dl}$ ab P verſus Z, ſi hic valor eſt poſitivus, ut fecimus in figura, ſecus vero ab P verſus X; & hinc inde a puncto o ſume $op = on = \sqrt{(\frac{ggkkpp}{ddll} - \frac{hhp}{d})}$, & per puncta o; p; n; age ipſi ST parallelas oO; pA; nN diametro QR occurrentes in O; A; N; erit O centrum ellipſeos, ejus vertices A & N; atque ideo AN diameter.

Jam ſit, ut in N°. 108., ID = t; erit $x = \frac{lt}{f}$, quo valore ſubſtituto in

$$zz = -\frac{dxx}{p} - \frac{2gkx}{l} - hh$$

fiet

$$zz = -\frac{dlltt}{ffp} - \frac{2gkt}{f} - hh$$

aut

$$\frac{ffpzz}{dll} = \frac{ffhhp}{dll} - \frac{2fgkpt}{dll} - tt$$

eſt autem

$$\frac{ffhhp}{dll} - \frac{2fgkpt}{dll} - tt$$

factum ex

 $\frac{f}{t}$

$$\frac{f}{l}\sqrt{(\frac{ggkkpp}{ddll} \dots \frac{hhp}{d})} - \frac{fgkp}{dll} + t$$

in

$$\frac{f}{l}\sqrt{(\frac{ggkkpp}{ddll} \dots \frac{hhp}{d})} + \frac{fgkp}{dll} - t$$

id eſt rectangulum ſub AD; DN; quia invenimus, ut ſupra $IO = \frac{fgkp}{dll}$; $AO = ON = \frac{f}{l}\sqrt{(\frac{ggkkpp}{ddll} \dots \frac{hhp}{d}}$; atque ideo $AI = \frac{f}{l}\sqrt{(\frac{ggkkpp}{ddll} \dots \frac{hhp}{d})} - \frac{fgkp}{dll}$; & $AI + ID = \frac{f}{l}\sqrt{(\frac{ggkkpp}{ddll} \dots \frac{hhp}{d})} - \frac{fgkp}{dll} + t$, & $ND = NO + OI - ID = \frac{f}{l}\sqrt{(\frac{ggkkpp}{ddll} \dots \frac{hhp}{d})} + \frac{fgkp}{dll} - t$.

Eſt autem ex æquatione rectangulum ſub AD; DN, ad quadratum DB (zz) ut ffp ad dll, & ex ellipſeos natura debet eſſe ut quadratum ſemi-diametri AO ad ad quadratum ſemi-diametri Oa; ergo $\frac{ff}{ll}(\frac{ggkkpp}{ddll} \dots \frac{hhp}{d})$ ad quadratum Oa ut ffp ad dll, & quadratum $Oa = \frac{d}{p}(\frac{ggkkpp}{dd} \dots \frac{hhp}{d})$

Idem poteſt reperiri conſiderando ſemi-diametrum Oa eſſe valorem ipſius z in ipſo centro, id eſt quando $t = IO = \frac{fgkp}{dll}$, quo valore poſito in

$$zz = -\frac{dlltt}{ffp} \dots \frac{2gkt}{f} \dots hh$$

invenitur

$$zz = -\frac{dllffggkkpp}{ddl^4ffp} \dots \frac{2gkfgkp}{dllf} \dots hh = -\frac{ggkkp}{dll} \dots \frac{2ggkkp}{dll} \dots hh = \frac{ggkkp}{dll} \dots hh,$$

nam ſi æqnatio eſt

$$zz = -\frac{dlltt}{ffp} + \frac{2gkt}{f} \dots hh$$

eſt

$$IO = +\frac{fgkp}{dll}$$

&

$$+\frac{2gkt}{f} = +\frac{2ggkkp}{dll}$$

ſi vero æquatio eſt

$$zz = -\frac{dlltt}{ffp} - \frac{2gkt}{f} + hh$$

ultimus enim terminus debet eſſe poſitivus, ne valor ordinatæ z ſit imaginarius; tunc eſt

$$IO = -\frac{fgkp}{dll}$$

& rurſus

$$-\frac{2gkt}{f} = +\frac{2ggkkp}{dll}$$

Eſt autem

$$\frac{ggkkp}{dll} \dots hh = \frac{d}{p}(\frac{ggkkpp}{ddll} \dots \frac{hhp}{d}).$$

Conveniunt ergo duo valores inventi pro quadrato ſemi-diametri ſecundæ.

Sed ubi habetur $-\frac{2gkt}{f}$, eſt etiam

$$zz = -\frac{dxx}{p} - \frac{2gkx}{l} + hh$$

atque ideo, dum ponitur $z = o$,

$$x = -\frac{gkp}{dl} \pm \sqrt{(\frac{ggkkpp}{ddll} + \frac{hhp}{d})}$$

& eſt

$$\sqrt{(\frac{ggkkpp}{ddll} + \frac{hhp}{d})} \text{ major quam } \frac{gkp}{dl}$$

quia, ut inveniatur quantitas radicalis, ipſius $\frac{gkp}{dl}$ quadrato alia quantitas eſt addenda, & aggregati quærenda radix; ergo op major quam oP, & OA major quam Oa. Tunc autem eſt

$$\frac{ffhhp - 2fgkpt}{dll} - tt$$

ſa:

Digitized by Google

factum ex

$$\frac{f}{l}\sqrt{(\frac{ggkkpp}{ddll}+\frac{hhp}{d})}-\frac{fgkp}{dll}-t$$

in

$$\frac{f}{l}\sqrt{(\frac{ggkkpp}{ddll}+\frac{hhp}{d})}+\frac{fgkp}{dll}+t$$

111. Si quantitas radicalis quæ determinat diametrum, eſſet imaginaria, problema involveret aliquid abſurdi; nam ellipſis diametris omnibus occurrit in duobus punctis.

112. Si eſſet $ffp = dll$, & angulus PIF obliquus, diametri ellipſeos fierent æquales, & æquatio evaderet

$$zz = hh - \frac{2gkt}{f} - tt.$$

113. Si præterea angulus PIF eſſet rectus, ellipſis degeneraret in circulum, & eſſet $ll = ff + kk$.

114. *Tertio* coefficiens $\frac{kk}{ll} - \frac{n}{p}$ eſt poſitivus, quia vel $\frac{n}{p}$ eſt quantitas poſitiva, vel negativa quidem ſed minor quam $\frac{kk}{ll}$. Tunc factores inventi N°. 110. pro altiſſimo termino æquationis generalis, ſunt inæquales & reales, cum $\sqrt{(\frac{kk}{ll} \mp \frac{n}{p})}$ ſit realis. Igitur æquatio pertinet ad hyperbolam. Rurſus $u = -\frac{kx}{l} - m$ conſtruetur ut N°. 105; & facta ſubſtitutione quam fecimus pro ellipſi in valore ipſius z, (obſervando nunc eſſe $\frac{kkp}{ll} - n = d$, & quantitatem poſitivam,) fiet

$$z = \frac{\pm dxx}{p} - \frac{2gkx}{l} - hh.$$

ex qua, ubi $z = 0$, invenietur valor idem quem invenimus in ellipſi pro x, qui idcirco conſtruetur ut ſupra; & reperto $x = \frac{lt}{f}$, incidemus in

$$\frac{ffpzz}{dll} = \frac{ffhhp}{dll} - \frac{2fgkpt}{dll} + tt$$

& eſt

$$tt = \frac{2fgkpt - ffhhp}{dll}$$

factum ex

$$t = \frac{fgkp}{dll} + \frac{f}{l}\sqrt{(\frac{ggkkpp}{ddll} - \frac{hhp}{d})}$$

in

$$t = \frac{fgkp}{dll} - \frac{f}{l}\sqrt{(\frac{ggkkpp}{ddll} - \frac{hhp}{d})}$$

id eſt rectangulum ſub AD; DN, ut in ellipſi, mutato tantum loco ipſius ordinatæ BD, quæ cadit extra diametrum AN; unde invenietur diameter ſecunda ut pro ellipſi. TAB. M. Fig. 3.

115. Si quantitas radicalis quæ determinat diametrum, eſſet imaginaria, non ideo problema eſt reputandum abſurdum, quia ea diameter poteſt eſſe ſecunda, cui hyperbola nuſquam occurrit; ſed æquationis generalis ordinatæ ſecundum litteram x in hunc modum

$$xx - \frac{2kpxy}{ln} - \frac{2pqx}{n} - \frac{pyy}{n} - \frac{2mpy}{n} - \frac{prr}{n} = 0$$

extrahenda eſſet radix quadratica

$$x = -\frac{kpy}{ln} - \frac{pq}{n} \pm \sqrt{(\frac{+kkppyy}{llnn} - \frac{pyy}{n} - \frac{2kppqy}{lnn} - \frac{2mpy}{n} + \frac{ppqq}{nn} - \frac{prr}{n})}$$

& facta ſubſtitutione brevitatis cauſſa, cetera perficientur ut ſupra. Sed ſi & radix determinans diametrum hoc pacto, eſſet imaginaria, tunc problema contineret aliquid abſurdi.

Seu potius, ſi $\frac{f}{l}\sqrt{(\frac{ggkkpp}{ddll} - \frac{hhp}{d})}$ eſt imaginaria; ideſt ſi terminus $\frac{hhp}{d}$ eſt negativus & major termino $\frac{ggkkpp}{ddll}$, ſume $\frac{f}{l}\sqrt{(\frac{-ggkkpp}{ddll} + \frac{hhp}{d})}$ prioris oppoſitam, & habebis ſemi-diametrum ſecundam. Nam ubi AN eſt diameter transverſa eſt

$\overline{OD}^2 - \overline{ON}^2$ ad $\overline{DB}^2$ ut $\overline{ON}^2$ ad $\overline{Oa}^2$; id eſt, ſi ſe-

TAB. M. Fig. 3. ſemi-diameter $ON = \frac{f}{l}\sqrt{(-\frac{ggkkpp}{ddil} + \frac{hhp}{d}}$,

$$\overline{OD}^2 - \overline{ON}^2 = \overline{OD}^2 + \frac{ffggkkpp}{ddl^4} - \frac{ffhhp}{dll};$$

unde habebis, ſi ON eſt transverſa, $-\overline{ON}^2$ factum ex

$$+\frac{f}{l}\sqrt{(\frac{ggkkpp}{ddil} - \frac{hhp}{d})}$$

in

$$-\frac{f}{l}\sqrt{(\frac{ggkkpp}{ddil} - \frac{hhp}{d})}$$

Sed ubi ON eſt ſemi-diameter ſecunda, eſt $\overline{Od}^2 + \overline{ON}^2$ ad $\overline{d\delta}^2$ ut $\overline{ON}^2$ ad $\overline{O\alpha}^2$; &, poſito valore ſemidiametri ON ut ſupra, erit

$$\overline{OD}^2 + \overline{ON}^2 = \overline{OD}^2 - \frac{ffggkkpp}{ddl^4} + \frac{ffhhp}{dll};$$ unde

$$ON = \frac{f}{l}\sqrt{(-\frac{ggkkpp}{ddll} + \frac{hhp}{d})}.$$

116. Si $ffpp = dll$, hyperbola eſſet æquilatera.

117. In omni æquatione ſi quantitatis ſub ſigno poſitæ radix extrahi poteſt, æquatio pertinet ad rectas.

Exempla pertinentia ad parabolam, ellipſim, circulum, & hyperbolam circa diametros infra invenientur. Paulo fuſius explicanda videtur conſtructio hyperbolæ intra aſymptotos.

118. Ubi æquatio nullum continet quadratum indeterminatarum, æquatio ad hyperbolam referri non poteſt ad diametros; ſed ubi eſt ſaltem alterum quadratum indeterminatæ, æquatio conſtrui poteſt tum per diametros tum per aſymptotos.

119. Datis poſitione aſymptotis, & dato puncto deſcribi poteſt hyperbola.

TAB. M. Fig. 4. 120. Ubi æquatio ad hyperbolam intra aſymptotos eſt ſimpliciſſima $xy - \alpha\alpha = o$ facile hyperbola deſcribitur, datis poſitione recta XZ, unde abſcinduntur x, & QR, cui parallelæ ſumuntur y. Sumatur enim $KP = \alpha$; per P agatur PA parallela ipſi RQ, & æqualis ipſi PK; & per A intra aſymptotos QKZ deſcribatur hyperbola.

121. Si pro quadrato datæ α haberetur rectangulum $\alpha\beta$, media proportionalis quæri poſſet inter α & β; ſed brevius eſt abſcindere $KP = \alpha$ vel β, & per P agere parallelam ipſi QR & æqualem ipſi β vel α.

122. Ad hanc formulam ſimpliciſſimam revocandæ ſunt æquationes ad hyperbolam, & quidem per *diviſionem* indeterminatarum, quia in hyperbola ad aſymptotos relata, ordinatæ inter ſe *multiplicantur*, dum conficitur illarum rectangulum, quod eſt datæ magnitudinis. Igitur quære valorem alterius indeterminatæ diviſionem continuando quantum fieri poteſt: hinc habebis æquationes duas, alteram ad rectam, ut in aliis ſectionibus, N°. 106, alteram ad hyperbolam intra aſymptotos, quæ erit propoſita ſimplicior.

123. Petitur locus æquationis $xy + ay - bc =$; quia hic nullum eſt incognitarum quadratum, utraque eſt vel aſymptotus, vel aſymptoto parallela.

Quæramus per diviſionem valorem y; erit $y = \frac{bc}{x+a}$; &, quando $x = o$, $y = \frac{bc}{a}$, TAB. M. Fig. 4.
cui parem abſcinde PA; hyperbola tranſibit per A.

Sit nunc $y = o$; erit $bc = o$, quod eſt abſurdum, nunquam enim quantitas finita evaneſcit, niſi quando cum infinita comparatur. Ergo hyperbola numquam occurrit recte XZ, quæ ideo eſt aſymptotus, nam ſi eſſet aſymptoto parallela, ſecaretur ab hyperbola oppoſita, quod ab æquatione hac detegeretur, ea enim pertinet ad ambas hyperbolas. Sit igitur y infinita & erit tum xy, tum ay, rectangulum infinitum; ergo $bc = o$, quandoquidem nulla datur proportio inter finitum & infinitum. Igitur $xy = -ay$, & $x = -a$; huic parem ſume PK, per K age RQ parallelam TS, & intra aſymptotos QKZ deſcribe hyperbolam tranſeuntem per A, & ejus oppoſitam; erit utraque locus æquationis propoſitæ. Nempe arcus indefinitus AB locus verus x & y; AC verus y, falſus x, & hyperbola oppoſita falſus utriusque.

Age enim quamvis BD; erit $BD = y$; $KD = x + a$; & KDB rectangulum $= xy + ay$; $= bc =$ KPA rectangulo ($\frac{bc}{a}$ in a.).

Facere etiam potuiſſem $x + a = u$, unde æqua-

æquatio fieret ſimpliciſſima $uy = bc$, quæ dat eandem conſtructionem.

124. Conſtruenda ſit æquatio

$$xy + cx + by - ff = 0,$$

erit tranſponendo

$$xy + by = ff - cx$$

vel

$$y = \frac{ff - cx}{x + b}.$$

Eſt autem, reipſa dividendo,

$$\frac{-cx}{x + b} = -c + \frac{bc}{x + b}.$$

Fit ergo æquatio propoſita

$$y = \frac{ff + bc}{x + b} - c$$

TAB. M. Fig. 5. Pone $y = u + z$, & $u = -c$, quæ eſt æquatio ad rectam facile conſtruenda ponendo PF $= c$ verſus T, quia valor ipſius u eſt negativus, & per F agendo indefinitam LM ipſi XZ parallelam; manebit $z = \frac{bc + ff}{x + b}$, æquatio ad hyperbolam deſcribendam ex N° 123; ad cujus æquationem refertur, quia poteſt facile inveniri rectangulum $= bc + ff$.

Sed eadem æquatio facilius conſtrui poterat. Ubi curva occurrit rectæ ST, ibi $x = 0$. Pone in æquatione propoſita $x = 0$, manet $by = ff$, & $y = \frac{ff}{b}$, cui parem abſcinde PA; curva tranſibit per A. Pone y infinitam, id eſt hyperbolæ nunquam occurrere, aut cadere in ipſa aſymptoto, reliqui æquationis termini, cx & $-ff$, evaneſcent, & manebit $xy = -by$, aut $x = -b$. Sume PK $= -b$, per K age indefinitam QR ipſi ST parallelam, erit QR altera aſymptotus. Tandem pone x infinitam, erit $xy = -cx$; & $y = -c$; ſume PF $= -c$ & per F age LM ipſi XZ parallelam & ipſi RQ occurrentem in I; & per A, aſymptotis QI; IM deſcribe hyperbolam.

125. Proponatur æquatio

$$xy + ax - \frac{bxx}{c} + dy - gg = 0$$

Transfer in alterum membrum omnes terminos, e quibus abeſt indeterminata y, cujus quadratum non eſt in æquatione, habebis

$$xy + dy = \frac{bxx}{c} - ax + gg$$

& dividendo,

$$y = \frac{bxx - acx + cgg}{c\,(x + d)}$$

unde, peragendo diviſionem quanti $\frac{bxx - acx + cgg}{c}$ per $x + d$, obtinebis

$$y = \frac{bx - bd}{c} - a + \frac{bdd + cgg + acd}{c\,(x + d)}$$

Pone $y = u + z$, more ſolito, &

$$u = \frac{bx - bd}{c} - a,$$

quæ æquatio eſt ad rectam facile determinandam, atque

$$z = \frac{bdd + cgg + acd}{c\,(x + d)}$$

quæ æquatio eſt ad hyperbolam deſcribendam ut N°. 123.

Tamen placet ad pleniorem argumenti illuſtrationem, æquationem conſtruere a primis principiis.

Erat

$$u = \frac{bx - bd}{c} - a$$

ideo, ubi $u = 0$, manet

$$x = \frac{ac + bd}{b}$$

Cape PI $= \frac{ac + bd}{b}$, ex P verſus Z ob valorem poſitivum ipſius x. Sed ubi $x = 0$, eſt TAB. M. Fig. 6.

$$u = -\frac{ac - bd}{c}$$

cui æqualem capies PF verſus T ob negativum valorem ipſius u. Age per I & F indefinitam QR, hæc erit locus indeterminatarum u: quandoquidem ducta quavis DE parallela rectæ ST, erit IP ad PF, ut c ad b, ſic IE $=$ EP$-$PI $=$

Digitized by Google

$$x - \frac{ac - bd}{b} \text{ ad } ED = \frac{bx}{c} - a - \frac{bd}{c} = u.$$

Eminebunt ergo z, id eſt BD, ſupra rectam RQ, quæ erit altera aſymptotus hyperbolæ, quia ſi eſſe poſſet $z = 0$, etiam $xz + dz = \frac{bdd}{c} + gg + ad = 0$, quod eſt abſurdum. Sed ubi z eſt infinita, evaneſcentibus quantitatibus finitis præ infinitis, manet $x = -d$. Abſcinde igitur PK $= d$ verſus X, ob negativum ejus valorem, & per K age indefinitam LM parellelam rectæ ST, ea erit altera aſymptotus, & parallela eſt, ut jam obſervavimus, indeterminatæ ad ſecundam dimenſionem non aſſurgentis in æquatione.

Coëant rectæ LM; QR in G, erit G centrum.

Sed altera indeterminata z eſt BD; altera vero, $x + d =$ KE, incipit a puncto K & poſitive procedit verſus Z, oportet ergo revocare æquationem ad coordinatas LG; GQ, vel BD; DG. Dic DG $= t$ & pone PI ad IF ut c ad f, ut EK $(x + d)$ ad DG (t), erit $x + d = \frac{ct}{f}$; & æquatio conſtruenda fiet

$$tz = \frac{(bdd + cgg + acd)f}{cc}$$

& eſt PI ad IF, ut c ad f, ut PK (d) ad GF $= \frac{df}{c}$, & FP $= a + \frac{bd}{c}$; ſume igitur PA $= \frac{gg}{d}$; erit

$$FA = a + \frac{bd}{c} + \frac{gg}{d}$$

&

$$GF \text{ in } FA = \frac{adf}{c} + \frac{bddf}{cc} + \frac{fgg}{c} = \frac{(bdd + cgg + acd)f}{cc}$$

Tranſibit ergo hyperbola per punctum A.

126. Tandem habeatur æquatio

$$xx - \frac{2axy}{b} - \frac{cyy}{d} + fy + gx - hh = 0$$

Quia hic ſunt duo indeterminatarum quadrata, quære diviſores altiſſimi termini

$$xx - \frac{2axy}{b} - \frac{cyy}{d},$$

qui eſſe debent reales & inæquales. Hos invenies

$$x - y\left(\frac{a}{b} + \frac{1}{bd}\sqrt{(a^2d^2 + b^2dc)}\right)$$

&

$$x - y\left(\frac{a}{b} - \frac{1}{bd}\sqrt{(a^2d^2 + b^2dc)}\right)$$

vel, ponendo $\sqrt{(aadd + bbdc)} = dm$

$$x - y\left(\frac{a + m}{b}\right)$$

&

$$x - y\left(\frac{a - m}{b}\right)$$

Finge nunc alterum diviſorem, puta,

$$x - \frac{ay + my}{b} = u$$

erit

$$x - \frac{ay - my}{b} = u - \frac{2my}{b}$$

&

$$x = u + \frac{ay - my}{b}$$

& æquatio propoſita, quæ dividendo per diviſores termini altiſſimi, erat

$$x - \frac{ay - my}{b} + \frac{bfy + bgx - bhh}{bx - ay - my} = 0$$

fiet

$$u + \frac{bfy + bgx - bhh}{bu - 2my} = 0$$

vel, ſubſtituendo pro x valorem inventum.

$$u + \frac{ay - my}{b},$$

$$u + \frac{bfy + bgu + agy - gmy - bhh}{bu - 2my} = 0,$$

aut, ſublata diviſione

$$buu - 2muy + bfy + bgu + agy - gmy - bhh = 0$$

quæ ſtatim eſt immutanda ut obſervavimus N°. 108. Nam ſume PF $= b$; age per F rectam FI parallelam rectæ XZ & $= m - a$; & per P & I indefinitam RQ, indeterminatæ u eminebunt ultra rectam RQ verſus Tab. M. Fig. 7.

Digitized by Google

ſus Z. Duc enim quamlibet ED parallelam ipſi XZ; eſt PF (b) ad FI ($m - a$) ut PE (y) ad ED $= \frac{my - ay}{b}$. Ponitur autem EB $=$ Pb $= x$; ergo BD $= x - \frac{ay}{b} + \frac{my}{b} = u$.

Hic fecimus $m - a$ quantitatem poſitivam, quia m eſt major quam a: nam $aadd + bbdc = ddmm$ eſt major quam $aadd$;

Sunt igitur in æquatione indeterminatæ BD (u) & PE (y), & eam revocemus oportet ad coordinatas BD (u) & DP (s). Sit ergo PI $= k$; eſt FP (b) ad PI (k) ut EP (y) ad PD (s); quare $y = \frac{bs}{k}$, quo valore ſubſtituto in æquatione ultimo inventa, ea fiet, dividendo per b,

$$uu - \frac{2msu + bfs + ags - gms}{k} + gu - hh = 0$$

ideo

$$2msu - bfs - ags + gms = k(uu + gu - hh)$$

aut, ponenbo $\frac{bf + ag - gm}{2m} = n$, ſi ea poſitiva eſt, ut fingimus,

$$su - sn = \frac{k}{2m}(uu + gu - hh)$$

quæ æquatio conſtruetur per Num. 125. Quandoquidem eſt

$$s = \frac{k}{2m}\left(\frac{uu + gu - hh}{u - n}\right) =$$

$$\frac{k}{2m}\left(u + g + n + \frac{nn + gn - hh}{u - n}\right)$$

diviſionem perficiendo.

Sit nunc $s = t + z$, & quidem $t = \frac{k}{2m}(u + g + n)$, & $z = \frac{nn + gn - hh}{u - n}$.

Eſt autem $u = 0$ ubi locus occurrit rectæ RQ: & tunc $t = \frac{kg + kn}{2m}$, cui æqualem cape PO verſus Q ob valorem t poſitivum. Cum autem ſit t pars rectæ PQ, erit $t = 0$ in ipſo puncto P, & tunc $u = -g - n$, cui æqualem ſume PK verſus X ob negativum valorem u. Age per K & O indefinitam LM, ea erit locus ipſarum t.

Quoniam enim fecimus DB $= u$, age per B rectam Bd ipſi QR parallelam erit KP ($g + n$) ad PO ($\frac{kg + kn}{2m}$) ut $2m$ ad k ut Kd $=$ KP $+$ Pd $=$ KP $+$ DB $= g + n + u$ ad $de = \frac{k}{2m}(u + g + n) = t$.

Eminebunt ergo z ultra rectam LM verſus Q, & erit eB $= z$, ſi curva ponatur tranſire per B.

Sume nunc PN $= n$, & per N age rectam mi parallelam rectæ RQ, & occurrentem rectæ BE in n, & rectæ LM in G, erit Bn $= u - n$. Curva referetur ad indeterminatas Be; Bn; & revocari debet ad indeterminatas Be; eG $= r$ (hic pono r ſimbolum indeterminatæ), quod fiet ponendo datam PK ad KO ut $2m$ ad $2p$ erit enim PK ad KO ut Bn ($u - n$) ad Ge (r); & $u - n = \frac{mr}{p}$. Hac ſubſtitutione facta, manebit

$zr = \frac{p}{m}(nn + gn - hh)$. Eſt autem PK ad KO ut $2m$ ad $2p$ ut PN (n) ad OG $= \frac{pn}{m}$. Sume igitur Oa $= n + g - \frac{hh}{n}$, & intra aſymptotos MGm deſcribe hyperbolam per a & ejus oppoſitam ABC; habebis locum petitum.

Ad modum harum conſtructionum perficientur reliquæ pro ſignis & quantitatibus datis.

Duas ultimas conſtructiones aſymptotorum adjeci, ut pateret quomodo illas daret diviſio. Sed eſt alia methodus, deſcripta ab HUGENIO in *variis geometricis* ſuis, quæ extant in operum volumine primo, tomo ſecundo. Hæc autem methodus eſt hujuſmodi.

127. Æquatio generalis ad hyperbolam, per extractionem radicis, fit

$$y = u \pm \sqrt{\left(+\frac{dxx}{p} \pm \frac{2gkx}{l} \pm hh\right)}$$

ut patet ex N°. 114. poſita reductione N^{i}. 110; ut eam poſuimus in N°. 114. Reperta igitur, ut N°. 105. poſitione rectæ RQ, & determinatis Po $= \frac{gkp}{dl}$; & $op = on = \sqrt{\left(\frac{ggkkpp}{ddll} \pm \frac{hhp}{d}\right)}$; occurrat altera aſymptotus rectæ ST in M, & rectæ pA productæ in L, erit AL æqualis ſemidiametro ſecundæ Oa $= \frac{d}{p}\sqrt{\left(\frac{ggkkpp}{ddll} \pm \frac{hhp}{d}\right)}$, quæ eſt ad po ut d ad p. Eſt autem LA ad IM ut AO ad OI, ut po ad oP; quare LA ad IM ut po ad oP; & *alternando* LA ad po (id eſt d ad p) ut IM ad oP $= \frac{gkp}{dl}$; eſt ergo IM $=$ TAB. M. Fig. 3.

$Im = \frac{gk}{l}$; dimidiato coëfficienti ipſius x in quantitate radicali: quibus ſumptis, erunt ductæ OM; Om aſymptoti.

Si vero altera indeterminata x eſt parallela aſymptoto uni, quod cognoſcitur ex æquatione propoſita, in qua non eſt quadratum ipſius x, ſumi unica IM poteſt pro altera aſymptoto.

Nunc ſi habetur

$$z = \sqrt{\left(+\frac{ddx}{p} - \frac{2gkx}{l} + bb\right)}$$

pone $x = 0$; manebit $z = b$, cui æqualem ſumo Il, hyperbola tranſibit per l; & ſi Il

Tab. N. Fig. 2. (b) eſt minor quam IM $\left(\frac{gk}{p}\right)$, ea cadet in angulo MOm; & in angulo ei deinceps, ſi Il (b) eſt major quam IM $\left(\frac{gk}{p}\right)$.

Quando autem eſt $+ bb$ in valore ipſius z eſt op minor quam oP; nam utramque invenimus ponendo

$$x = 0 = \sqrt{\left(+\frac{dxx}{p} - \frac{2gkx}{l} + bb\right)}$$

unde

$$x = -\frac{gkp}{dl} + \sqrt{\left(\frac{ggkkpp}{ddll} - \frac{bbp}{d}\right)}$$

& quantitas ſub ſigno minor eſt quantitate extra ſignum. Quare ſi eſt $+\frac{gkp}{dl}$, hyperbola A occurret bis rectæ ST; & hyperbola BNE,

Tab. N. Fig. 3. ſi eſt $-\frac{gkp}{dl}$; ponendo nempe Il minorem quam IM; & quando Il eſt major quam IM, utraque hyperbola oppoſita occurrit rectæ ST.

Sed ſi $z = \sqrt{-bb}$, poſito $x = 0$ tunc eſt

Tab. N. Fig. 1. $op = \sqrt{\left(\frac{ggkkpp}{ddll} + \frac{bbp}{d}\right)}$ major quam oP, quare neutra hyperbola occurret rectæ ST, & determinari debet punctum A ut ſupra. Si tandem eſſet $z = 0$; curva tranſiret per punctum I.

Altera methodus innititur eliminatione ſecundi termini, quam infra docebit Auctor noſter & quam breviter exponam pro æquationibus quadraticis.

128. Æquationem diſpone ſecundum dimenſiones alterius indeterminatæ, & hujus altiſſimam poteſtatem libera a coëfficiente determinato, ut ſit æquatio generalis ad ſectiones conicas

$$yy \begin{array}{l} -\frac{2kxy}{l} + \frac{nxx}{p} \\ -2my + 2qr \\ + rr \end{array} = 0$$

Coëfficiens termini ſecundi hic ponitur $-\frac{2kx}{l} - 2m$; cujus dimidium eſt $-\frac{kx}{l} - m$. Pone y æqualem alteri indeterminatæ z, cui junges dimidiatum coëfficientem termini ſecundi, mutatis ſignis. Quia poſuimus hunc coëfficientem negativum, facere debemus

$$y = z + \frac{kx}{l} + m.$$

unde

$$yy = zz + \frac{2kzx}{l} + 2mz + \frac{kkxx}{ll} + \frac{2kmx}{l} + mm$$

&

$$-\frac{2kxy}{l} = -\frac{2kzx}{l} - \frac{2kkxx}{ll} - \frac{2kmx}{l}$$

atque

$$-2my = -2mz - \frac{2kmx}{l} - 2mm$$

Quibus in unum collectis, & addito ultimo æquationis propoſitæ termino, in quo non eſt y; habetur

$$zz - \frac{kkxx}{ll} + \frac{nxx}{p} - \frac{2kmx}{l} + 2qx + rr - mm = 0$$

Æquatio carens termino ſecundo, quod attinet ad indeterminatam z. Ut idem efficiamus pro indeterminata x, oportet, ex regula, illius terminum altiſſimum liberare a coëfficiente, niſi ſit $-\frac{kk}{ll} = \frac{n}{p}$; quod ubi accidit res peracta eſt, & manet æquatio ad parabolam.

Quod ſi non accidat, pone ut jam pro ellipſi & hyperbola $\pm\frac{d}{p}$ pro $\frac{n}{p} - \frac{kk}{ll}$, nempe $+$ ſi fractio $\frac{n}{p} - \frac{kk}{ll}$ eſt poſitiva, $-$ ſi ea eſt negativa. Item $-\frac{gk}{l}$ pro $-\frac{km}{l} + q$ & hk pro $rr - mm$. Æquatio fiet

zz

Digitized by Google

$$zz + \frac{dxx}{p} - \frac{2gkx}{l} + bb = 0$$

aut

$$\frac{pzz}{d} + xx - \frac{2gkpx}{dl} + \frac{phb}{d} = 0$$

Fac

$$x = u + \frac{gkp}{dl}$$

erit

$$xx = uu + \frac{2gkpu}{dl} + \frac{ggkkpp}{ddll}$$

&

$$-\frac{2gkpx}{dl} = -\frac{2gkpu}{dl} - \frac{2ggkkpp}{ddll}$$

Quibus in unam ſummam collectis & additis reliquis æquationis terminis, fit

$$\frac{pzz}{d} + uu - \frac{ggkkpp}{ddll} + \frac{phb}{d} = 0$$

Prima reductio $y = z + \frac{kx}{l} + m$, dat

Tab. M. Fig 1.2.3. $y - \frac{kx}{l} - m = z$. Cum autem ſit HB $= y$, & HD $= \frac{kx}{l} + m$; patet eſſe DB $= z$; ut in N°. 105.

Jam ponamus in

$$zz = \frac{dxx}{p} - \frac{2gkx}{l} + bb$$

fractionem $\frac{lt}{f}$ pro x, reſtituetur ipſa æquatio inventa methodo priori. Unde patet has duas methodos congruere; quod etiam melius diſpiciet qui conſideret eſſe $Po = \frac{gkp}{dl}$, ut ſupra; atque ideo IO $= \frac{fgkp}{dll}$, & $\frac{fu}{l} + \frac{fgkp}{dll} = t$.

Hanc poſteriorem methodum primus, quod ſciam, explicavit *Joannes* de Witt, in elementis curvarum linearum, quæ leguntur inter opera Cartesii.

Tertia methodus aſſumit æquationem compoſitam, & cum ſingulis hujus terminis comparans terminos ſingulos æquationis conſtruendæ, detegit quantitatem & poſitionem rectarum. Eam primus pertractavit Craigius, adhibuerunt Hospitalius, Wolfius, & alii multi; qua de cauſſa illam prætereo.

Quarta quærit ea puncta, quæ determinant ſectionem conicam, ponendo ſingulas indeterminatas $= 0$; unde habentur pro ſingulis aut duo puncta, aut unum, aut fortaſſe nullum. Reliqua puncta deteguntur aſſignando alteri indeterminatæ valorem maxime commodum, quoties opus eſt ut tria puncta pro circulo, quatuor pro parabola, quinque pro ellipſi & hyperbola definiantur.

Satis fuſe, niſi fallor, expoſita inveſtigatione rectarum, quæ determinant ſectiones conicas, breviter afferam theoremata, quæ ex hac inveſtigatione conficiuntur, & quibus uti poſſumus tanquam regulis ad rem facilius perficiendam.

129. Quando æquatio continet ſaltem quadratum unius indeterminatæ, quam pono eſſe y abſciſſam ex TS a puncto P; & ei rectæ parallelas ſumi veras ordinatas ad curvam. Tab. M. Fig. 1.2.3.

130. Veræ diametri RQ poſitio determinabitur conſtruendo dimidiatum ſecundum terminum æquationis propoſitæ ordinatæ ſecundum dimenſionem litteræ y. (N°. 104.)

131. Hoc facto extrahatur radix æquationis: aut ſub ſigno eſt quadratum alterius indeterminatæ x, aut non eſt.

132. Si non eſt, æquatio eſt ad parabolam; cujus vertex A invenietur, quærendo Pp tertiam proportionalem poſt coefficientem indeterminatæ x ſub ſigno, & radicem quantitatis omnino cognitæ pariter ſub ſigno; unde inveniemus IA quartam poſt FP; Pp; & FI. (N°. 107. 108.) Tab. M. Fig. 1.

133. Parameter autem ſemper eſt quarta proportionalis poſt IF; FP; vel GK; KP, & coefficientem indeterminatæ x ſub ſigno. (N°. 108.)

134. Si adeſt quadratum indeterminatæ x; æquatio erit ad ellipſim vel ad hyperbolam, quarum centrum O invenietur ſumendo Po quartam poſt numeratorem, & denominatorem xx ſub ſigno, & dimidiatum coefficientem quem habet ſecundus terminus quantitatis ſub ſigno ordinatæ ſecundum dimenſiones litteræ x. Hinc habebitur IO quarta poſt FP; Po; FI. (N°. 110.) Tab. M. Fig. 2. 3.

135. Poſt eundem numeratorem & denominatorem xx ſub ſigno, & terminum omnino cognitum quantitatis ſub ſigno, quære quartam;

PROB. XXVIII.

TAB. III. Fig. 9. *Rectam DC datæ longitudinis in datam conicam ſectionem DAC ſic inſcribere ut ea per punctum G poſitione datum tranſeat.*

Sit AF axis curvæ, & a punctis D, G, & C ad hunc demitte normales DH, GE, & CB. Jam, ad determinandam poſitionem rectæ DC, puncti D aut C inventio proponi poteſt; ſed cum hæc ſint germana, & adeo paria ut ad alterutrum determinandum operatio ſimilis evaſura eſſet, ſive quærerem CG, CB, aut AB; ſive comparia DG, DH, aut AH; ea propter de tertio aliquo puncto proſpicio quod utrumque D & C ſimiliter reſpectet, & una determinet. Et hujuſmodi video eſſe punctum F.

Jam ſit $AE = a$, $EG = b$, $DC = c$, $EF = z$; & præterea cum relatio inter AB & BC habeatur in æquatione quam ſuppono pro conica ſectione determinanda datam eſſe, ſit $AB = x$, & $BC = y$, & erit $FB = x - a + z$. Et propter GE. EF :: CB. FB erit iterum $FB = \frac{yz}{b}$. Ergo $x - a + z = \frac{yz}{b}$.

His ita præparatis tolle x per æquationem quæ curvam deſignat. Quemadmodum ſi curva ſit parabola per æquationem $rx = yy$ deſignata, ſcribe $\frac{yy}{r}$ pro x; & orietur $\frac{yy}{r} \text{——} + z = \frac{yz}{b}$. Et extracta radice $y = \frac{rz}{2b} \pm \surd(\frac{rrzz}{4bb} + ar - rz)$. Unde patet $\surd(\frac{rrzz}{bb} + 4ar - rz)$ eſſe differentiam gemini valoris y, id eſt linearum $+$ BC & $-$ DH, adeoque (demiſſo DK in CB normali) valere CK (a). Eſt autem FG . GE :: DC . CK, hoc eſt

tam; qua auge aut minue quadratum ipſius Po; habebis $op = on$; & hinc ſemi-diametrum alteram $AO = ON$; quæ erit quarta poſt FP; po; & FI; & ſi op determinatur per quantitatem imaginariam, & æquatio eſt ad hyperbolam, erit AN diameter ſecunda. (N°. 110. 115.)

136. Tandem poſt denominatorem & numeratorem ipſius xx ſub ſigno, & AO quadratum, quære quartam; hæc erit alterius ſemi-diametri Oa quadratum. (N°. 110. 115.)

TAB. N. Fig. 1. 2. 3. 137. Sed quando æquatio eſt ad hyperbolam & eam deſcribere vis intra aſymptotos; definitis, ut ſupra, poſitione rectæ RQ, & punctis O; o, ſume $IM = Im$, æquales ſingulas dimidiato coefficienti quem habet ſecundus terminus quantitatis ſub ſigno ordinatæ ſecundum dimenſiones litteræ x; age OM; Om habebis aſymptotos. (N°. 127.)

138. Si terminus cognitus quantitatis ſub ſigno, eſt poſitivus; quære mediam inter ejus factores, & huic mediæ æqualem cape Il; hyperbola tranſibit per l. TAB. N. Fig. 2. 3.

139. Si is eſt negativus, determina punctum A ut N°. 107. 110; aut (ſi op eſt quantitas imaginaria) punctum a; hyperbola tranſibit per A. TAB. N. Fig. 1.

140. Si is nullus eſt, hyperbola tranſibit per I, & erit OI ſemi-diameter transverſa, quæ non poteſt eſſe imaginaria, quia Po non determinatur per aliquam radicalem.

141. Sed ſi nullum eſt quadratum indeterminatarum; utraque coordinata parallela eſt aſymptotis quæ facile determinantur ex N^is^. 120..124.

(a) Hæc quidem ſubtiliter, ſed ut melius percipiamus quam vera ſint, dicamus $DH = u$. Dum ſit GE (b) ad EF (z) ut DH (u) ad HF

eſt $\surd(bb+zz)\ b :: c.\ \surd(\frac{rzz}{bb} + 4ar - 4rz)$. Ducendoque quadrata extremorum & mediorum in invicem, & facta ordinando orietur

$$z^4 = \frac{4bbrz^3 \begin{matrix}-4abbr\\ -bbrr\end{matrix} zz + b^4rz \begin{matrix}-4ab^4r\\ +b^4cc\end{matrix}}{rr}$$

æqua-

$HF = \frac{uz}{b}$, erit $AH = AE - EF - FH = a - z - \frac{uz}{b}$. Sed, per parabolæ proprietatem, rectangulum ſub parametro (r), & AH æquale eſt quadrato ipſius DH; ergo

$$ar - rz - \frac{ruz}{b} = uu.$$

Invenerat Auctor

$$ar - rz + \frac{ryz}{b} = yy$$

Hæ duæ æquationes ſimiles ſunt, & fient prorſus eædem, ſi ponas in prima $-y$ pro u, vel in ſecunda $-u$ pro y, quod facere licet, quia alterutra littera indicat ambigue ordinatas ad parabolam, quæ hic ponuntur tendere ad contrarias partes, atque ideo altera poſitiva eſt ubi altera eſt negativa. Hæc quam recte ſe habeant melius patebit, ſi ponamus rectam CD non ſecare axem: tunc enim punctum F cadet extra parabolam; & erit $AH = AE - EF + FH = a - z + \frac{uz}{b}$; unde

Tab. N. Fig. 5.

$$-rz + ar + \frac{ruz}{b} = uu$$

& $AB = BF - FE + EA = \frac{zy}{b} + a - z$;

quare

$$+\frac{rzy}{b} + ar - rz = yy$$

quæ duæ æquationes omnino ſimiles ſunt, quia utraque ordinata eſt poſitiva. In prima hypotheſi, ſubducendo

ab $ar - rz + \frac{ryz}{b}$

ipſam $ar - rz - \frac{ruz}{b}$

& ab yy quadratum uu, manet

$$\frac{ryz}{b} + \frac{ruz}{b} = yy - uu,$$

& dividendo per communem diviſorem $y+u$

$$\frac{rz}{b} = y - u$$

& eſt $y-u$ ſumma rectarum $CB = +y$; & $DH = -u$; quare illarum differentia $= y+u$, erit

$$2\surd(\frac{rrzz}{4bb} + ar - rz)$$

quod etiam ſic, longiore via ſed fortaſſe planiore, inveniri poteſt. Eſt

$$\frac{rz}{b} = y - u$$

unde

$$u = y - \frac{rz}{b}$$

&

$$2uy = 2yy - \frac{2rzy}{b}$$

atque

$$uu = yy - \frac{2ryz}{b} + \frac{rrzz}{bb}$$

ergo

CK·

Digitized by Google

æquatio quatuor tantum dimenſionum, quæ ad octo dimenſiones aſcendiſſet ſi quæſiviſſem CG vel CB aut AB. (*b*)

PROB.

$$CK^2 = (y+u)^2 = yy + 2uy + uu$$

erit, ſubſtituendo,

$$4yy - \frac{4rzy}{b} + \frac{rrzz}{bb} = 4ar - 4rz + \frac{rrzz}{bb}$$

ponendo pro $4yy$ valorem $4ar - 4rz + \frac{4ryz}{b}$; deductum ex æquatione Auctoris, & delendo contraria.

Sed in altera hypotheſi, ſubducendo

$$\text{ab } \frac{rzy}{b} + ar - rz$$

quantitatem $\frac{ruz}{b} + ar - rz$

& ab yy quadratum uu ſupereſt

$$\frac{ryz - ruz}{b} = yy - uu$$

&

& dividendo per communem diviſorem $y - u$

$$\frac{rz}{b} = y + u$$

quare eſt $\frac{rz}{b}$ ſumma ordinatarum CB & DH; unde vel methodo Auctoris vel noſtra invenitur illarum differentia CK, qualis eſt apud Newtonum.

Ceterum ſi alia æquatio ad ſectiones conicas aſſumeretur, ut $xx = \pm \frac{ddyy}{ee} + dd$; quæ oritur vel ex $dd - xx = \frac{ddyy}{ee}$ ad ellipſim, vel ex $xx - dd = \frac{ddyy}{ee}$ ad hyperbolam, eodem pacto res peragi poſſet. Aſſumamus enim $xx = \frac{ddyy}{ee} + dd$ ad hyperbolam, erit

$$x = \sqrt{\left(\frac{ddyy}{ee} + dd\right)} = \frac{d}{e}\sqrt{(yy+ee)}$$

&

$$\frac{d}{e}\sqrt{(yy+ee)} = \frac{yz}{b} + a - z$$

unde quadrando,

$$\frac{ddyy + eedd}{ee} = \frac{yyzz}{bb} + \frac{2yz\,(a-z)}{b} + (a-z)^2$$

& auferendo fractiones

$$bbddyy + bbeedd = eeyyzz + 2beeyz\,(a-z) + bbee\,(a-z)^2$$

vel, tranſponendo & dividendo,

$$yy = \frac{2beeyz\,(a-z) + bbee\,(a-z)^2 - bbeedd}{bbdd - eezz}$$

quare

$$y = \frac{beez\,(a-z) \pm \sqrt{(bbe^4zz\,(a-z)^2 + (bbee\,(a-z)^2)(bbdd-eezz) - bbeedd\,(bbdd-eezz))}}{bbdd - eezz}$$

id eſt

$$y = \frac{beez\,(a-z) \pm be\left(\sqrt{(eezz + bbdd - eezz)(a-z)^2 - dd\,(bbdd - eezz)}\right)}{bbdd - eezz}$$

quod facit duplam quantitatem ſub ſigno

$$\frac{2bed\sqrt{(aabb - bbdd - 2abbz + bbzz + eezz)}}{bbdd - eezz}$$

differentiam gemini valoris y; unde ſequendo veſtigia Auctoris, incidemus in æquationem quatuor dimenſionum, ſed magis compoſitam.

(*b*) 142. Æquationes determinatæ ſecundo gradu altiores conſtruuntur per aptorum locorum interſectiones; & æquationes quatuor dimenſionum componi ſolent per duas ſectiones conicas, quarum altera ſumitur ad arbitrium, ſed quam commodiſſima; altera determina-

uatur ſubſtituendo in æquatione propoſita valorem incognitæ depromtum ex æquatione locali aſſumta. Rem explicemus exemplo æquationis ab Auctore inventæ.

Quia illius ſecundum membrum totum ductum eſt in $\frac{bb}{rr}$, aſſumo æquationem ad parabolam $\frac{bb}{r}u = zz$: quare ſubſtituendo $\frac{b^4uu}{rr}$ pro z^4; $\frac{bbuz}{r}$ pro z^3, & $\frac{bbu}{r}$ pro zz; æquatio propoſita

$$rrz^4 = 4bbrz^3 - 4abbrzz - bbrrzz + 4b^4rz - 4ab^4r + b^4cc$$

fit

$$b^4uu = 4b^4uz - 4ab^4u - b^4ru + 4b^4rz - 4ab^4r + b^4cc$$

quæ, dividendo per b^4, mutatur in

$$uu = 4uz - 4au - ru + 4rz - 4ar + cc$$

Ea eſt ad hyperbolam, quia termini altiſſimi $uu - 4uz$, diviſores ſunt u & $u - 4z$, reales & inæquales. Eam, exercitii gratia, conſtruamus a primis principiis. Eſt

$$u = 2z - 2a - \frac{r}{2} \pm \sqrt{(4zz - 8az - 2rz + 4aa + 2ar + \frac{rr}{4} + 4rz - 4ar + cc)}$$

Quantitas radicalis, per reductionem, fit

$$\sqrt{(4zz - 8az + 2rz + 4aa - 2ar + \frac{rr}{4} + cc)} = t$$

Sit $s = 2z - 2a - \frac{r}{2}$, quam ut invenias pone rectam $AI = \frac{r}{4}$, erit $EI = a + \frac{r}{4}$, & per I age indefinitam IL parallelam rectæ EG. Erit IL datæ parabolæ directrix.

TAB. O. Fig. 1.

Ex IL abſcinde $IL = 2EI = 2a + \frac{r}{2}$; per L duc indefinitam Le parallelam ipſi IE; & rectæ EG occurrentem in e; & per E ac L puncta age rectam indefinitam EL; & per ejus punctum quodvis M duc ipſi IL parallelam Mm rectæ eL occurrentem in N, & rectæ EA in m.

Eſt EI ad IL; ut 1 ad 2, ut Em (z) ad mM $= 2z$. Sed MN = Mm − mN = Mm − IL $= 2z - 2a - \frac{r}{2} = s$; & ubi $s = o$, eſt $z = a + \frac{r}{4}$ = IE; ergo eſt L punctum origo ipſarum s; & harum locus eſt indefinita recta EL; & recta abſciſſarum eſt indefinita LN.

Cum autem ſit $u = s + t$; & t ordinata ad curvam, cujus diameter jacet ſecundum rectam EL, (quæ determinata fuit conſtruendo dimidiatum ſecundum terminum æquationis propoſitæ, ſecundum Num. 130. de Loc. Geom.) atque $u = s$, quando $t = o$; ipſæ u ſupra rectam NL verſus M, & indeterminatæ t hinc terminabuntur a recta EL, inde a curva, & in quolibet puncto rectæ EL erit $t = o$, quod accidit ubi curva ſecat rectam EL. Ponamus ergo

$$t = \sqrt{(4zz - 8az + 2rz + 4aa - 2ar + \frac{rr}{4} + cc)} = o$$

tunc erit

$$zz = 2az - \frac{rz}{2} - aa + \frac{ar}{2} - \frac{rr}{16} - \frac{cc}{4}$$

& eſt

$$-aa + \frac{ar}{2} - \frac{rr}{16} = -(a - \frac{r}{4})^2$$

igitur

$$z = a - \frac{r}{4} \pm \sqrt{((a - \frac{r}{4})^2 - (a - \frac{r}{4})^2 - \frac{cc}{4})}$$

$$= a - \frac{r}{4} \pm \sqrt{-\frac{cc}{4}},$$

quia $+(a - \frac{r}{4})^2$ & $-(a - \frac{r}{4})^2$ ſeſe deſtruunt. Sume igitur $LO = \frac{r}{2}$; erit Oe = eL − LO = EI − OL $= a + \frac{r}{4} - \frac{r}{2} = a - \frac{r}{4}$. Eſt autem 4 (numerator coefficientis zz ſub ſigno) ad 1 (denominatorem) ut $4a - r$ (dimidiatus coefficiens ſecundi termini) ad $a - \frac{r}{4}$, ex N°. 134. Jam, ubi $t = o$, eſt

eſt $z = oO = \sqrt{-\frac{cc}{4}}$; quæ quantitas cum ſit imaginaria, indicat curvam rectæ EL nuſquam occurrere, vel eam eſſe ſecundam hyperbolæ diametrum; ut ex N°. 135.

A recta oL hinc inde a puncto O abſcinde $OQ = Oq = \frac{c}{2}$; per O; Q; & q puncta age rectas ipſi Ee parallelas, & occurrentes rectæ EL in o; R; & r; erit punctum o centrum hyperbolæ, & recta definita Rr ejus diameter ſecunda.

Altera ſemi-diameter eſt valor ordinatæ s in ipſo centro. Tunc autem eſt $z = oO = a - \frac{r}{4}$; quo valore poſito in valore ipſius s, inveniemus

$$s = \sqrt{\left(4\left(a - \frac{r}{4}\right)^2 - (8a - 2r)\left(a - \frac{r}{4}\right) + 4\left(a - \frac{r}{4}\right)^2 + cc\right)}$$

Eſt autem $(8a - 2r)\left(a - \frac{r}{4}\right) = 8\left(a - \frac{r}{4}\right)\left(a - \frac{r}{4}\right)$; ergo, ceteris terminis ſe deſtruentibus, erit $s = c$, cui æquales cape oS; os hinc inde a puncto o in recta oO, & per S & s puncta deſcribe hyperbolas oppoſitas circa diametrum transverſam Ss, & ſecundam Rr: habebis locum æquationis propoſitæ. Eſt autem 1, (denominator coefficientis zz ſub ſigno) ad 4 (numeratorem) ſic $\frac{cc}{4}$ (quadratum unius ſemi-diametri) ad cc. Conveniunt ergo hæc cum N°. 136.

Recta mM ponatur occurrere hyperbolæ in P, unde ages Pp ipſi EL parallelam, & occurrentem in p diametro sS. Erit ex hyperbolæ natura rectangulum ſub sp; pS ad quadratum Pp ut quadratum So ad quadratum oR, ut 4 ad 5. quandoquidem eſt $LE = \sqrt{(\overline{LI}^2 + \overline{IE}^2)} = \sqrt{(\overline{LI}^2 + 4\overline{LI}^2)} = \sqrt{5\overline{LI}^2} = LI\sqrt{5}$; & IL ad LE ut 1 ad $\sqrt{5}$. Sed IL ad LE ut OL ad Lo ut QL ad LR, ut OQ ad RO; igitur ut 1 ad 5 ſic quadratum OQ, (aut quarta pars quadrati So quia recta So facta eſt dupla rectæ OQ) ad quadratum Ro; & tandem ut 4 ad 5 ſic rectangulum ſub sp; pS ad quadratum pP.

Pariter eſt ut IL ad LE (1 ad $\sqrt{5}$) ſic OL $\left(\frac{r}{2}\right)$ ad $Lo = \frac{r}{2}\sqrt{5}$; & IL ad EL (2 ad $\sqrt{5}$) ut NM $\left(s = 2z - 2a - \frac{r}{2}\right)$ ad $ML = \left(z - a - \frac{r}{4}\right)\sqrt{5}$; & $Mo = \left(z - a + \frac{r}{4}\right)\sqrt{5} = Pp$, cujus quadratum eſt

$$\left(zz - 2az + \frac{rz}{2} + aa - \frac{ar}{2} + \frac{rr}{16}\right)5$$

Sed $pS = po - oS = s - c = u - 2z + 2a + \frac{r}{2} - c$, ac $ps = po + oS = u - 2z + 2a + \frac{r}{2} + c$; quia erat $u - s = s$, & $s = 2z - 2a - \frac{r}{2}$; quare rectangulum ſub ps; pS eſt

$$uu - 4uz + 4au + ur + 4zz - 8az - 2rz + 4aa + 2ar + \frac{rr}{4} - cc$$

quod cum ſit ad

$$\left(zz - 2az - \frac{rz}{2} + aa + \frac{ar}{2} + \frac{rr}{16}\right)5,$$ ut 4 ad 5,

tandem erit, multiplicando media & extrema, ac dividendo per 5, ac delendo æqualia

$$uu - 4uz + 4au + ru - 4rz + 4ar - cc = 0$$

æquatio propoſita.

Si per S agatur rectæ LR parallela ST ipſi QR occurrens in T & per o recta oX parallela rectæ AE, & rectæ QR occurrens in X erit $TR = So = c = RX$ quia RQ, cum ſit dupla QL, eſt $c - r$, & cum QX aut $Oo = 2OL = r$, facit c. Quare producamus rectam TS donec rectæ oX occurrat in Z; erit XT ad ad TZ ut oS ad SZ; ſed XT oſtenſa eſt dupla ipſius oS, eſt ergo TZ dupla ipſius ZS, quæ ideo eſt æqualis ipſi ST, id eſt ſemi-diametro ſecundæ, quare, acta To, erunt To; oZ aſymptoti hujus hyperbolæ; quod recte congruit cum æquatione, in qua z eſt unius dimenſionis, atque ideo debet eſſe vel aſymptotus, vel aſymptoto parallela.

Præterea, recta To occurrat rectæ QO in t, & rectæ oE in i; eſt TX ($2oS = 2c$) ad Xo $\left(QO = \frac{c}{2}\right)$ ut 4 ad 1, ut oO ($2OL = r$)

ad

Digitized by Google

PROB. XXIX.

Datum angulum per datum numerum multiplicare vel dividere.

In angulo quovis FAG inſcribe lineas AB, BC, CD, DE, *&c.* ejusdem cujusvis longitudinis, & erunt triangula ABC, BCD, CDE, DEF, *&c.* iſoſcelia, adeoque per 32. I. Elem. erit ang. CBD = ang. A + ACB = 2 ang. A, & ang. DCE = ang. A + ADC = 3 ang. A, & ang. EDF = A + AED = 4 ang. A, & ang. FEG = 5 ang. A, & ſic deinceps. Poſitis jam AB, BC, CD, *&c.* radiis æqualium circulorum, perpendicula BK, CL, DM, *&c.* demiſſa in AC, BD, CE, *&c.* erunt ſinus iſtorum angulorum, & AK, BL, CM, DN, *&c.* ſinus complementorum ad rectum. Vel poſita AB diametro, illæ AK, BL, CM, *&c.* erunt chordæ. Sit ergo AB = $2r$ & AK = x, dein ſic operare. Tab. III. Fig. 10.

$$AB \,.\, AK :: AC \,.\, AL.$$

$$2r \,.\, x :: 2x \,.\, \frac{xx}{r}.$$

$$\text{Et } \left.\begin{matrix} AL - AB \\ \frac{xx}{r} - 2r \end{matrix}\right\} = BL, \text{ Duplicatio.}$$

$$AB \,.\, AK :: AD\ (2AL - AB) \,.\, AM.$$

$$2r \,.\, x :: \frac{2xx}{r} - 2r \,.\, \frac{x^3}{rr} - x.$$

AM

ad $Ot = \frac{r}{4}$; & $et = eO + Ot = a - \frac{r}{4} + \frac{r}{4} = a$. Pariter tO ad Oo, ut 4 ad 1, ut te ad $ei = 4a$, a qua ſi demas partem ez æqualem ipſi O$o = r$, manebit $zi = 4a - r$, dimidiato coefficienti quem habet ſecundus terminus quantitatis ſub ſigno; quare altera aſymptotus determinata eſt ut jubebat N^us. 137.

Tandem deſcripta parabola $\frac{bb}{r}u = zz$, punctum K aut k in quo ea occurrit hyperbolæ, dat valorem incognitæ z; & ſi parabola occurrit hyperbolæ in duobus punctis, ut in figura; duo erunt in axe AE puncta F; f, & duæ rectæ CGFD; $cGfd$ problema ſolventes.

143. Addendo vel ſubducendo terminos æquationis localis aſſumtæ & æquationis localis inventæ per ſubſtitutionem aſſumti valoris in æquatione conſtruenda, vel quales ſunt, vel multiplicatos per aliquem coefficientem, poſſunt inveniri aliæ curvæ, e quibus commodiſſimam eliget analyſta.

Sic in noſtro exemplo, ſi hinc demas $\frac{5bb}{r}u$; & inde $5zz$, habebis

$$uu - \frac{5bb}{r}u = 4uz - 5zz - 4au - ru + 4rz - 4ar + cc$$

æquationem ad ellipſim; nam altiſſimus terminus eſt $uu - 4uz + 5zz$, cujus factores ſunt inæquales & imaginarii $u - 2z + z\sqrt{-1}$ & $u - 2z - z\sqrt{-1}$.

$$\text{Et}\ \left.\begin{matrix}\text{AM} - \text{AC}\\ \frac{x^3}{rr} - 3x\end{matrix}\right\} = \text{CM, Triplicatio.}$$

AB . AK : : AE (2AM — AC) . AN.

$$2r\ .\ x\ ::\ \frac{2x^3}{rr} - 4x\ .\ \frac{x^4}{r^3} - \frac{2xx}{r}.$$

$$\text{Et}\ \left.\begin{matrix}\text{AN} - \text{AD}\\ \frac{x^4}{r^3} - \frac{4xx}{r} + 2r\end{matrix}\right\} = \text{DN, Quadruplicatio.}$$

AB . AK : : AF (2AN — AD) . AO.

$$2r\ .\ x\ ::\ \frac{2x^4}{r^3} - \frac{6xx}{r4} + 2r\ .\ \frac{x^5}{r^4} - \frac{3x^3}{rr} + x.$$

$$\text{Et}\ \left.\begin{matrix}\text{AO} - \text{AE}\\ \frac{x^5}{r^4} - \frac{5x^3}{rr} + 5x\end{matrix}\right\} = \text{EO, Quintuplicatio.}$$

Et ſic deinceps. Quod ſi velis angulum in aliquot partes dividere, pone q pro BL, CM, DN, &c. Et habebis $xx - 2rr = qr$ ad biſectionem, $x^3 - 3rrx = qrr$ ad triſectionem, $x^4 - 4rrxx + 2r^4 = qr^3$ ad ad quadriſectionem, $x^5 - 5rrx^3 + 5r^4x = qr^4$ ad quinquiſectionem &c.

PROB. XXX.

Cometæ in linea recta BD uniformiter progredientis poſitionem curſus ex tribus obſervationibus determinare.

Tab. III. Fig. 11. Sit A oculus ſpectatoris, B locus cometæ in prima obſervatione, C in ſecunda, ac D in tertia; quærenda erit inclinatio lineæ BD ad lineam AB. Ex obſervationibus itaque dantur anguli BAC, BAD; adeoque ſi BH ducatur ad AB normalis & occurrens AC & BD in E & F, ex aſſumto utcunque AB dabuntur BE & BF, tangentes nempe præfatorum angulorum reſpectu radii AB. Sit ergo AB $= a$, BE $= b$, & BF $= c$. Porro ex datis obſervationum intervallis dabitur ratio BC ad BD, quæ ſi ponatur b ad e, & agatur DG parallela AC, cum ſit BE ad BG in eadem ratione, & BE dicta fuerit b, erit BG $= e$, adeoque GF $= e - c$. Ad hæc ſi demittatur DH normalis ad BG, propter triangula ABF & DHF ſimilia & ſimili-

liter ſecta lineis AE ac DG, erit FE. AB :: FG. DH (*c*) hoc eſt $e - b.$ $a :: e - c. \frac{ae - ac}{e - b} = $ HD. Erit etiam FE. FB :: FG. FH, (*d*) hoc eſt $e - b. e :: e - c. \frac{ee - ec}{e - b} = $ FH; cui adde BF ſive e & fit BH $= \frac{ee - cb}{e - b}$. Quare eſt $\frac{ee - cb}{e - b}$ ad $\frac{ae - ac}{e - b}$, (ſive $ee - cb$ ad $ae - ac$, vel $\frac{ee - cb}{e - c}$ ad a) ut BH ad HD; hoc eſt ut tangens anguli HDB ſive ABK ad radium. Quare cum a ſupponatur eſſe radius, erit $\frac{ee - cb}{e - c}$ tangens anguli ABK, adeoque facta reſolutione ut $e - c$ ad $e - b$ (ſive GF ad GB) ita c (ſive tangens anguli ABF) ad tangentem anguli ABK.

Dic itaque ut tempus inter primam & ſecundam obſervationem, ad tempus inter primam ac tertiam, ita tangens anguli BAE, ad quartam proportionalem. Dein ut differentia inter illam quartam proportionalem & tangentem anguli BAF, ad differentiam inter eandem quartam proportionalem & tangentem anguli BAE, ita tangens anguli BAF, ad tangentem anguli ABK.

PROB. XXXI.

Radiis a puncto lucido ad ſphæricam ſuperficiem refringentem divergentibus, invenire concurſus ſingulorum refractorum cum axe ſphæræ per punctum illud lucidum tranſeunte. (*e*)

Sit A punctum illud lucidum, & BV ſphæra, (*f*) cujus axis AD, centrum C, (*g*) & vertex V, ſitque AB radius incidens & BD refractus ejus, ac demiſſis ad radios iſtos perpendicularibus CE & CF, ut & BG perpendiculari ad AD, actaque BC, dic AC $= a$, (*h*) VC vel BC $= r$, (*i*) CG TAB. III. Fig. 12.

(*c*). Eſt enim, ob ſimilia triangula AFE; FGD, ut FE ad EA ſic FG ad GD; & ob ſimilia triangula AEB; DGH, ut EA ad AB, ſic GD ad DH; unde *ex æquo ordinate*, FE ad AB ut FG ad HD.

(*d*) Pariter eadem triangula dant FE ad EA ut FG ad GD; & AE ad EB ut DG ad GH; quare iterum *ex æquo ordinate*, FE ad EB ut FG ad GH, & *componendo*, FE ad FB ut FG ad FH.

(*e*) *Optime quidem Newtonus problema de* ſphæra *propoſuit; quia minus utiles, & magis difficiles ſunt aliæ* curvæ; *ſed tamen, quia, pauciſſimis mutatis, poteſt Auctoris æquatio fieri generaliſſima, id exercitii cauſa faciam.*

(*f*) Curva quævis ſuperficies.

(*g*) Quia nempe in circulo omnes normales ad curvam per centrum tranſeunt, ſed in noſtra hypotheſi ex B ducatur normalis ad curvam, quæ axi occurrat in C.

(*h*) In ſphæra datur magnitudine recta AC; ſed non in aliis curvis. Quare dic datam AV $= a$, VG $= u$; GC $= s$, & pro a, in Auctoris æquatione, ponere debebis $a + u + s$.

(*i*) Quia ſcilicet VC, & BC ſunt radii ſphæræ; at in noſtra hypotheſi VC $= u + s$; ſed non æquat CB.

 (*k*)

$CG = x$, (k) & $CD = z$, (l) eritque $AG = a - x$, $BG = \sqrt{(rr - xx)}$ (m) $AB = \sqrt{(aa - 2ax + rr)}$ (n) & propter ſimilia triangula ABG & ACE, $CE = \frac{a\sqrt{rr - xx}}{\sqrt{(aa - 2ax + rr)}}$ (o). Item $GD = z + x$, (p) $BD = \sqrt{(zz + 2zx + rr)}$: & propter ſimilia triangula DBG ac DCF; $CF = \frac{z\sqrt{(rr - xx)}}{\sqrt{(zz + 2zx + rr)}}$. (q) Præterea cum ratio ſinuum incidentiæ & refractionis, adeoque CE ad CF detur, pone illam ratione eſſe a ad f, (r) & erit $\frac{fa\sqrt{(rr - xx)}}{\sqrt{(aa - 2ax + rr)}} = \frac{az\sqrt{(rr - xx)}}{\sqrt{zz + 2zx + rr)}}$, (s) ac multiplicando in crucem, dividendoque per $a\sqrt{(rr - xx)}$, erit $f\sqrt{(zz + 2zx + rr)} = z\sqrt{(aa - 2ax + rr)}$, & quadrando, ac redigendo terminos in ordinem, $zz = \frac{2ffxz + ffrr}{aa - 2ax + rr - ff}$. (t) Denique pro dato $\frac{ff}{a}$ ſcribe p, & q pro dato $a + \frac{rr}{a} - p$, & erit $zz = \frac{2pxz + prr}{q - 2x}$ ac $z = \frac{px + \sqrt{(ppxx - 2prrx + pqrr)}}{q - 2x}$. Inventum eſt itaque z; hoc eſt longitudo CD, adeoque punctum quæſitum D quo refractus BD concurrit cum axe Q. E. F.

Poſui hic incidentes radios divergentes eſſe, & in medium denſius incidere; ſed mutatis mutandis problema perinde reſolvitur ubi convergunt, vel incidunt e denſiori medio in rarius. (v)

PROB.

(k) Apud nos $x = s$.

(l) Datum enim eſt in ſphæra centrum C; ſed nobis tantum punctum V datum eſt. Dicemus ideo $VD = \beta$. Erit z ($CD = DV - VG - GC$) $= \beta - u - s$; qui valor in Auctoris æquatione ponendus erit.

(m) Ex notiſſima circuli proprietate. Nos vero, qui æquationem generaliſſimam quærimus, dicemus $BG = y$.

(n) Nobis autem $\sqrt{(\alpha\alpha + 2\alpha u + uu + yy.)}$

(o) Id eſt $\frac{(\alpha + u + s)y}{\sqrt{(\alpha\alpha + 2\alpha u + uu + yy)}}$.

(p) Subſtituendo $\beta - u = DG$, & $BD = \sqrt{(\beta\beta - 2\beta u + uu + yy.)}$

(q) Et noſtris ſymbolis $CF = \frac{(\beta - u - s)y}{\sqrt{(\beta\beta - 2\beta u + uu + yy)}}$

(r) Sed quia in hypotheſi noſtra non datur $a\,(\alpha + u + s)$, hanc rationem ponemus m ad n; & m nobis *indicabit ſinum incidentiæ.*

(s) Nobis vero $\frac{ny(\alpha + u + s)}{\sqrt{(\alpha\alpha + 2\alpha u + uu + yy)}} = \frac{my(\beta - u - s)}{\sqrt{(\beta\beta - 2\beta u + uu + yy)}}$

(t) Id eſt (dividendo per y, multiplicando in crucem, & quadrando,)

$$nn\,(\alpha\alpha + 2\alpha u + 2\alpha s + uu + 2us + ss)\,(\beta\beta - 2\beta u + uu + yy) = mm\,(\beta\beta - 2\beta u - 2\beta s + uu + 2us + ss)\,(\alpha\alpha + 2\alpha u + uu + yy)$$

æquatio generaliſſima, quæ, licet nixa ſit divergentiæ radiorum, facile tamen aptatur ad eorum paralleliſmum, & convergentiam.

(v) Namque ſi radii ſunt axi paralleli α, & β in infinitum excreſcunt; & ideo delendi ſunt omnes termini, in quibus eæ non ſunt, aut non ad altiſſimum gradum elatæ, quia hi termini finiti ſunt, & pro nullis habentur ad infinitos comparati; unde fit

po-

poſita α infinita, & dividendo per $\alpha\alpha$

$$nn\,(\beta\beta - 2\beta u + uu + yy) =$$
$$mm\,(\beta\beta - 2\beta u - 2\beta s + uu + 2us + ss)$$

& poſita β infinita & dividendo per $\beta\beta$.

$$nn\,(\alpha\alpha + 2\alpha u + 2\alpha s + uu + 2us + ss) =$$
$$mm\,(\alpha\alpha + 2\alpha u + uu + yy,)$$

Si radii convergunt, α, vel β negative ſumantur, & ejus impares poteſtates contrariis, ac prius, ſignis ſunt afficiendæ. Unde habebitur.

poſita α negativa

$$nn\,(\alpha\alpha - 2\alpha u - 2\alpha s + uu + 2us + ss)$$
$$(\beta\beta - 2\beta u + uu + yy) =$$
$$mm\,(\beta\beta - 2\beta u - 2\beta s + uu + 2us + ss)$$
$$(\alpha\alpha - 2\alpha u + uu + yy)$$

& poſita β negativa.

$$nn\,(\alpha\alpha + 2\alpha u + 2\alpha s + uu + 2us + ss)$$
$$(\beta\beta + 2\beta u + uu + yy) =$$
$$mm\,(\beta\beta + 2\beta u + 2\beta s + uu + 2us + ss)$$
$$(\alpha\alpha + 2\alpha u + uu + yy)$$

Si quis hoc ratiocinio contentus non eſt, is calculum rurſus inſtituat in duabus his hypotheſibus, & ſuperioribus veſtigiis inſiſtens ad allatas æquationes facile perveniet.

Obiter notandum: *Quod ſi radii paralleli, aut convergentes, incidant in ſuperficiem convexam, α fiet infinita, vel negativa; β vero, ſi in concavam.*

Ex his tribus æquationibus generalibus facile peculiares omnes deducentur, & noſcetur utrum, & quibus legibus, propoſita curva habeat geometricum focum. Nam ſi radii ſint divergentes, aut convergentes, pro α ſi incidunt in convexam; ſin vero, pro β, ponetur ejus valor datus; & altera β, vel α determinabitur ab æquatione, quæ ſimplicior fiet ponendo pro s, aut y, ejus valorem, quem dat data curva. Erit autem curva inter punctum concurſus, & punctum lucidum, cum valor quæſitæ β, vel α eſt poſitivus, ut nos poſuimus; cum vero eſt negativus, erit punctum concurſus ad easdem curvæ partes, ad quas eſt lucidum.

Habebit autem curva focum geometricum, quando y, & s (ubi eſt variabilis) aberunt ab æquatione. Si enim omnes radii refringuntur in idem punctum D, erit VD conſtans, ſed BG, & GC ſunt variabiles, ergo magnitudo ipſius VD ab iis non pendet; ſed magnitudo VG, determinatur a BG, atque ideo VG eſt variabilis; ac VD æquat VG, GC, CD ſimul ſumptas; igitur ipſa VD nequit eſſe conſtans, niſi ab ejus expreſſione, aut valore, abſint VG, GC, aut eam determinans BG, variabiles. Secus autem curva habebit focum phyſicum.

Curva focum phyſicum habens geometrico donabitur, ſublatis ex æquatione s, & y; quod fieri nequit, niſi omnes termini, ubi ſunt hæ quantitates, mutuo ſe deſtruant. Itaque, ut ſciamus utrum curva focum geometricum habere poſſit, ſumantur omnes termini homogenei, ubi reperitur s, aut y, & ſingula eorum aggregata ponantur æqualia nihilo.

Pauca, ut lucem generali huic doctrinæ dandam ex conicis afferemus.

Sit VB *ellipſis*, & radii paralleli ex aere incidant in vitrum convexum, & ſit axis major $= 2a$, axis minor $= 2b$. Tunc VG $= u$, reliquus axis $= 2a - u$; & $\frac{2abbu - bbuu}{aa} = yy$, GC $= s = \frac{abb - bbu}{aa}$; $m = 3$, $n = 2$.

Quia hic radii paralleli convexitatem feriunt, pone α infinitam, & ſubſtituendo, formula generalis evadet $4\left(\beta\beta - 2\beta u + uu + \frac{2abbu - bbuu}{aa}\right)$ $= 9\left(\beta\beta - 2\beta u - \frac{2abb\beta + 2bb\beta u + 2abbu - 2bbuu}{aa} + uu + \frac{aab^4 - 2aub^4 + b^4uu}{a^4}\right)$, quæ per debitas reductiones, ac tranſpoſitiones fiet

$$\beta^3 = \beta\Big(\frac{10a^4u - 18aabbu + 18a^3b^2 - 10a^3bbu}{5a^4}$$
$$\frac{+ 18ab^4 - 5a^4uu + 14aabbuu}{5a^4}$$
$$\frac{- 9b^4uu - 9aab^4}{5a^4}.$$

Unde liquet, quod, extracta radice, ſemper u erit in valore ipſius $\beta\beta$ quare, cum u mutabitur etiam β, & ideo ellipſis focum geometricum non habet, quem tamen haberet, ſi a valore ipſius β abeſſet u. Ut ergo percipiam quando, & quibus legibus id accidat, facio $= 0$ omnes terminos homogeneos, in quibus occurrit u, qui ſunt $10a^4u - 18aabbu$ $= 0$,

PROB. XXXII.

Si Conus plano quolibet ſecetur, invenire figuram ſectionis.

TAB. IV. Fig. 1. 2. Sit ABC conus circulari baſi BC inſiſtens; IEM ejus ſectio quæſita; KILM alia quælibet ſectio parallela baſi, & occurrens priori ſectioni in HI; & ABC tertia ſectio perpendiculariter biſecans priores duas in EH & KL, & conum in triangulo ABC. Et producto EH donec occurrat ipſi AK in D, actiſque EF ac DG parallelis KL & occurrentibus AB & AC in F ac G, dic EF $= a$, DG $= b$, ED $= c$, EH $= x$, & HI $= y$; & propter ſimilia triangula EHL, EDG, erit ED. DG :: EH. HL $= \frac{bx}{c}$. Dein propter ſimilia triangula DEF, DHK, erit DE. EF :: DH.

(*c*

$= 0$; & $-10a^3bu + 18ab^4u = 0$; tum $-5a^4uu + 14aabbuu - 9b^4uu = 0$. Prima æquatio, tranſponendo ac dividendo, per $2aau$, dat $5aa = 9bb$, quod etiam colligitur e ſecunda: tertiam divido per uu, quotum ſic ordino $b^4 = \frac{14aabb - 5a^4}{9}$, cujus radicem extraho, ut in æquationibus biquadraticis, & invenio $bb = \frac{7aa}{9} \pm \sqrt{\frac{49a^4}{81} - \frac{5a^4}{9}}$

$$= \frac{7aa}{9} \pm \sqrt{\frac{49a^4 - 45a^4}{81}} = \frac{7aa \pm 2aa}{9}$$

Sed $\frac{7aa + 2aa}{9}$ dat $bb = aa$, quod rejicio, quia non congruit cum jam inventis; aſt $\frac{7aa - 2aa}{9}$ dat $bb = \frac{5aa}{9}$, ſive $5aa = 9bb$, ut ſupra. Aut in $b^4 = \frac{14aabb - 5a^4}{9}$ pono pro b^4, & bb, valores ex ſupra inventis erutos $\frac{25a^4}{81}$ & $\frac{5aa}{9}$, & invenio $\frac{25a^4}{81} = \frac{70a^4}{81} - \frac{5a^4}{9} = \frac{70a^4 - 45a^4}{81} = \frac{25a^4}{81}$, qnod optime ad rem facit. Igitur in radiorum incidentium paralleliſmo ellipſis habet focum geometricum, cum $aa . bb :: 9 . 5$, ut axis major ad parametrum. Sed diſtantia focorum eſt $2\sqrt{(aa - bb)} =$ (ob $bb = \frac{5aa}{9}$) $2\sqrt{(\frac{9aa - 5aa}{9}} = \frac{4a}{3}$; tunc autem eſt axis ad focorum diſtantiam, ut ſinus incidentiæ ad ſinum refractionis. Quæramus nunc diſtantiam verticis a foco iſto geometrico. In æquatione priore deletis terminis ubi eſt u, reſtat

$$\beta\beta = \frac{18a^3bb\beta - 9aab^4}{5a^4} = \frac{18bb\beta}{5a} - \frac{9b^4}{5aa}, \text{ \&}$$

$$\beta = \frac{9bb}{5a} + \sqrt{\frac{36b^4}{25aa}} = \frac{9bb + 6bb}{5a}, \text{ \&}$$

$\beta = \frac{3bb}{a} =$ (ob $\frac{5aa}{9} = bb$) $\frac{5a}{3} =$ VD. Totus autem axis eſt $2a$, & diſtantia inter focos ellipſeos eſt $\frac{4a}{3}$, quæ dimidiata cum dimidiato axe dat pariter $\frac{5a}{3}$ pro diſtantia verticis a foco remotiore ellipſeos; ergo focus geometricus in hac hypotheſi eſt *remotior focus ellipſeos.*

Si VB ponatur hyperbola, & radii axi paralleli ex vitro inciderent in concavam aeris ſuperficiem, ſuperiora premens veſtigia invenies hyperbolam focum geometricum non habere, niſi cum axis primarius eſt ad parametrum, ut ſinus incidentiæ, ad ſinum refractionis, & quod focus hic geometricus eſt focus oppoſitæ hyperbolæ. Facile quoque videbis, quod parabola nunquam focum dioptricum habere poteſt, ubi radii incidunt paralleli.

Si VB ſit circulus, factis debitis ſubſtitutionibus incides in ipſiſſimam æquationem Auctoris.

($c - x$ in Fig. 1, & $c + x$ in Fig. 2.) $HK = \frac{ac \mp ax}{c}$. Denique cum ſectio KIL ſit parallela baſi, adeoque circularis, erit $HK \cdot HL = HIq$, hoc eſt $\frac{ab}{c}x \mp \frac{ab}{cc}xx = yy$, æquatio quæ exprimit relationem inter EH (x) & HI (y), hoc eſt inter axem & ordinatim applicatam ſectionis EIM, quæ æquatio cum ſit ad ellipſim in Fig. 1, & ad hyperbolam in Fig. 2. patet ſectionem illam perinde ellipticam vel hyperbolicam eſſe.

Quod ſi ED nullibi occurrat AK, ipſi parallela exiſtens, tunc erit $HK = EF$ (a), & inde $\frac{ab}{c}x$ ($HK \cdot HL$) $= yy$, æquatio ad parabolam.

PROB. XXXIII.

Si recta XY circa axem AB, ad diſtantiam CD, in data inclinatione ad planum DCB convolvatur, & ſolidum PQRUTS iſta convolutione generatum ſecetur plano quolibet INQLK; invenire figuram ſectionis. (x) Tab. IV. Fig. 3.

Eſto BHQ vel GHO inclinatio axis AB ad planum ſectionis; & L quilibet concurſus rectæ XY cum plano illo. Age DF parallelam AB, & ad AB, DF, & HO demitte perpendiculares LG, LF, LM, & junge FG

(x) Operæ pretium facturus videor, ſi ſolidi PQRVTS generationem illuſtrem. Jam rectæ AB, CD ſunt in eodem plano (Eucl. 2. XI.). In eo ducatur DF ipſi BA parallela, vel normalis ad CD, & ex quolibet ipſius DF puncto F agatur FG perpendicularis ad AB, quæ erit parallela DC, & ad rectos angulos ad DF. Item ex F excita indefinitam FL rectam ad planum CDFG; recta XY eſſe debet in plano DFL, id eſt occurrere debet ipſi FL alicubi in L, (hoc enim indicant Auctoris verba, *ad diſtantiam* CD); & cum FD facere quemcumque angulum datum FDL.

Juncta GL erit in eodem plano ac FL, FG, cum quibus triangulum conſtituit; & planum GFL erit rectum ad planum GFDC (Eucl. 18. XI.). Rurſus, quia DF, ex conſtruct. eſt ad rectos angulos tum ipſi LF, tum FG, recta erit ad planum FGL (Eucl. 4 XI.), æque ac ei parallela CG (Eucl. 8. XI.). Eſt autem GFL triangulum rectangulum in F; quapropter hypothenuſa GL major eſt latere GF, aut CD.

Concipiatur GF producta donec æquet GL; erunt GF ſic producta, & GL radii ejuſdem circuli, ad quem perpendicularis erit AB; cum autem idem probari poſſit de omnibus punctis rectæ AB, patet ſolidum PQRVTS conſtare circulis parallelis hinc inde a CD creſcentibus, & quorum omnium centra ſunt in recta AB, quæ vocatur *axis ſolidi.*

Si ergo ſolidum ſecetur plano SAPQRBVT per axem, in duas partes æquales ſectum erit; eſt enim PA, communis ſectio planorum SKPI & SAPQRBVT, normalis ad AB, ut omnes ipſi SA parallelæ; ſunt igitur PS, & rectæ ei parallelæ, diametri circulorum, quibus componitur ſolidum: quare circuli omnes ab his rectis, & ideo ſolidum a plano biſecatur.

Si nunc ſolidum rurſus ſecetur plano KLQNI ad axem AB inclinato, ſed ad planum per axem recto, dico quod recta QO communis horum planorum ſectio, biſecat rectam IOK communem ſectionem plani KLQNI, & circuli SKPI, & omnes NML ei parallelas.

FG & MG. Dictiſque $CD = a$, $CH = b$, $HM = x$, & $ML = y$; & propter datum angulum GHO, poſito MH . HG :: $d . e$: (y) erit $\frac{ex}{d} = GH$, & $b + \frac{ex}{d} = GC$ vel FD. Adhæc propter angulum datum LDF (nempe inclinationem rectæ XY ad planum GCDF) poſito FD. FL :: $g . b$, (z) erit $\frac{bb}{g} + \frac{bex}{dg} = FL$, cujus quadrato adde FGq, (DCq ſeu aa) & emerget $GLq = aa + \frac{bbbb}{gg} + \frac{2bbbex}{dgg} + \frac{bbeexx}{ddgg}$. Hinc aufer MGq (HMq — HGq ſeu $xx - \frac{ee}{dd}xx$) & reſtabit $\frac{aagg + bbbb}{gg} + \frac{2bbbe}{dgg}x + xx$ $\left(\frac{bbee - ddgg + eegg}{ddgg}\right)$ ($= MLq$) $= yy$: æquatio quæ exprimit relationem inter x & y, hoc eſt inter HM, axem ſectionis, & ML, ordinatim applicatam. Et proinde cum in hac æquatione x & y ad duas tantum dimenſiones aſcendant, patet figuram INQLK eſſe conicam ſectionem. Utpote ſi angulus MHG major ſit angulo LDF, ellipſis erit hæc figura (a); ſi minor, hyperbola (b); ſi æqualis vel parabola (c), vel (coincidentibus inſuper punctis C & H) parallelogrammum (d). PROB.

Nam circulus PKSI eſt rectus ad planum per axem SAPQRBVT, ut & planum KLQNI: Igitur IK eſt ad planum per axem normalis (EUCL. 19. XI.), ergo etiam ad rectam PAS; ſed IK eſt chorda circuli, cujus diameter eſt PAS, quare biſecta eſt in O; quæ demonſtratio cum etiam ipſi LMN (quæ normalis eſt ad OHQ) poſſit aptari, patet omnes NML biſectas eſſe ab OQ.

Demum erit pariter LM normalis ad GM, ut quæ ducta a centro circuli, cujus radius eſt GL & chorda LN, ipſam biſecet. Inſuper, quia LN eſt parallela ipſi KI, eſt etiam MG parallela ad AO, ac normalis ad AB; quod facile probatur per 10. XI.

TAB. O. Fig. 2. (y) Aſſume quamlibet $\alpha\kappa$, quam dices d, deſcribe arcum $\alpha\lambda\beta$; fac angulum $\alpha\kappa\beta$ parem ipſi MHG; ex β demitte perpendicularem $\beta\gamma$: erit triangulum $\beta\gamma\kappa$ ſimile GMH, & datum ſpecie ac magnitudine; erit igitur MH. HG :: $\beta\kappa . \kappa\gamma$ :: $d . e$, quare erit $\gamma\kappa$ quam Auctor dixit e.

(z) Pariter fac angulum $\alpha\kappa\lambda$ æqualem FDL, & ex λ age $\lambda\delta$ perpendicularem ad $\alpha\kappa$. Erit triangulum $\lambda\delta\kappa$ ſimile LFD, & $\delta\kappa = g$, ſi dicas $\lambda\delta = b$.

(a) Si angulus MHG major eſt angulo LDF etiam angulus $\beta\kappa\gamma$ major erit angulo $\lambda\kappa\delta$; quare etiam arcus $\alpha\beta$ major quam $\alpha\lambda$, & $\beta\gamma$ quam $\lambda\delta$; ſed quadrata ex $\lambda\delta$, $\delta\kappa$ ſimul æquant (quadratum ex $\kappa\lambda$, ſive ex $\kappa\beta$, aut) quadrata ex $\beta\gamma$, $\kappa\gamma$ ſimul; igitur illinc demto minore quadrato ex $\lambda\delta$, hinc majore ex $\beta\gamma$, erit (quadratum ex $\delta\kappa$ majus quadrato ex $\kappa\gamma$, vel) $\delta\kappa$ major $\kappa\gamma$; quapropter $\beta\gamma$ abſcindet ex $\lambda\kappa$ minorem $\kappa\mu$: eſt autem $\delta\kappa$ (g) ad $\delta\lambda$ (b) ut $\kappa\gamma$ (e) ad $\gamma\mu = \frac{be}{g}$; quapropter $\frac{bbee}{gg} + ee$ æquant quadratum ex $\mu\kappa$, & minora ſunt quam quadratum ex $\kappa\lambda$ (dd), igitur $bbee + eegg$ minora ſunt quam $ddgg$, quo circa terminus altiſſimus æquationis conſtat duobus factoribus inæqualibus & imaginariis.

(b) Superior demonſtratio facile applicatur huic hypotheſi; ex quo ſequitur, factores termini altiſſimi eſſe inæquales & reales.

(c) Tunc $e = g$, & $\frac{bbee - ddgg + eegg}{ddgg} = bb - dd + ee = 0$; quam ob rem quadratum xx abeſſet ab æquatione, quæ fieret

$$\frac{aagg + bbbb}{gg} + \frac{2bbbx}{dg} = yy.$$

(d) Ubi puncta C, H coincidunt, fit $b = 0$; quare

Digitized by Google

quare æquatio ad parabolam evadit $aa = yy$, aut $a = y$.

Ceterum hoc problema (quamvis generalius, quam ſupra propoſitum de cono & ejus ſectionibus) adhuc generalius fieri poteſt, fingendo XY eſſe curvam quamlibet, ita poſitam ut ejus axis ſit non CD ad AB normalis, ſed alia quævis obliqua ϵD; cujus ſolidi generationem ſic illuſtrare conabimur. Tab. O. Fig. 3.

In plano $\alpha\beta\gamma\delta$ agatur quævis recta AB, & ab aliquo ejus puncto C excitetur recta CD ad planum $\alpha\beta\gamma\delta$ normalis, ac in eodem plano ducatur recta μCϵ faciens cum AB in C angulum quemcumque datum μCB, & per μ, C, D tranſeat planum, in quo deſcripta intelligatur quævis curva XDY, cujus axis ſit Dϵ, & curva XDY ſervans ſemper idem intervallum ab AB, gyret circa axem AB, orietur ſolidum aliquod; concipiatur hoc ſectum plano quovis; hujus ſectionis natura quærenda eſt. Huic inveſtigationi præmitto ſequentia.

Si per D agatur tangens ad curvam, hæc eſſe debet normalis ad axem & obliqua ad CD; ſed CD normalis eſt ad ϵCμ (Eucl. 4. XI.); ergo tangens & recta ϵCμ alicubi conveniant: coeant in μ, hinc ducatur ad ſolidi axem CB normalis $\mu\sigma$. Dico triangulum μCσ datum eſſe ſpecie, & magnitudine.

Nam quia datur curvæ XDY natura, ac poſitio, & inſuper punctum D, poſitione datur tangens Dμ; ſed DC datur magnitudine, & poſitione, datur ideo angulus μDC, & angulus ad C eſt rectus, quare datur angulus DμC, & totum triangulum magnitudine ac ſpecie datur.

Quapropter magnitudine datur recta μC; ſed ob duos angulos datos μCσ, $\mu\sigma$C, ſpecie datur triangulum μCσ; datur etiam magnitudine: adeoque dantur magnitudine rectæ $\mu\sigma$, σC.

Si nunc ex quovis curvæ puncto ψ demittatur ad axem AB normalis $\psi\xi$, hæc erit radius circuli gyratione deſcripti, & paralleli circulo, cujus radius eſt CD; cum enim CD & $\psi\xi$ ſitum quoad axem AB non mutent, circuli ab ipſis deſcripti erunt ad eumdem axem recti. Igitur ſolidi baſes erunt circulares, & concipere licet ſolidum ubivis finitum. Nunc indaganda eſt ratio habendi valorem cujusvis radii.

Ducatur $\xi\zeta$ ipſi $\mu\sigma$ parallela. Sunt igitur igitur plana μCD, $\psi\xi\zeta$ ad idem planum $\alpha\beta\gamma\delta$ recta (Eucl. 18. XI. & quia planum $\psi\xi\zeta$ eſt idem ac planum circuli recti ad axem AB, id eſt ad planum per axem); ſed horum planorum communis ſectio eſt $\psi\zeta$, ergo ea eſt normalis ad ſubjectum planum, & ad rectam $\zeta\xi$, eſt igitur quadratum ex $\psi\xi$ æquale quadratis ex $\xi\zeta$, $\zeta\psi$ ſimul; ſed, ob triangula ſimilia C$\zeta\xi$, C$\mu\sigma$, haberi poteſt valor $\xi\psi$, & ob datam curvæ XψYD naturam, valor ipſius $\zeta\psi$, hinc itaque excudetur radii valor.

142. His præmiſſis, ſit PQRVTS ſolidum ita genitum, KQI planum ſecans poſitione datum, communis autem ſectio plani hujus, & SKPI (alicujus ex circulis rectis ad axem ſolidi) ſit recta IK. Ex A hujus circuli centro demittatur in IK normalis AS eam biſecans in O; curva generans ſit KDY, data recta axi normalis DC; communis ſectio planorum BAζ & KDC, recta μC, circulo SKPI occurrens in ζ, & curvam in D tangat Dμ occurrens rectæ ζCμ in μ, unde agatur in axem normalis $\mu\sigma$, cui parallela erit Aζ. Ex Q demittatur QE ad axem normalis; & ſint, CD $= a$, CH $= b$, Cσ $= g$, $\sigma\mu$ $= h$, QH $= d$, HE $= e$, EQ $= f$, OH $= x$, OK $= y$. Jam (premendo Newtoni veſtigia) OH (x). HA :: QH (d). HE (e); quare HA $= \frac{ex}{d}$, & CA $=$ $b + \frac{ex}{d}$; ſed HO (x). OA :: HQ (d). QE (f); unde OA $= \frac{fx}{d}$. At quia axis AB, rectus ad circulum SKPI, eſt normalis ad rectam AP, eſt Cσ (g). $\sigma\mu$ (h) :: CA $(b + \frac{ex}{d})$. Aζ $=$ $\frac{bdh + ehx}{dg}$. Sit nunc ζK $= z$; erit AK² (Kζ^2 + ζA²) $= \frac{bbddhh + 2bdehhx + eehhxx}{ddgg}$ $+ zz$, & KA² — AO² $=$ $zz + \frac{bbddhh + 2bdehhx + eehhxx - ffggxx}{ddgg}$ $=$ OK² $= yy$. Tab. O. Fig. 4.

Supereſt, ut in hac æquatione ponatur valor ipſius z expreſſus per cognitas & x, ac ex curvæ natura ductus; quod ita fieri poteſt.

143. Quia triangulum CAζ rectangulum eſt in A, eſt ζC² (CA² + Aζ²) $= \frac{bbdd + 2bdex + eexx}{dd}$

$$+ \frac{bbddhh + 2bdehhx + eehhxx}{ddgg} =$$

$\frac{(bbdd + 2bdex + eexx)\ (gg + hh)}{ddgg}$.

Pone $gg + hh$ ($C\sigma^2 + \sigma\mu^2$) $= rr = \mu C^2$; & erit $\zeta C^2 = \frac{bbddrr + 2bderrx + eerrxx}{ddgg}$; &, extracta radice, $\zeta C = \frac{bdr + erx}{dg} = \frac{lx + dm}{d}$, faciendo brevitatis cauſa $g \,.\, r :: e \,.\, l = \frac{er}{g}$ $:: b \,.\, m = \frac{br}{g}$. Datur igitur valor ipſius ζC per x & cognitas, ſed quia omnes circuli figuræ ſunt inter ſe paralleli, communes ſectiones omnium horum circulorum cum eodem plano $\mu\zeta$ KD, id eſt, rectæ ζK, ſunt parallelæ; ſed CD eſt una ex his, & eſt normalis ad $\zeta\mu$; quare omnes ζK ſunt normales ad $\zeta\mu$; igitur tota res reducitur ad ſequens problema.

TAB. P. Fig. 1. *Curva* KD *natura, poſitione, & axe* cD, *& recta* CD *magnitudine, & poſitione datis, exponere* ζK *ipſi* CD *parallelas, & finitas hinc curva inde recta* ζC *normali ad* CD, *per eandem incognitam* x *per quam exponitur* ζC.

Sint, CD $= a$, Cc $= c$, cD $= s$. Ex K ducatur KL parallela ζC, & KN axi cD ordinatim, & productæ CD occurrens in M, & $\zeta C = KL = \frac{lx + dm}{d}$, ac DN $= u$. Triangula ſimilia cDC, MDN, MKL, dant cD (s). DC (a) :: MD. DN (u), & DC (a). Cc (c) :: DN (u). NM. Item CD (a). Dc (c) :: LK ($\frac{lx + dm}{d}$). KM, & demum DC (a). Cc (c) :: LK ($\frac{lx + dm}{d}$). LM; quare $\frac{su}{a} =$ MD, NM $= \frac{cu}{a}$, KM $= \frac{lsx + dms}{ad}$, & ML $= \frac{clx + cdm}{ad}$, ergo KN $= \frac{lsx + dms + cdu}{ad}$; ſed, cum detur curvæ natura, datur relatio inter KN & ND, hinc igitur eruetur valor u per x & cognitas; at Kζ = CL = CD + DM + ML $= a + \frac{su}{a} + \frac{clx + cdm}{ad}$, ergo (pro u poſito ejus valore) erit ζK expreſſa per x, & cognitas. *Q. E. F.*

Si ex. gr. curva KD parabola, cujus parameter $= p$. Erit KN^2 ($\frac{llssxx + 2dlmssx + 2cdlsux + ddmmss + 2cddmsu + ccddux}{aadd}$) $= pu$, &, ordinando, $uu = \frac{aaddpu - 2cddmsu - 2cdlsux - 2dlmssx - llssxx - ddmmss}{ccdd}$; quo circa $u = \frac{aaddp - 2cddms - 2cdlsx}{2ccdd} \pm \sqrt{(\frac{a^4d^4pp - 4aacd^4mps - 4aacd^3lpsx}{4c^4d^4})}$

Hic valor ponatur in expreſſione ipſius ζK ſupra inventa, & fiat ejus quadratum (in quo ſemper erit radicalis $\sqrt{\frac{a^4d^4pp}{4c^4d^4}}$ &c.) hujus quadrati valor ponatur pro zz in æquatione ad ſectionem, æquatio hinc oriens liberetur a radicali & habebitur æquatio ad ſectionem.

Si vero curvæ axis eſſet ipſa CD, patet quod cD coincideret cum CD, id eſt, quod $s = a$, & $c = o$, ergo $\zeta K = a + u$ (deletis terminis ubi eſt c) tunc etiam ordinata KL $= \zeta C = \frac{lx + dm}{d}$.

Sit, ex. gratia, curva KD parabola, erit KL^2 ($\frac{llxx + 2dlmx + ddmm}{dd}$) $= pu$, ac $u = \frac{llxx + 2dlmx + ddmm}{ddp}$, & $\zeta K = \frac{addp + llxx + 2dlmx + ddmm}{ddp}$, cujus quadrato poſito pro zz in æquatione ad ſolidi ſectionem, habebitur æquatio quatuor dimenſionum exprimens naturam curvæ ſectione genitæ.

144. Si præterea in ſolidi formatione recta $\zeta\mu$ caderet ſuper AB axem ſolidi, tunc $\mu\sigma$ (h) $= o$, & μC (r) $= C\sigma$ (g); igitur æquatio ad ſectionem (N°. 142. hujus), deletis terminis in quibus eſt h, fit $zz - \frac{ffxx}{dd} = yy$; ſed ζC tunc evaderet AC $= b + \frac{ex}{d}$, quam ob rem $\frac{bb}{p} + 2\frac{bex}{dp} + \frac{eexx}{ddp} = u$, & $zz = (a + u)^2 - \frac{ffxx}{dd} = aa + 2\frac{abb}{p} + 4\frac{abex}{dp} + 2\frac{aeexx}{ddp} + \frac{b^4}{pp} + 4\frac{b^3ex}{dpp} + 6\frac{bbeexx}{ddpp} + 4\frac{be^3x^3}{d^3pp} + \frac{e^4x^4}{d^4pp} - \frac{ffxx}{dd} = yy$, æquatio quatuor dimenſionum. TAB. O. Fig. 4.

In-

Tab. P. Fig. 2. Inſuper, ſi parabola generans haberet eundem axem ac ſolidum, & ei occurret in C, tunc AC ($b+\frac{ex}{d}$) eſſet abſciſſa, & ζK (z) vel KA ordinata, quam ob rem KA^2 (zz) $= bp+\frac{epx}{d}$, & $zz-\frac{ffxx}{dd} = yy = bp+\frac{epx}{d}-\frac{ffxx}{dd}$ æquatio ad ellipſim. Si ſectionis axis ωQ eſſet axi ſolidi AB parallelus, tunc fingi poteſt axem OQ gyraſſe circa polum Q verſus P, donec in Qω pervenerit: ſed quia punctum Q manet, ipſius QO valorem pro HO poſuiſſe in ſuperiore æquatione præſtabit. Igitur, fiat $QO = u = x+d$, quapropter $u-d = x$, & $uu-2ud+dd = xx$, & $yy = bp+\frac{epx}{d}-\frac{ffxx}{dd} = bp-ep+\frac{epu}{d}-ff+2\frac{ffu}{d}-\frac{ffuu}{dd}$, in qua æquatione noto quod $bp-ep-ff=0$, nam ſi ſolidum ſecetur per axem plano PAC recto ad planum IOQ, ſectio PQC eſſet parabola, nempe ipſa genitrix, quæ tunc locum illum occuparet, quapropter QE^2 (ff) $= p \,.\, CE = p(b-e)$: Fieret igitur æquatio ſuperior $yy = \frac{epu+2ffu}{d}-\frac{ffuu}{dd} = \frac{bpu+ffu}{d}-\frac{ffuu}{dd}$ (ponendo pro ep valorem $bp-ff$).

Si nunc axis ſolidi parallelus eſſet axi ſectionis, in infinitum excreſcerent EH (e), & HQ (d), quibus collata QE (f) pro nihilo habenda eſt; igitur $yy = \frac{bpu}{d}+\frac{ffu}{d}-\frac{ffuu}{dd}$ vertitur in $yy = \frac{bpu}{d}$; ſed & CH (b) eſt infinita atque ideo æquat d, eſt itaque $yy = pu$, & ſectio eſt parabola eandem habens parametrum ac genitrix, quod etiam nullo calculo ſic demonſtratur.

Ob naturam curvæ SCQP, eſt rectangulum SωP æquale rectangulo ex ωQ in p: Sed ob circulum SIPkK, rectangulum SωP æquat quadratum ex ωk, ergo &c.

Eodem pacto res abſolvi poteſt, quævis alia ponatur curva generans XDY. Nos ad caſum ab auctore propoſitum gradatim properantes fingimus, quod.

Tab. O. Fig. 4. 145. Ea ſit recta μDK ducta in plano μDC faciente cum plano BCD angulum datum μCσ, & in μ occurrens plano cui recta DC eſt normalis; tunc ζK (z) obtinebitur per analogiam hanc, μC (r) . CD (a) :: μζ ($\frac{erx+bdr+dgr}{ag}$). $\zeta K = \frac{aex+abd+adg}{dg}$; quare

$$zz = \frac{aaeexx+2aabdex+2aadegx}{ddgg}$$
$$+\frac{aabbdd+2aabddg+aaddgg}{ddgg}.$$

Hic autem valor poſitus in æquatione N_i. 142. dat æquationem ad ſectiones conicas $yy =$

$$\frac{eehhxx+aaeexx-ffggxx+2aabdex}{ddgg}$$
$$+\frac{2aadegx+2bdehhx+aabbdd+2aabddg}{ddgg}$$
$$+\frac{aaddgg+bbddhh}{ddgg}.$$

Sectio autem eſſet *parabola*, ſi, facta $\sigma\vartheta = \sqrt{(aa+bb)}$, juncta Cϑ eſſet parallela OQ axi ſectionis; tunc enim Cσ (g) . σϑ ($\sqrt{(aa+bb)}$) :: HE (e) . EQ ($f = \frac{e}{g}\sqrt{(aa+bb)}$), & quadrando $ff = \frac{aaee+eebb}{gg}$; aut $aaee+eebb-ffgg = 0$, quocirca quadratum x abeſſet ab æquatione; ſed ſi angulus QHE major eſſet quam ϑCσ, ſectio eſſet *ellipſis*; ſi minor, *hyperbola*.

146. Quod ſi angulus μCσ evaneſceret, aut ſi Cσ caderet ſuper axem AB, tunc $\sigma\mu = h = 0$, unde, terminis in quibus eſt h ex æquatione ſuperiore deletis, $yy = \frac{aaeexx-ffggxx}{ddgg}$ $+\frac{2aabdex+2aadegx+aabbdd+2aabddg}{ddgg}$ $+\frac{aaddgg}{ddgg}$, tunc autem, ut ſtatim apparet, ſolidum eſſet conus rectus, & hoc problema caſus problematis ſuperioris.

147. Si vero, angulo μCσ exiſtente, $K\zeta = CD = a$, æquatio N_i. 142. evaderet $yy = \frac{eehhxx}{ddgg}-\frac{ffggxx}{ddgg}+\frac{2behhx}{dgg}+\frac{bbhh+aagg}{gg}$, æquatio Auctoris, ſi animadvertas quod QH^2 (dd) $= HE^2+EQ^2$ ($ee+ff$), quare $-ff = ee-dd$.

PROB. XXXIV.

Si ad AF erigatur perpendiculum AD datæ longitudinis, & normæ DEF crus unum ED continuo tranſeat per punctum D dum alterum crus EF æquale AD dilabatur ſuper AF; invenire curvam HIC quam crus EF medio ejus puncto C deſcribit.

TAB. IV. Fig 4. Sit EC vel CF $= a$, perpendiculum CB $= y$, AB $= x$, & propter ſimilia triangula FBC, FEG, (*e*) erit BF $(\sqrt{aa-yy})$. BC + CF $(y+a)$ :: EF $(2a)$. EG + GF (AG + GF) ſeu AF. (*f*) Quare $\frac{2ay+2aa}{\sqrt{(aa-yy)}}$ (= AF = AB + BF) $= x+\sqrt{(aa-yy)}$. Jam multiplicando per $\sqrt{(aa-yy)}$ fit $2ay+2aa = aa-yy+x\sqrt{(aa-yy)}$, ſeu $2ay+aa+yy = x\sqrt{(aa-yy)}$, & quadrando partes diviſas per $\sqrt{(a+y)}$, (*g*) ac ordinando prodit

$$y^3 + 3ayy \begin{matrix} +3aa \\ +xx \end{matrix} y \begin{matrix} +a^3 \\ -axx \end{matrix} = 0.$$

Idem

148. Demum ſi in hac ultima hypotheſi $\mu r = h = o$ æquatio præcedens mutabitur in $yy = aa - \frac{ffxx}{dd}$, quæ ſemper eſt ad ellipſim; ſed tunc liquet ex ſolidi genere quod ſolidum eſt cylindrus, ergo ſectio obliqua cylindri eſt ellipſis.

Harum omnium hypotheſium tanquam generale corollarium eſt inventio lineæ, qua ſolidum ſupra dictis modis genitum finitur; Hæc invenitur ſecto ſolido per axem, id eſt, poſito quod QO axis ſectionis cadat ſuper AB axem ſolidi. Tunc autem EQ $(f) = o$, & QH $(d) =$ HE (e), quibus ſubſtitutionibus factis, æquatio N^i. 142 fit

$$zz + \frac{bbbbb + 2bbbx + bbxx}{gg} = yy,$$

Sic æquatio N^i. 144 fit

$$aa + \frac{2abb}{p} + \frac{4abx}{p} + \frac{2axx}{p} + \frac{b^4}{pp}$$

$$+ \frac{4b^3x + 6bbxx + 4bx^3 + x^4}{pp} = yy, \text{ N}^i.\ 145.$$

evadit $yy = \frac{bbxx + aaxx + 2aabx + 2bbbx}{gg}$

$$+ \frac{2aagx + aabb + 2aabg + aagg + gggg}{gg};$$

æquatio ad hyperbolam: ex N^i. 146, mutatur in

$$yy = \frac{aaxx + 2aabx + 2aagx + aabb}{gg}$$

$$+ \frac{2aabg + aagg}{gg},$$

&, extracta radice, $yy = \frac{ax + ab + ag}{g}$, æquatio ad triangulum; N^i. 147 in $yy = \frac{bbxx + 2bbbx + bbbb + aagg}{gg}$, æquatio rurſus ad hyperbolam; & æquatio N^i. 148. fit $yy = aa$, & $y = a$, ad parallelogrammum.

149. (*e*) Rectangula nempe in E, & B, & habentia angulum EFG communem.

150. (*f*) Nam AG æquat GE, quia ſcilicet triangula DAG, FEG rectangula in A, & E habent angulos ad G verticales & pares, ac latus DA æquale ipſi EF ex hyp.

(*g*) Siquidem $aa + 2ay + yy$ $(= (a+y)(a+y) = (a+y)\sqrt{(a+y)}\sqrt{(a+y)}) = x\sqrt{(aa-yy)}$ $(= x\sqrt{(a+y)}\sqrt{(a-y)})$ idem eſt ac $(a+y)\sqrt{(a+y)} = x\sqrt{(a-y)}$, unde quadrando exſurgit $a^3 + 3aay + 3ayy + y^3 = axx - yxx$. &c.

(*h*)

Digitized by Google

Idem aliter.

In BC cape hinc inde BI, & CK æquales CF, & age KF, HI, HC, Tab. IV. Fig. 5.
ac DF; quarum HC ac DF occurrant ipſis AF & IK in M & N, & in HC demitte normalem IL. (*b*) Eritque angulus K $= \frac{1}{2}$ BCF $= \frac{1}{2}$ EGF $=$ GFD $=$ AMH $=$ MHI $=$ CIL; adeoque triangula rectangula KBF, FBN, HLI & ILC ſimilia. Dic ergo FC $= a$, HI $= x$, & IC $= y$; & erit BN ($2a - y$.) BK (y) :: LC. LH :: CI*q* (yy.) HI*q* (xx.) adeoque $2axx - yxx = y^3$. (*i*) Ex qua æquatione facile colligitur hanc curvam eſſe ciſſoidem Veterum, ad circulum cujus centrum ſit A ac radius AH pertinentem.

PROB.

(*b*) Tota ſequens angulorum collatio ſic explicari, & demonſtrari poteſt. Quia triangulum CKF eſt iſoſceles per conſtructionem, eſt angulus exterior BCF duplus interioris & oppoſiti CKF, aut KFC: ſed ob triangnla ſimilia BCF, EGF, (149. *hujus*), angulus BCF æquat EGF, & hic duplus eſt anguli interioris & oppoſiti GFD, aut GDF (ſunt enim æqualia triangula DAG, FEG (150. *hujus*,) & ideo triangulum DGF eſt iſoſceles), igitur pares ſunt anguli FDG, GFD, KFC, CKF. Atqui anguli BCF, CFB ſimul unum rectum conſtituunt, ergo angulus NFK eſt rectus & circulus centro C radio CK deſcriptus tranſire debet per F & N puncta; eſt igitur NC æqualis FC, aut DH; quo circa parallelæ ſunt rectæ HC, DF, & angulus GFD æquat oppoſitum ad eaſdem partes AMH, & hic alternum MHI, qui æqualis eſt CIL, quia triangula HIC, CLI rectangula in I, & L, & habentia angulum HCI communem, ſimilia ſunt.

Tab. P. Fig. 3. (*i*) Examinemus hanc æquationem, & aliquas hujus curvæ proprietates inveſtigemus. Si hæc curva occurret rectæ XY, in occurſus puncto fieret $y = a$, ponamus hunc valorem in æquatione, ea fiet $a^3 = 2axx - axx$, quare $aa = xx$, & $a = \pm x$; igitur centro A, radio AH deſcribe circulum HPdp occurrentem rectæ XY in P, p, hæc erunt puncta, in quibus occurrit rectæ curva, quæ hinc inde extenditur, ſed nunquam tranſit rectam TS, quia tunc haberetur $-y$, & cubus $-y^3$ eſt $-y^3$ & $x = \frac{-y\sqrt{-y}}{2a+y}$, quod eſt abſurdum.

Age per d indefinitam VZ parallelam XY, & circuli tangentem; ſi curva occurreret ipſi VZ tunc fieret $y = 2a$, adeoque æquatio ad curvam fieret $8a^3 = 2axx - 2axx = 0$, quod eſt abſurdum, nam quantitas finita nunquam fit æqualis nihilo, curva ideo nunquam occurrit rectæ VZ.

Aſt y augetur dum x creſcit, nam ſi y minueretur x creſcente, quantitas $2a - y$ ſemper creſceret, quia ex eadem demeretur quantitas ſemper minor, ſed $y . 2a - y :: xx . yy$, igitur xx quantitas ſemper creſcens ad yy quantitatem ſemper decreſcentem haberet eandem rationem ac y quantitas ſemper decreſcens ad $2a - y$ quantitatem ſemper creſcentem. Id eſt abſurdum. Itaque curva ſemper propius accedit rectæ VZ, quæ ideo ejus *aſymtotus* eſt.

Ex æquatione ſuperiore deducitur analogia $x . y :: \frac{yy}{x} . 2a - y$; ſed $x . y :: y . \frac{yy}{x}$, ſunt igitur $x, y, \frac{yy}{x}, 2a - y$ in proportione continua. At acta ordinata quavis CI; & ex C, CQ parallela ST, & circulo occurrente in O, eſt HQ (IC $= y$). QO :: QO.Qd ($2a - y$); ideoque eſt OQ media inter y & $2a - y$, & $= \frac{yy}{x}$; quod etiam ſic invenitur. Jam OQ² $= 2ay - yy$; ſed quia $y^3 = 2axx - yxx$, erit, ducendo cuncta in y, & dividendo per xx, $\frac{y^4}{xx} = 2ay - yy$, quare $\frac{y^4}{xx} =$ OQ²; & $\frac{yy}{x} =$ OQ. Sunt ergo dQ, QO, QH, QC in proportione continua.

Nunc ex puncto C, ubi recta QC occurrit curvæ, duc ad punctum H rectam HC ſecantem circulum in R, & rectam VZ in N. Junge HO, Od; & ex R age RK parallelam ipſi VZ.

Digitized by Google

VZ. Jam CQ eſt ad QH ut RK ad KH; ſed CQ ad QH eſt ut HQ ad QO, & RK ad KH ut Kd ad KR, igitur HQ ad QO ut dK ad, KR, ſimilia ſunt itaque triangula dKR, HQO; quare angulus QHO æqualis angulo KdR, & arcus Od arcui RH, ac recta HO æqualis dR, id eſt, dK æquat HQ, & RN æquat CH.

Quæ cum ſit deſcriptio curvæ, quam veteres dixere *Ciſſoidem*, patet noſtram curvam eſſe quoque Ciſſoidem.

Veteres hujus curvæ ope duas medias inter duas datas rectas invenerunt ut tradit *Pappus Collect. Matth. Lib. III. Prop. V.*

Tab. IV. Fig. 5. Sed hoc problema poteſt aliquanto reddi generalius. Quia normæ DEF crus unum DE ſemper tranſire debet per punctum D, & alterum EF ſemper labi ſuper rectam AF, patet quod quando punctum F cadit in A, & tota FE ſuper totam AD, punctum E commune ambobus normæ cruribus debet cadere ſuper D, & punctum C ſuper H; atque ideo AF, AD, AH, FC ſemper debent æquari. Poteſt igitur hypotheſis mutari, ponendo EF diviſam eſſe in C non bifariam, ſed ſecundum quamvis rationem. Sit, ex. gr. DA $=$ EF $= a$, & CF $=$ AH $=$ BI $= \frac{am}{n}$, erit BC $= y - \frac{am}{n}$, & BF $= \sqrt{(\frac{2amy}{n} - yy)}$. Verum BF $(\sqrt{(2\frac{amy}{n} - yy)})$. FC $(\frac{am}{n})$ :: EF (a). FG $= \frac{aam}{n\sqrt{(2\frac{amy}{n} - yy)}}$, & FB $(\sqrt{(2\frac{amy}{n} - yy)})$. BC $(y - \frac{am}{n})$ :: AD (a). AG $= \frac{any - aam}{n\sqrt{(2\frac{amy}{n} - yy)}}$, ergo $x + \sqrt{(2\frac{amy}{n} - yy)} = \frac{ay}{\sqrt{(2\frac{amy}{n} - yy)}}$, & $x\sqrt{(2\frac{amy}{n} - yy)} = ay + yy - 2\frac{amy}{n}$, & quadrando, $2\frac{amyxx}{n} - xxyy = y^4 + 2ay^3 - 4\frac{amy^3}{n} + aayy - 4\frac{aamyy}{n} + 4\frac{aammyy}{nn}$, in qua ſi ponas $\frac{m}{n} = \frac{1}{2}$, habebis $ayxx - xxyy = y^4$, aut $axx - xxy = y^3$.

151. Quin, etiamſi anguli DAF, DEF eſſent obliqui & inæquales, problema reſolvi poſſet hoc modo. Tab. P. Ex dato puncto D duc DM faFig. 4. cientem angulum DMF æqualem dato DEF, & DN ad rectos angulos ipſi AF. Ex C age CB facientem quoque angulum CBF æqualem DEF, & CL normalem. Dic MD $= a$, DN $= b$, NM $= c$, EF $= f$, FC $= g$, & variabiles MB $= x$, BC $= y$. Triangula ſimilia MDN, BCL dant MD (a). DN (b) :: BC (y). CL $= \frac{by}{a}$, eſt ideo LF $= \sqrt{(gg - \frac{bbyy}{aa})}$. Item DM (a). MN (c) :: CB (y). BL $= \frac{cy}{a}$, qua propter BF $= \frac{cy}{a} + \sqrt{(gg - \frac{bbyy}{aa})}$. Sed triangula GFE, CFB habentia communem angulum ad F, & angulum GEF æqualem CBF, ſimilia ſunt, ut & triangula FEG; GDM, ergo BF $(\frac{cy}{a} + \sqrt{(gg - \frac{bbyy}{aa})})$. FC (g) :: EF (f). FG $= \frac{fg}{\frac{cy}{a} + \sqrt{(gg - \frac{bbyy}{aa})}}$, & FB $(\frac{cy}{a} + \sqrt{(gg - \frac{bbyy}{aa})})$. BC (y) :: DM (a). MG $= \frac{ay}{\frac{cy}{a} + \sqrt{(gg - \frac{bbyy}{aa})}}$; unde MG $+$ GF $= \frac{ay + fg}{\frac{cy}{a} + \sqrt{(gg - \frac{bbyy}{aa})}} = x + \frac{cy}{a} + \sqrt{(gg - \frac{bbyy}{aa})} =$ MB $+$ BF; & ſublata fractione $ay + fg = \frac{cxy}{a} + x\sqrt{(gg - \frac{bbyy}{aa})} + \frac{ccyy}{aa} + 2\frac{cy}{a}\sqrt{(gg - \frac{bbyy}{aa})} + gg - \frac{bbyy}{aa}$, & (cunctis ductis in aa, tranſlatis terminis commenſurabilibus, & aſymmetris diviſis per quantitates rationales, per quas multiplicati ſunt) $\frac{bbyy - ccyy + a^3y - acxy + aafg - aagg}{aax + 2acy} = \sqrt{(gg - \frac{bbyy}{aa})}$ & quadrando,

$$\frac{b^4y^4 - 2bbccy^4 + c^4y^4 + 2a^3bby^3 - 2abbcxy^3 -}{a^4xx + 4a^3cxy + 4aaccyy}$$

$$\frac{2a^3ccy^3 + 2ac^3xy^3 + 2aabbgfyy -}{a^4xx + 4a^3cxy + 4aaccyy}$$

$$\frac{2aabbggyy - 2aaccgfyy}{a^4xx + 4a^3cxy + 4aaccyy}$$

$+$

$$+\frac{2aaccggyy + a^6yy - 2a^4cxyy + aaccxxyy + 2a^5fgy - 2a^5ggy - 2a^3cfgxy + 2a^3cggxy}{a^4xx + 4a^3cxy + 4aaccyy}$$

$$+\frac{a^4ffgg - 2a^4fg^3 + a^4g^4}{a^4xx + 4a^3cxy + 4aaccyy} = \frac{aagg - bbyy}{aa}$$, ac (ſublatis fractionibus, deletis delendis, & transponendo, ac dividendo altiſſimum terminum per datas)

$$\frac{y^4 \begin{matrix} +2abbcx \\ +2a^3bb \\ -2a^3cc \\ +2ac^3x \end{matrix} y^3 \begin{matrix} +2aabbfg \\ -2aabbgg \\ -2aaccfg \\ -2aaccgg \\ +a^6 \\ -2a^4cx \\ +aaccxx \\ +aabbxx \end{matrix} yy \begin{matrix} +2a^5fg \\ -2a^5gg \\ -2a^3cfgx \\ -2a^3cggx \end{matrix} y \begin{matrix} +a^4ggff \\ -2a^4g^3f \\ +a^4g^4 \\ -a^4ggxx \end{matrix} = 0,}{b^4 + 2bbcc + c^4}$$

& quia $NM^2 + ND^2$ $(cc + bb) = DM^2$ (aa), erit $c^4 + 2bbcc + b^4 = a^4$, & $2abbcx + 2ac^3x = 2a^3cx$; atque $2aabbgg + 2aaccgg = 2a^4gg$; & $aabbxx + aaccxx = a^4xx$, unde æquatio induet hanc formam ſimpliciorem

$$y^4 \begin{matrix} +2\frac{bb}{a} \\ -2\frac{cc}{a} \\ +2\frac{cx}{a} \end{matrix} y^3 \begin{matrix} +2\frac{bbgf}{aa} \\ -2\frac{ccgf}{aa} \\ -2gg \\ +aa \\ -2cx \\ +xx \end{matrix} yy \begin{matrix} +2agf \\ -2agg \\ -2\frac{cgfx}{a} \\ -2\frac{cggx}{a} \end{matrix} y \begin{matrix} +ffgg \\ -2fg^3 \\ +g^4 \\ -ggxx \end{matrix} = 0,$$

Occurret autem hæc curva rectæ MF in puncto P, facta MP = EC, quod apparet ex geneſi, aut etiam ex æquatione, poſita $y = 0$; reſtat enim $ffgg - 2g^3f + g^4 = ggxx$, aut $ff - 2gf + gg = xx$, & $f - g$ (EC) $= x$; at difficilius inveniretur ubi ea occurrat rectæ DM.

152. Si vero, ceteris ſtantibus, angulus DMF evaderet rectus, tunc $a = b$, & $c = 0$, & æquatio hæc fieret

$$y^4 + 2ay^3 \begin{matrix} +2fg \\ -2gg \\ +aa \\ +xx \end{matrix} yy \begin{matrix} +2afg \\ -2agg \end{matrix} y \begin{matrix} +ffgg \\ -2fg^3 \\ +g^4 \\ -ggxx \end{matrix} = 0$$

Inveniretur ubi curva occurrit rectæ DM, ponendo $x = 0$; nam æquatio ſuperior fit

$$y^4 + 2ay^3 \begin{matrix} +2fg \\ -2gg \\ +aa \end{matrix} yy \begin{matrix} +2afg \\ -2agg \end{matrix} y \begin{matrix} +ffgg \\ -2fg^3 \\ +g^4 \end{matrix} = 0,$$

& extracta radice $yy + ay + fg - gg = 0$, unde $y = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{(\frac{aa}{4} + gg - fg)}$.

153. Si vero in hypoth. Num. 151. & 152 fieret $a = f$, æquatio Ni. 151. mutaretur in hanc

$$y^4 \begin{matrix} +2\frac{bb}{a} \\ -2\frac{cc}{a} \\ +2\frac{cx}{a} \end{matrix} y^3 \begin{matrix} +2\frac{bbg}{a} \\ -2\frac{ccg}{a} \\ -2gg \\ +aa \\ -2cx \\ +xx \end{matrix} yy \begin{matrix} +2aag \\ -2agg \\ -2cgx \\ -2\frac{cggx}{a} \end{matrix} y \begin{matrix} +aagg \\ -2ag^3 \\ +g^4 \\ -ggxx \end{matrix} = 0,$$

& ex geneſi patet, quod tunc curva occurreret rectæ DM in Q, ita ut QM = CF. Æquatio numeri 152 hanc indueret formam

$$y^4 + 2ay^3 \begin{matrix} +2ag \\ -2gg \\ +aa \\ +xx \end{matrix} yy \begin{matrix} +2aag \\ -2agg \end{matrix} y \begin{matrix} +aagg \\ -2ag^3 \\ +g^4 \\ -ggxx \end{matrix} = 0$$

& (ſi curva occurrit rectæ DM) $y = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{(\frac{aa-4ag+4gg}{4})} = \frac{-a \pm a \mp 2g}{2}$, ubi ex geneſi noſcimus, quod ſumere debemus $y = \frac{-a+a-2g}{2} = -g$, ut ſupra.

Et ſi præterea in hypotheſibus Ni. 154. eſſet $2g = a$, æquatio prima fieret

$$y^4 \begin{matrix} +\frac{bb}{g} \\ -\frac{cc}{g} \\ +\frac{cx}{g} \end{matrix} y^3 \begin{matrix} +bb \\ -cc \\ -2gg \\ -2cx \\ +xx \end{matrix} yy \begin{matrix} +4g^3 \\ -3cgx \end{matrix} \quad \begin{matrix} +g^4 \\ -ggxx \end{matrix} = 0$$

& ſecunda, $y^4 + 4gy^3 \begin{matrix} +3ggyy \\ +xxyy \end{matrix} + 4g^3y \begin{matrix} +g^4 \\ -ggxx \end{matrix} = 0$, quæ diviſa per $y+g$ dat æquationem, quam *Newtonus* invenit in prima hujus problematis reſolutione, memento tantum nos vocaſſe g lineam quam dixit a.

TAB. P. Fig. 5. Si vero anguli dati DEF crus unum EF caderet ſuper alterum ED, tunc negligi poſſet pars CE, & recta CG ſemper foret magnitudine data. Æquatio hujus curvæ poſſet a ſuperioribus deduci, ſed præſtat calculum inſtaurare. Igitur, facto angulo CBL æquale DAN, & ductis DN, CL normalibus; ſint DA $= a$, AN $= c$, ND $= b$, AB $= x$, BC $= y$, CG $= f$; & quia AD (a). DN (b) BC (y). CL $= \frac{by}{a}$, & AD (a). AN (c) :: CB (y). BL $= \frac{cy}{a}$, erit GL $= \sqrt{(ff-\frac{bbyy}{aa})}$, & GB $= \sqrt{(ff-\frac{bbyy}{aa})} - \frac{cy}{a}$, ac NG $= x-c+\frac{cy}{a} - \sqrt{(ff-\frac{bbyy}{aa})}$; ſed DN (b). NG $(x-c+\frac{cy}{a}-\sqrt{(ff-\frac{bbyy}{aa})})$ :: CL $(\frac{by}{a})$. LG $(\sqrt{(ff-\frac{bbyy}{aa})})$, igitur $\frac{xy-cy}{a} + \frac{cyy}{aa} - \frac{y}{a}\sqrt{(ff-\frac{bbyy}{aa})} = \sqrt{(ff-\frac{bbyy}{aa})}$ & (cunctis ductis in aa, aſymmetriſque in unam partem conjectis) $axy - acy + cyy = (aa+ay)\sqrt{(ff-\frac{bbyy}{aa})} = (\frac{aa+ay}{a})\sqrt{(aaff-bbyy)} = (a+y)\sqrt{(aaff-bbyy)}$; igitur quadrando $aaxxyy - 2aacxyy + 2acxy^3 + aaccyy - 2accy^3 + ccy^4 = a^4ff - aabbyy + 2a^3ffy - 2abby^3 + aaffyy - bby^4$, & (conjiciendo terminos omnes ad eandem partem, ac dividendo per $bb+cc$, vel per æqualem aa)

$$y^4 \begin{matrix} +2\frac{cx}{a} \\ -2\frac{cc}{a} \\ +2\frac{bb}{a} \end{matrix} y^3 \begin{matrix} +xx \\ -2cx \\ +aa \\ -ff \end{matrix} yy - 2affy - aaff = 0.$$

Si curva hæc alicubi accurreret rectæ AB, tunc $y = 0$, qui valor poſitus in æquatione ſuperiore dat $-aaff = 0$, quod eſt abſurdum: eſt ideo AB curvæ aſymptotus; quod etiam patet ex geneſi, nam quia omnes GC ſunt magnitudine datæ, debet curva ſemper aliquantulum diſtare a recta AB; ſed quo magis ea recedit a normali DN, eo acutior fit angulus DGN, vel par CGL, adeoque normalis CL ſemper decreſcit, vel curva accedit ad rectam, quam tamen nunquam attingit, quæ duæ ſunt proprietates characteriſticæ aſymptotorum.

Ubi

PROB. XXXV.

Si datæ longitudinis recta ED angulum datum EAD ſubtendens ita moveatur ut termini ejus D & E anguli iſtius latera AD & AE perpetim contingant; proponatur curvam FCG determinare quam punctum quodvis C in recta iſta ED datum deſcribit. TAB. IV. Fig. 6.

A dato puncto C age CB parallelam EA; & dic AB $= x$, BC $= y$, CE $= a$ & CD $= b$, & propter ſimilia triangula DCB, DEA, erit EC . AB :: CD . BD; hoc eſt $a \,.\, x :: b \,.\,$ BD $= \frac{bx}{a}$. Præterea demiſſo perpendiculo CH, propter datum angulum DAE vel DBC, adeoque datam rationem laterum trianguli rectanguli BCH, ſit $a \,.\, e ::$ BC . BH, & erit BH $= \frac{ey}{a}$. Aufer hanc de BD & reſtabit HD $= \frac{bx - ey}{a}$. Jam in triangu-

Ubi DC cadit in VD, eſt VN par GC, ut patet ex geneſi. Et hæc quidem ſi una ex coordinatis ponatur parallela ipſi BC; ſed melius fiet NL $= x$, LC $= y$, quo caſu punctum A, unde incipiunt omnes x, cadit in N, $e = 0$, $a = b$, quibus ſubſtitutis in æquatione, ea convertitur in hanc ſimpliciorem

$$y^4 + 2ay^3 \begin{matrix} +xx \\ +aa \\ -ff \end{matrix}\, yy - 2affy - aaff = 0$$

TAB. P. Fig. 5. Si data GC ſumpta fuiſſet infra rectam AB, y fieret negativa quantitas, & æquatio ad hanc curvam deduceretur ex ſuperiore mutatis ſignis terminorum in quibus index ipſius y eſt impar; unde fieret

$$y^4 - 2ay^3 \begin{matrix} +xx \\ +aa \\ -ff \end{matrix}\, yy + 2affy - aaff = 0$$

Hic revoca quæ ſupra notavimus, quibus adde, quod cum GC eſt minor, aut æqualis DN, curva CV ſemel occurrit rectæ DN inter D & N ſi GC eſt minor quam DN; in ipſo puncto D ſi æqualis: ſed cum CG, aut ei par NV, major eſt quam ND, curva occurret rectæ ND in duobus punctis V, & D.

TAB. Q. Fig. 1. Nam finge rectam, quæ ſemper tranſiens per D deſcribit curvam, eſſe NV: jam erit V punctum ad curvam. Centro D radio NV deſcribe arcum ſecantem rectam NG in g, erit Dg æqualis NV, & rurſus D ad curvam. Quamdiu vero rectæ extremitas altera verſabitur inter N & g, puta in γ, erit γD minor quam Dg; quare altera hujus rectæ extremitas deſcribit arcum DνV. Quum autem ea transgreſſa fuerit g, erit GD major quam gD, & punctum datum deſcribet curvæ arcum DC. Eadem dicenda ſunt cum recta ex N trahitur verſus M.

Hæ curvæ dicuntur *Conchoïdes Nicomedea* a *Nicomede* inventore, & punctum D vocatur *polus*, recta NG *Regula* vel *directrix*, & NV *intervallum*.

Hinc facile dato angulo CbL, & extra eum puncto D, agitur per D recta quæ ita ſecet anguli crura, ut interjecta pars CG æquet rectam datam. TAB. P. Fig. 5.

Nam ex D in alterum anguli dati crus Lb (productum quatenus opus eſt) demitte normalem DN, ex qua producta abſcinde NV datæ parem; ex polo D, regula NL, intervallo NV deſcribe conchoidem. Et quia recta BC, quo magis producitur, eo magis recedit a NL cui ſemper conchois accedit, patet quod aliquando recta, & curva ſibi occurrent. Occurrant in C, age CD, & erit CG cruribus anguli comprehenſa æqualis datæ, ut liquet.

Hac curva Nicomedes duas invenit medias continue proportionales inter duas datas, & angulum trifariam diviſit. Hujus uſum videbimus in *appendice* de æquationum conſtructione lineari.

gulo BCH, propter angulum rectum BHC, eſt $BCq - BHq = CHq$, hoc eſt $yy - \frac{eeyy}{aa} = CHq$. Similiter in triangulo CDH propter angulum CHD rectum, eſt $CDq - CHq = HDq$, hoc eſt $bb - yy + \frac{eeyy}{aa}$ $\left(= HDq = \frac{bx - ey}{a} \text{ quadrato}\right) = \frac{bbxx - 2bexy + eeyy}{aa}$. Et per reductionem $yy = \frac{2be}{aa}xy + \frac{aabb - bbxx}{aa}$, Ubi cum incognitæ quantitates ſint duarum tantum dimenſionum, paret curvam eſſe conicam ſectionem. Præterea extracta radice, fit $y = \frac{bex \pm b\sqrt{(eexx - aaxx + a^4)}}{aa}$. Ubi in termino radicali coefficiens ipſius xx eſt $ee - aa$. Atqui erat $a . e :: BC . HB$; & BC neceſſario major eſt linea quam BH, nempe hypothenuſa trianguli rectanguli major latere; ergo a major quam e, & $ee - aa$ negativa eſt quantitas, atque adeo curva erit ellipſis. (k)

PROB.

TAB. Q. Fig. 2. (k) Hujus ellipſeos diametri ſic inveniri poſſunt, ſume $AL = \frac{aa}{b}$, per L age LM parallelam AE, & æqualem e. Duc indefinitam AM. Jam pone $\frac{b}{aa}\sqrt{(eexx - aaxx + a^4)} = o$, erit $x = \pm \frac{aa}{\sqrt{(aa-ee)}}$. Sit $AQ = a$; Ex Q age in AD normalem QN: erit $AN = \sqrt{(aa-ee)}$. Quære tertiam poſt AN & AQ, quæ ſit AO. $= Ao$. Age OV, ou parallelas AE. Diameter vero ſecunda invenitur ponendo $x = o$, nam A eſt centrum, ut apparet, tunc autem habetur $y = \pm b = AP = Ap$. Nam hoc centro, hiſque diametris conjugatis deſcribe ellipſim VPup; & ex quovis puncto C duc ordinatam CR occurrentem AD in B. Jam, quia AL $(\frac{aa}{b})$. LM (e) :: AB (x). $BR = \frac{bex}{aa}$, erit $CR = y - \frac{bex}{aa}$. Dic $AM = f$: & quia LA $(\frac{aa}{b})$. AM (f) :: BA (x). AR :: AO$(\frac{aa}{\sqrt{(aa-ee)}})$. AV; erunt, $AR = \frac{bfx}{aa}$, & $AV = \frac{bf}{\sqrt{(aa-ee)}} = Au$; igitur $VR = \frac{bf}{\sqrt{(aa-ee)}} - \frac{bfx}{aa}$, & $Ru = \frac{bf}{\sqrt{(aa-ee)}} + \frac{bfx}{aa}$; quare uRV rectangulum $= \frac{bbff}{aa-ee} - \frac{bbffxx}{a^4}$; ſed uRV . RC^2 :: AV^2 . AP^2; ergo $\frac{bbff}{aa-ee} - \frac{bbffxx}{a^4} . yy - \frac{2bexy}{aa} + \frac{bbeexx}{a^4} :: \frac{bbff}{aa-ee} . bb$, & invicem ducendo extremas, & dividendo per mediarum alteram $yy - 2\frac{bexy}{aa} + \frac{bbeexx}{a^4} = bb - \frac{aabbxx + bbeexx}{a^4}$, id eſt; $yy = 2\frac{be}{aa}xy + \frac{aabb - bbxx}{aa}$, æquatio conſtruenda.

Si angulus EAD eſſet rectus, $BH = \frac{ey}{a} = o$; adeoque æquatio fieret $yy = bb - \frac{bbxx}{aa}$, & $y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{(aa-xx)}$. Si $\sqrt{(aa-xx)} = o$, eſſet $x = \pm a$, quæ foret una ex ſemi-diametris, & (ponendo $x = o$) $y = \pm b$, quæ eſſet altera.

Digitized by Google

PROB. XXXVI.

Tab. IV. Fig. 7.

Si norma EBD ita moveatur ut ejus crus unum EB continuo ſubtendat angulum rectum EAB, dum terminus alterius cruris BD deſcribat curvam aliquam lineam FDG; invenire lineam iſtam FDG quam punctum D deſcribit.

A puncto D ad latus AC demitte perpendiculum DC; & dictis $AC = x$, & $DC = y$, atque $EB = a$ & $BD = b$; in triangulo BDC propter angulum rectum ad C, eſt $BCq = BDq - DCq = bb - yy$. Ergo $BC = \sqrt{(bb - yy)}$ & $AB = x - \sqrt{(bb - yy)}$. Præterea propter ſimilia triangula BEA, DBC, eſt BD . DC :: EB . AB. hoc eſt $b . y :: a . x - \sqrt{(bb - yy)}$. Quare $bx - b\sqrt{(bb - yy)} = ay$, ſive $bx - ay = b\sqrt{(bb - yy)}$. Et partibus quadratis ac debite reductis $yy = \frac{2abxy + b^4 - bbxx}{aa + bb}$. Et extracta radice $y = \frac{abx + bb\sqrt{(aa + bb - xx)}}{aa + bb}$. Unde patet iterum curvam eſſe ellipſim. (*l*)

Hæc ita ſe habent ubi anguli EBD & EAB recti ſunt. Sed ſi anguli iſti ſunt alterius cujusvis magnitudinis, dummodo ſint æquales, ſic proce-

Tab. Q. Fig. 2.

(*l*) Cape $AL = a + \frac{bb}{a}$. Per L age LM parallelam AP, & æqualem b. Duc indefinitam AM. Nunc ponendo, $\frac{bb}{aa + bb}\sqrt{(aa + bb - xx)} = 0$; eſt $x = \pm\sqrt{(aa + bb)} = AO = Ao$; per O, & o duc OV, ou parallelas AP. Erit uV altera diametrorum. Quia A eſt centrum, pone $x = 0$; unde $y = \frac{bb}{aa + bb}\sqrt{(aa + bb)} = \frac{bb}{\sqrt{(aa + bb)}}$, cui pares abſcinde AP, Ap: erit Pp diameter conjugata.

Nam AL $(a + \frac{bb}{a})$. LM (b) :: AB (x) . BR :: AO $(\sqrt{(aa + bb)})$. OV; quare $BR = \frac{abx}{aa + bb}$, & $OV = \frac{ab\sqrt{(aa + bb)}}{aa + bb} = \frac{ab}{\sqrt{(aa + bb)}}$. Dic $AM = f$: quia AL $(a + \frac{bb}{a})$. AM (f) :: AB (x) . AR :: AO $(\sqrt{(aa + bb)})$. AV, eſt $AR = \frac{afx}{aa + bb}$, & $AV = \frac{af\sqrt{(aa + bb)}}{aa + bb} = \frac{af}{\sqrt{(aa + bb)}} = Au$; ergo $uR = \frac{af}{\sqrt{(aa + bb)}} + \frac{afx}{aa + bb}$, $RV = \frac{af}{\sqrt{(aa + bb)}} - \frac{afx}{aa + bb}$, & rectangulum $VRu = \frac{aaff}{aa + bb} - \frac{aaffxx}{(aa + bb)^2}$, $RC = y - \frac{abx}{aa + bb}$, & $RC^2 = yy - 2\frac{abxy}{aa + bb} + \frac{aabbxx}{(aa + bb)^2}$; ſed $uRV . RC^2 :: AV^2 . AP^2$, aut $\frac{aaff}{aa + bb} - \frac{aaffxx}{(aa + bb)^2}$ ad $yy - 2\frac{abxy}{(aa + bb)} + \frac{aabbxx}{(aa + bb)^2}$ ut $\frac{aaff}{aa + bb}$ ad $\frac{b^4}{aa + bb}$; quare $yy - 2\frac{abxy}{aa + bb} + \frac{aabbxx}{(aa + bb)^2} = \frac{b^4}{aa + bb} - \frac{b^4xx}{(aa + bb)^2}$, vel $\frac{b^4}{aa + bb} = yy - 2\frac{abxy}{aa + bb} + \frac{aabbxx + b^4xx}{(aa + bb)^2} = yy - \frac{2abxy + bbxx}{aa + bb}$, æquatio propoſita.

Tab. IV. Fig. 8. cedendum erit. Demittatur DC perpendicularis ad AC ut ante, & agatur DH conſtituens angulum DHA æqualem angulo HAE, puta obtuſum, dictiſque $EB = a$, $BD = b$, $AH = x$, & $HD = y$, propter ſimilia triangula EAB, BHD, erit BD . DH :: EB . AB . hoc eſt $b . y :: a . AB = \frac{ay}{b}$. Aufer hanc de AH, & reſtabit $BH = x - \frac{ay}{b}$. Præterea in triangulo DHC propter omnes angulos datos, adeoque datam rationem laterum, aſſume DH ad HC in ratione quavis data puta b ad e, & cum DH ſit y, erit $HC = \frac{ey}{b}$, & $BH . HC = \frac{exy}{b} - \frac{aeyy}{bb}$. Denique per 12. II. Elem. in triangulo BHD eſt $BDq = BHq + DHq + 2BH . HC$, hoc eſt $bb = xx - \frac{2axy}{b} + \frac{aayy}{bb} + yy + \frac{2exy}{b} - \frac{2aeyy}{bb}$. Et extracta radice $x = \frac{ay - ey \pm \sqrt{(eeyy - bbyy + bbbb)}}{b}$. Ubi cum b ſit major e, hoc eſt $ee - bb$ negativa quantitas, patet iterum curvam eſſe ellipſim (m)

PROB. XXXVII.

Tab. IV. Fig. 9. *In dato angulo PAB actis utcumque rectis BD; PD in data ratione hac ſemper lege, ut BD ſit parallela AP, & PD terminetur ad punctum P in recta AP datum; invenire locum puncti D.*

Age CD parallelam AB & DE perpendicularem AP; ac dic $AP = a$, $CP = x$, & $CD = y$, ſitque BD ad PD in ratione d ad e, & erit

AC

Tab. Q. Fig. 3. (m) Fac angulum LAP æqualem angulo EAp. Poſito quod a ſit minor quam e, cape $AL = b$. Duc LM parallelam AH, & æqualem $a - e$, quæ cadet verſus p, ob $a - e$ negativam, age indefinitam MA. Sit nunc $\sqrt{(\frac{eeyy - bbyy + b^4}{b})} = 0$: erit $y = \pm \frac{bb}{\sqrt{(bb - ee)}} = AO = Ao$. Duc OV, ov parallelas AH: erit Vv una ex diametris, pone nunc $y = 0$, quia A eſt centrum, & invenies $x = \pm b = AP = Ap$. Circa has diametros deſcribe ellipſim, & erit quæſita.

Nam ex quolibet ellipſeos puncto D age DH ipſi AL parallelam, & DF parallelam PA. Erit $HD = AR = y$, & $AH = RD = x$: quia AL (b) . LM $(e - a)$ :: AR (y) . $RF = \frac{ey - ay}{b}$, erit $FD = x + \frac{ey - ay}{b}$, & $FD^2 = xx + \frac{2exy - 2axy}{b} + \frac{eeyy - 2aeyy + aayy}{bb}$ Dic $AM = f$: quia AL (b) . AR (y) :: AM (f) . AF :: AO $(\frac{bb}{\sqrt{(bb - ee)}})$. AV, erit $AF = \frac{fy}{b}$, & $AV = \frac{bf}{\sqrt{(bb - ee)}} = Av$; quapropter $vF = \frac{bf}{\sqrt{(bb - ee)}} + \frac{fy}{b}$, & $FV = \frac{bf}{\sqrt{(bb - ee)}} - \frac{fy}{b}$, ac rectangulum $vFV = \frac{bbff}{bb - ee} - \frac{ffyy}{bb}$. Aſt $vFV . FD^2 :: AV^2 . AP^2$, vel $\frac{bbff}{bb - ee} - \frac{ffyy}{bb} . xx + \frac{2exy - 2axy}{b} + \frac{eeyy - 2aeyyx + aayy}{bb} :: \frac{bbff}{bb - ee} . bb$, vel $xx + \frac{2exy - 2axy}{b} + \frac{eeyy - 2aeyy + aayy}{bb} = bb - yy + \frac{eeyy}{bb}$, quæ (deletis delendis) eſt æquatio ſuperior.

Digitized by Google

AC vel BD $= a - x$, & PD $= \frac{ea - ex}{d}$. Sit inſuper, propter datum angulum DCE, ratio CD ad CE, d ad f, & erit CE $= \frac{fy}{d}$, & EP $= x - \frac{fy}{d}$. Atqui, propter angulos ad E rectos, eſt CDq — CEq (= EDq) = PDq — EPq, hoc eſt $yy - \frac{ffyy}{dd} = \frac{eeaa - 2eeax + eexx}{dd} - xx + \frac{2fxy}{d} - \frac{ffyy}{dd}$. Ac deletis utrobique $-\frac{ffyy}{dd}$, terminiſque rite diſpoſitis, $yy = \frac{2fxy}{d} + \frac{eeaa - 2eeax + eexx - ddxx}{dd}$. Et extracta radice

$$y = \frac{fx}{d} \pm \frac{\sqrt{\left(eeaa - 2eeax \begin{array}{l} +ee \\ -dd \\ +ff \end{array} xx\right)}}{d}.$$

Ubi cum x & y in æquatione penultima non niſi ad duas dimenſiones aſcendant, locus puncti D erit conica ſectio, eaque hyperbola, parabola, vel ellipſis, prout $ee - dd + ff$, (coefficiens ipſius xx in æquatione poſteriore,) ſit majus, æquale, vel minus nihilo. (n)

PROB.

Tab. Q. Fig. 4. 5. 6. (n) Quia d eſt quantitas arbitraria pone eam æqualem a, erit ideo

$$y = \frac{fx}{a} \pm \frac{\sqrt{(aaee - 2aeex + eexx + ffxx - aaxx)}}{a}.$$

Fac AF $= f$, & age indefinitam PF. Eſt igitur AP ad AF ut CD ad CE: ſed anguli PAF, DCE ſunt æquales, ergo triangulum PAF ſimile eſt triangulo DCE, & angulus F æqualis recto E.

Tab. Q. Fig. 7. Nunc ſuper $\alpha\beta$ ipſi AP parem, fac angulum $\beta\alpha\gamma$ æqualem angulo PAF, & deſcripto ſuper diametrum $\alpha\beta$ ſemicirculo rectæ $\alpha\gamma$ occurrente in γ, perficiatur triangulum rectangulum $\alpha\gamma\beta$: erit, ut patet, hoc triangulum æquale & ſimile triangulo AFP (figg. 4. 5. 6) & $\alpha\gamma$ æqualis AF. Aut igitur $\alpha\beta$ ad $\beta\gamma$ eandem habet rationem, ac a ad e, aut minorem, aut majorem.

Si primum, erit $\beta\gamma =$ PF $= e$, & $aa = ee + ff$, quo circa $y = \frac{fx \pm \sqrt{(aaee - 2aeex)}}{a}$, æquatio ad parabolam. Pone $\frac{\sqrt{(aaee - 2aeex)}}{a} = 0$, & invenies $x = \frac{a}{2} =$ PO. Duc OV parallelam AF: erit V vertex curvæ, VP $= \frac{e}{2}$, & VH axis. In $\frac{\sqrt{(aaee - 2aeex)}}{a}$ fac $x = 0$; cadet ordinata in P, & æquabit e, eſt igitur P focus, & PQ ſemiparameter. Tab. Q. Fig. 4.

Si ſecundum; erit $\beta\gamma$ major quam e. Finge $e = \gamma\delta$, cadet punctum δ inter α & β, quo circa aa majus erit quam $ff + ee$, & æquatio ſuperior ad ellipſim ſpectabit. Pone Tab. Q. Fig. 7.

$$\frac{\sqrt{(aaee - 2aeex + eexx + ffxx - aaxx)}}{a} = 0, \text{ \&}$$

$$\text{erit } xx = \frac{-2aeex + aaee}{aa - ff - ee}, \text{ vel}$$

$$x = \frac{-aee \pm \sqrt{(a^4ee - aaeeff)}}{aa - ff - ee}$$

$$= \frac{-aee \pm ae\sqrt{(aa - ff)}}{aa - ff - ee}.$$

Sume Pk $= \frac{aee}{aa - ff - ee}$, & hinc inde kO $=$ Tab. Q. Fig. 5.

kO

PROB. XXXVIII.

TAB. V. Fig. 1.

Rectis duabus VE & VC poſitione datis, & ab alia recta PE circa polum poſitione datum P vertente, ſectis utcunque in C & E; ſi recta intercepta CE dividatur in partes CD, DE rationem datam habentes, proponatur invenire locum puncti D.

Age VP, eique parallelas DA, EB occurrentes VC in A & B. Dic $VP = a$, $VA = x$, & $AD = y$, & cum detur ratio CD ad DE, vel converſe ratio CD ad CE, hoc eſt ratio DA ad EB, ſit iſta ratio d ad e, & erit $EB = \frac{ey}{d}$. Præterea, cum detur angulus EVB, adeoque ratio EB ad VB, ſit iſta ratio e ad f, & erit $VB = \frac{fy}{d}$. Denique propter ſimilia triangula CEB, CDA, CPV, eſt EB . CB :: DA . CA :: VP . VC, & componendo EB + VP . CB + VC :: DA + VP . CA + VC. Hoc eſt

ey

$ko = \frac{ae\sqrt{aa-ff}}{aa-ff-ee}$. Age kK, OV, ov parallelas AF: erunt puncta K centrum, V & v vertices. Rurſus in radicali pone $x = o$, & ordinata tranſiens per $P = e$.

Jam quia AP (a) . PF $(\sqrt{(aa-ff)})$ :: Pk $\frac{aee}{aa-ff-ee}$. $PK = \frac{ee\sqrt{(aa-ff)}}{aa-ff-ee}$: $KV = \frac{aae-eff}{aa-ff-ee}$, erit $VP = \frac{aae-eff-ee\sqrt{(aa-ff)}}{aa-ff-ee}$, & $Pv = \frac{aae-eff+ee\sqrt{(aa-ff)}}{aa-ff-ee}$, ac VP. $Pv = \frac{a^4ee-2aaeeff-aae^4+eef^4+e^4ff}{(aa-ff-ee)^2} = \frac{aaee-eeff}{aa-ff-ee}$; ſed VP . Pv . PQ² :: 2KV . π: igitur $\pi = 2e$, atque adeo eſt P focus, & PQ ſemiparameter.

TAB. Q. Fig. 7.

Si tertium, erit $\beta\gamma$ minor quam e; ſit $\gamma\lambda = e$: cadet punctum λ extra $\alpha\beta$; quare aa minor erit $ff+ee$, & ſuperior æquatio ad hyperbolam pertinebit. Pone $\frac{\sqrt{(aaee-2aeex+eexx+ffxx-aaxx)}}{a} = o$, erit $xx = \frac{2aeex-aaee}{ee+ff-aa}$, & $x = \frac{aee \pm \sqrt{(a^4ee-aaeeff)}}{ee+ff-aa} = \frac{aee \pm ae\sqrt{(aa-ff)}}{ee+ff-aa}$.

TAB. Q. Fig. 6.

Cape $Pk = \frac{aae}{ee+ff-aa}$, & hinc inde $kO = ko = \frac{ae\sqrt{(aa-ff)}}{ee+ff-aa}$, & age kK, OV, ov, parallelas AF, erunt, K centrum, V, v vertices. In radicali finge $x = o$, & ordinata in $P = e$, & ſuperioribus veſtigiis inſiſtens invenies $\pi = 2e$.

Nota quod in ſecunda hypotheſi $\sqrt{(aa-ff)} = \gamma\lambda$ eſt major quam $e = \gamma\delta$; itaque $\frac{ae\sqrt{(aa-ff)}}{aa-ff-ee}$ ſuperat $\frac{aee}{aa-ff-ee}$, vel KV major eſt quam KP; ſed in hac tertia eſt $\sqrt{(aa-ff)} = \gamma\lambda$ minor quam $\gamma\lambda = e$, quo circa $\frac{ae\sqrt{(aa-ff)}}{ee+ff-aa}$ ſuperatur ab $\frac{aee}{ee+ff-aa}$, vel KV minor eſt quam KP. Quod optime convenit cum curvarum natura.

Digitized by Google

$\frac{ey}{d} + a . \frac{fy}{d} :: y + a . x$. Ductiſque extremis & mediis in ſe, $eyx + dax = fyy + fay$. Ubi cum indefinitæ quantitates x & y non niſi ad duas dimenſiones aſcendant, ſequitur curvam VD, in qua punctum D perpetim reperitur, eſſe conicam ſectionem, eamque hyperbolam; quia una ex indefinitis quantitatibus, nempe x, eſt unius tantum dimenſionis, & in termino exy multiplicatur per alteram indefinitam quantitatem y (*o*).

PROB.

TAB. Q. Fig. 8. (*o*) Cum d ſit arbitrariæ magnitudinis, pone eam $=$ VP $= a$; & quia DC . CE :: $a . e$, & DC minor ponitur quam CE, erit a minor quam e; ſit VF $= e$. Duc FG parallelam VE. Erit VG $= f$, quia EB . BV :: FV . VG :: $e . f$. Æquatio autem fiet $exy + aax = fyy + afy$, aut, dividendo per $ey + aa$, $x = \frac{fyy + afy}{ey + aa} =$

(diviſione reipſa facta)

$$\frac{efy + aef - aaf}{ee} + \frac{a^4f - a^3ef}{e^3y + aaee}.$$

Dic

$$u = \frac{efy + aef - aaf}{ee},$$

&

$\frac{a^4f - a^3ef}{e^3y + aaee} = z$. Sit $u = o$; erit $- y = \frac{ae - aa}{e}$: quære igitur quartam poſt FV, VP, PF; ea erit $= y$. Hæc ſit VH. Jam pone $y = o$, fiet $u = \frac{aef - aaf}{ee}$; fac igitur FV (e) . VG (f) :: HV $(\frac{ae - aa}{e})$. VK $= \frac{aef - aaf}{ee}$, & per K, H age indefinitam MQ, ea erit una ex aſymptotis.

Nunc, quia diximus $z = \frac{a^4f - a^3ef}{e^3y + aaee}$, erit $e^3yz + aaeez = a^4f - a^3ef$; pone z infinitam, erit $- y = \frac{aa}{e} =$ VL: per L duc LM parallelam VB & occurrentem QM in M; hæc erit altera aſymptotus, & M centrum. Pone $y = o$, & reſtat $z = \frac{aaf - aef}{ee}$ æqualis VK ſi eam negative ſumas, eſt enim $\frac{aaf - aef}{ee}$ quantitas negativa, ob a minorem quam e. Deſcribe igitur inter aſymptotos QMR hyperbolam tranſeuntem per V. Dico eam eſſe locum æquationis propoſitæ.

Duc enim quamlibet NA parallelam VF, & occurrentem curvæ in D, aſymptoto in T, & rectæ VB in A; & per D age DQ parallelam aſymptoto MR: dic AV $= x$, AD $= y$, FG $= m$. Jam GV (f) . VF (e) :: AV (x) . AN $= \frac{ex}{f}$ :: QD . DT; ſed TD ($=$ AD $+$ TN $-$ AN) $= y + \frac{ae - aa}{e} - \frac{ex}{f}$, ergo QD $= \frac{fy}{e} + \frac{aef - aaf}{ee} - x$. Item VG ($f$) . GF ($m$) :: AV ($x$) . VN $= \frac{mx}{f} =$ TH :: DQ $(\frac{fy}{e} + \frac{aef - aaf}{ee} - x)$; QT $= \frac{my}{e} + \frac{aem - aam}{ee} - \frac{mx}{f}$ :: VK $(\frac{aef - aaf}{ee})$. KH $= \frac{aem - aam}{ee}$. Rurſus HL $=$ LV $-$ VH $= \frac{2aa - ae}{e}$, & VF (e) . FG (m) :: LH $(\frac{2aa - ae}{e})$. HM $= \frac{2aam - aem}{ee}$: eſt igitur MQ $=$ MH $+$ HT $+$ TQ $= \frac{aam}{ee} + \frac{my}{e}$, & MK $=$ MH $+$ HK $= \frac{aam}{ee}$; ſed MQ . QD $=$ MK . KV, ergo (reſtitutis ſymbolis, deletis delendis, cunctiſque diviſis per m, & multiplicatis per ee) $fyy + afy = exy + aax$, quæ eſt æquatio noſtra, & quæ donat æquationem Auctoris, repoſita d pro a in aax.

Quod ſi a major eſſet quam e, id eſt, ſi omnes re-

PROB. XXXIX.

Si rectæ duæ AC, BC a duobus poſitione datis punctis A & B in data quavis ratione ad tertium quodvis punctum C ducantur; invenire locum puncti concurſus C.

TAB. V. Fig. 2. Junge AB; & ad hanc demitte normalem CD: dictiſque AB $= a$, AD $= x$, DC $= y$: Erit AC $= \surd(xx + yy)$. BD $= a - x$ & BC $(= \surd(BDq + DCq) = \surd(xx - 2ax + aa + yy)$. Jam cum detur ratio AC ad BC, ſit iſta d ad e; &, extremis & mediis in ſe ductis, erit $e\surd(xx + yy) = d\surd(xx - 2ax + aa + yy)$. Et per reductionem $\surd(\frac{ddaa - 2ddax}{ee - dd} - xx) = y$. Ubi cum xx ſit negativum, & ſola unitate affectum, atque etiam angulus ADC rectus, patet curvam in qua punctum C locatur, eſſe circulum. Nempe in recta AB cape puncta E & F ita ut ſint $d . e :: AE . BE :: AF . BF$, & erit EF circuli hujus diameter. (p)

Et

TAB. R. Fig. 1. rectæ PE producendæ eſſent in D ut PE ad PD haberet datam rationem, tunc $\frac{ae - aa}{e}$ eſſet quantitas negativa; at $\frac{ae - aa}{e} = -y$, ergo, transferendo terminos omnes, $y = \frac{aa - ae}{e}$, igitur VH capi deberet in PV producta. Sed inveneramus $u = \frac{aef - aaf}{ee}$ quæ eſt quantitas negativa, ſumere ergo debemus VK verſus S, & per K, H agere indefinitam MQ; cetera vero ut ſupra: obſerva ſolum quod in prima hypotheſi VL minor eſt quam VP, quia eſt e major ad a (VP) minorem ut a ad VL; nunc autem eſt VL major quam VP, quia e minor eſt quam a. Debet autem hæc hyperbola contineri angulo SVN, & ei ad verticem, & ſuperior angulo NVA, & ei ad verticem, ut poſitio aſymptotorum & puncti in hyperbola ſatis oſtendunt.

Si vero in æquatione ad curvam ponamus $x = 0$, fit $y = -a$, at in priori hypotheſi non poteſt hyperbola ingredi angulum SVN, nec ei ad verticem; igitur hyperbola oppoſita tranſibit per P. Sed in ſecunda hypotheſi per P tranſit ipſa hyperbola quam deſcripſimus.

Si $a = e$, patet locum eſſe rectam VE; quod etiam ex æquatione deducitur; tunc enim eſt

$$x = \frac{fyy + afy}{ay + aa} = \frac{fy\,(y + a)}{a\,(y + a)} = \frac{fy}{a}.$$

Ceterum etiam ſic ſolvi potuiſſet problema. Reliquis poſitis, ut in Auctore, a puncto D agatur ipſi BU parallela DA rectæ UE occurrens in A; & a puncto P eidem BU parallela ducatur PF rectæ EU productæ occurrens in F. Dicatur FP $= a$; FU $= b$; UA $= y$; AD $= x$, & ſit CD ad DE ut FP (a) ad PG (d), & ſit FG $= a + d = c$. TAB. R. Fig. 2.

Eſt CD ad DE (ut a ad d), ut UA (y) ad AE $= \frac{dy}{a}$. Quare EU $= \frac{ay + dy}{a} = \frac{cy}{a}$, atque FE $= \frac{ab + cy}{a}$. Sed PF (a) ad FE $(\frac{ab + cy}{a})$, ut DA (x) ad AE $(\frac{dy}{a})$: ergo factum ex extremis $dy = \frac{abx + cxy}{a}$, quod eſt factum ex mediis; & rurſus habetur æquatio ad hyperbolam facile conſtruenda.

(p) Ponamus d, quantitatem arbitrariam, æqualem a, & primo ſit e major quam a. Fac $y = 0 = \surd(\frac{a^4 - 2a^3x}{ee - aa} - xx)$, erit

$$xx = \frac{-2a^3x + a^4}{ee - aa}, \text{ ac } x = \frac{-a^3}{ee - aa} \pm \surd(\frac{a^6}{(ee - aa)^2} + \frac{a^4}{ee - aa}) = \frac{-a^3 \pm \surd a^4ee}{ee - aa}$$

$=$

Et hinc e converſo patet hoc theorema, quod in circuli cujusvis diametro EF infinite producta datis utcunque duobus punctis A & B hac lege ut ſit AE.AF::BE.BF, & a punctis hiſce actis duabus rectis AC, BC concurrentibus ad circulum in puncto quovis C; erit AC ad BC in data ratione AE ad BE. (*q*)

PROB.

$= \frac{-a^3 \mp aae}{ee - aa} =$ (ſi utaris $\frac{-a^3 + aae}{ee - aa}$) $\frac{aa}{e + a}$; aut (ſi præferas $\frac{-a^3 - aae}{ee - aa}$) $= \frac{-aa}{e - a}$. Sed

Tab. R. Fig. 3. $e + a . a :: a . \frac{aa}{e + a}$, & eſt $e + a$ major quam a, igitur etiam a major quam $\frac{aa}{e + a} =$ AE. Abſcinde nunc AF $= \frac{aa}{e - a}$ & diametro EF deſcribe circulum.

Patet quod in hac hypotheſi, punctum A eſt inter E & F; eſt autem BE = BA—AE = $a - \frac{aa}{e + a} = \frac{ae}{e + a}$, & BF = BA + AF = $a + \frac{aa}{e - a} = \frac{ae}{e - a}$, & AE $(\frac{aa}{e + a})$. EB $(\frac{ae}{e + a})$ :: $a . e$ (multiplicando terminos hos per $e + a$, & dividendo per a) :: AF $(\frac{aa}{e - a})$. FB $(\frac{ae}{e - a})$, multiplicando per $e - a$, & dividendo per a, quod analogiam non turbat.

Tab. R. Fig. 4. Si vero ſit e minor quam a, erit $ee - aa$ quantitas negativa, ut $-a^3 + aae$, igitur $\frac{-a^3 + aae}{ee - aa}$ reſtabit poſitiva $= \frac{aa}{e + a}$, ut antea, (dividendo ſcilicet per $e - a$). Ea ſit AE. Item quantitas poſitiva fiet $\frac{-a^3 - aae}{ee - aa} = \frac{aa}{a - e}$ (diviſa nempe per negativam $-a - e$); ſed $a - e . a :: a . \frac{aa}{a - e}$, & eſt $a - e$ minor quam a, ergo a etiam minor quam $\frac{aa}{a - e}$, huic parem abſcinde AF, & punctum F cadet inter A & B: rurſus diametro EF deſcribe circulum. Dico hunc eſſe locum æquationis inventæ.

Inflecte quamlibet ACB, & ex C demitte CD ad rectos angulos ſuper AB. Erit AD = $\pm x$ in prima hypotheſi, id eſt $+ x$ ubi D cadit inter puncta A & B, & $- x$ ubi cadit inter A & F, aſt in ſecunda hypotheſi ſemper AD = $+ x$, DC = y in utraque hypotheſi,

Item in prima hypotheſi, DF æqualis FB—BA + AD, cum D eſt inter A & B, aut FB—BA — AD, cum D eſt inter A & F, ſemper $= \frac{ae}{e - a} - a + x = \frac{aa}{e - a} + x$, & ED æqualis EA — AD, aut EA + AD, ſemper $= \frac{aa}{e + a} - x$. Sed ex proprietate circuli, rectangulum FDE æquat quadratum ex CD, ergo $\frac{a^4}{ee - aa} + \frac{aax}{e + a} - \frac{aax}{e - a} - xx = yy = \frac{a^4 - 2a^3x}{ee - aa} - xx$. Tab. R. Fig. 3.

At in ſecunda hypotheſi, DF æqualis AD + FB — BA $= x - \frac{ae}{a - e} - a = x - \frac{aa}{a - e}$, & ED = EA—AD $= \frac{aa}{a + e} - x$; unde, & ex natura circuli $- \frac{a^4}{aa - ee} + \frac{aax}{a + e} + \frac{aax}{a - e} - xx = \frac{-a^4 + 2a^3x}{aa - ee} - xx = yy$. Tab. R. Fig. 4.

(*q*) Cum ſit AE ad EB ut AC ad CB, ut AF ad FB, patet quod junctæ CF, CE biſecant angulos ACG in prima hypotheſi, BCG in ſecunda, & ACB in utraque. Tab. R. Fig. 3. 4.

Igitur arcus CE æquat arcum EH, & eſt EF diameter, ergo CH ad rectos angulos eſt ſuper EF.

Ceterum hoc theorema deducitur ex prop. 2. lib. 2. Locor. plan. Apollonii reſtitutorum a Roberto Simſon, quam lege. Idem etiam ſic demonſtrari poteſt.

Sit circulus, cujus diameter EF, *& a quovis peripheriæ puncto* H *ad diametrum agatur perpendicularis* HD *rurſus occurrens peripheriæ in* C, *& per* C *ducatur quævis recta occurrens diametro in* B *& rurſus peripheriæ in* c, *ac juncta* cH *diametrum conveniat in* A: *dico, ut* AE *ad* Tab. R. Fig. 3. 4.

PROB. XL.

Si punctum lucidum A radiis verſus refringentem ſuperficiem planam CD ejiciat; invenire radium AC, cujus refractus CB impinget in datum punctum B.

TAB. V. Fig. 3. A puncto iſto lucido ad refringens planum demitte perpendiculum AD, & cum eo utrinque producto concurrat refractus radius BC in E, & perpendiculum a puncto B demiſſum in F, & agatur BD; dictiſque AD $= a$, BD $= b$, BF $= c$, DC $= x$, ſtatue rationem ſinuum incidentiæ & refractio-

EB *ita eſſe* AC *ad* CB, *&* AF *ad* FB, *&* *ſi* AE *ſit ad* EB *ut* AF *ad* FB *erit* CH *vel* ch *perpendicularis diametro.**

Jungantur CE, CF, CA*h* & *ch* diametro occurrens in *d*. Quia CH ad angulos rectos inſiſtit diametro, erit arcus CE æqualis arcui EH, & arcus C*c*F æqualis F*h*H, quare trianguli ACH angulus CAH biſecatur recta BF: ſed æquales ſunt anguli ad verticem CAH; *c*A*h*, & CAD; *h*A*d*, ut & HAD; *c*A*d*; quare trianguli *c*A*h* angulus *c*A*h* biſectus eſt eadem recta BF; rectæ *c*A; A*h* æque diſtant a centro; ideo ſunt æquales, ut & anguli A*ch*; *ch*A. Ergo recti ſunt anguli circa punctum *d*; recta *ch* parallela recta CH; & arcus *c*C æqualis arcui *h*H; atque arcus *c*CE arcui EH*h* & reliquus *c*F reliquo F*h*. Jam ergo æquales ſunt anguli *c*CF; FC*h* inſiſtentes æqualibus arcubus; id eſt trianguli ACB angulus exterior AC*c* biſectus eſt recta CF & eſt AF ad FB ut AC ad CB. Sed anguli *c*CA; ACB ſimul æquant duos rectos, id eſt bis angulum FCE, vel bis angulum FCA & bis angulum ACE; ergo demtis æqualibus angulis *c*CA & bis FCA, manet angulus ACB æqualis bis angulo ACE, & ejuſdem trianguli ACB angulus interior ACB biſ:ctus eſt recta CE; quare AC ad CB ut AE ad EB. Unde patet propoſitum. *Q. E. primum.*

TAB. R. Fig. 4. Dico nunc quod ſi ſit AE ad EB, ut AF ad FB, & per B agatur quævis chorda CB*h*, & juncta AC rurſus occurrat peripheriæ in *c*, juncta *ch* ſecat diametrum ad rectos angulos. Non enim; ſed ſi fieri poteſt, ſit *c*M normalis diametro; duc CM diametro occurrens in L, erit FL major, aut minor quam FB. Sit major: ergo EL minor quam EB; ſed AE ad EL ut AF ad FL, & *alternando* AE ad AF, ut EL ad LF, ut EB ad BF, & rurſus *alternando* EL minor ad EB majorem ut FL major ad FB minorem, quod eſt abſurdum. Eodem pacto devenies ab abſurdum ſi FL minorem ponas quam ipſa FB. *Q. E. alterum.*

Si in circuli diametro EF indefinite producta ſumantur duo quævis puncta A, B, *ita ut* AE *ad* EB *ſit ut* AF *ad* FB, *& inflectatur quævis* ACB, *erit ſemper* AC *ad* CB *ut* AF *ad* FB.

Occurrant AC; BC productæ iterum peripheriæ in *c* & *h*, agatur *cdh* per data puncta *c*, *h*, erit recta *ch* normalis ad diametrum, ergo patet propoſit.um.

Si a duobus datis punctis inflectantur AC, CB, ita ut quævis poteſtas ipſius AC ſit ad æque altam poteſtatem CB in data ratione, locus erit circulus ſic deſcribendus.

Eſſe debeat $AC^m . CB^m :: d . e$, quære inter d & e, medias continue proportionales numero $m - 1$, quarum prima ſit c, tunc $d^m . c^m :: d . e$; quare debet eſſe $AC . BC :: d . c$: Seca itaque AB data puncta jungentem in F, ita ut $AF . FB :: d . c$, eamque produc, ut AE.IEB :: AF.FB, & diametro FE deſcribe circulum. Hic erit locus quæſitus, ut patet.

Datam autem rectam AB ſectam in F, produces in E, ut AF ad FB ſit ut AE ad EB, ſumendo FN ipſi FB parem, & quærendo quartam BE poſt datas AN, NF, AB; nam quia AN ad NF eſt ut AB ad BE; etiam *componendo* AF ad (NF vel) FB ut AE ad EB. TAB. R. Fig. 4.

Patet autem quod ſi imperata ratio eſſet æqualitatis, locus eſſet normalis biſecans rectam AB.

(r)

Digitized by Google

ctionis, hoc eſt ſinuum angulorum CAD, CED (*r*) eſſe d ad e, & cum EC & AC (ut notum eſt) (*s*) ſint in eadem ratione, & AC ſit $\sqrt{(aa+xx)}$ erit $EC = \frac{d}{e}\sqrt{(aa+xx.)}$ Præterea eſt ED ($= \sqrt{(ECq - CDq)} = \sqrt{\left(\frac{ddaa+ddxx}{ee} - xx\right)}$, & $DF = \sqrt{(bb-ee,)}$ atque $EF = \sqrt{(bb-ee)} + \sqrt{\left(\frac{ddaa+ddxx}{ee} - xx\right)}$. Denique propter ſimilia triangula ECD, EBF, eſt ED . DC : : EF . FB, &, ductis extremorum & mediorum valoribus in ſe, $e\sqrt{\left(\frac{ddaa+ddxx}{ee} - xx\right)} = x\sqrt{(bb-ee)} + x\sqrt{\left(\frac{ddaa+ddxx}{ee} - xx\right)}$, ſive $(e-x)\sqrt{\left(\frac{ddaa+ddxx}{ee} - xx\right)} = x\sqrt{(bb-ee)}$. Et partibus æquationis quadratis & rite diſpoſitis,

$$x^4 - 2ex^3 \frac{\begin{matrix}+ddee\\+ddaa\\-eebb\end{matrix}\, xx - 2ddaaex + ddaaee}{dd-ee} = 0. \ (t)$$

PROB. XLI.

Invenire locum verticis trianguli D, cujus baſis AB datur, & anguli ad baſem DAB, DBA datam habent differentiam. Tab. V. Fig. 4.

Ubi angulus ad verticem, ſive (quod perinde eſt) ubi ſumma angu- III. 29. rum ad baſem datur, docuit Euclides locum verticis eſſe circum- Euclid. ſe-

Tab. R. Fig. 5. (*r*) Nam, ſi per C agatur recta GH parallela rectæ EF, erit angulus GCA, angulus incidentiæ, eſt autem æqualis alterno CAD. Pariter angulus BCH eſt angulus refractionis & eſt æqualis oppoſito CED. Quare &c.

(*s*) Quia in triangulo ECA, latera EC; CA ſunt ut ſinus angulorum oppoſitorum CAE, vel CAD, & CEA.

(*t*) Pone quantitatem arbitrariam $d = b$, æquatio fiet

$$x^4 - 2ex^3 + \frac{bbeexx + aabbxx - eebbxx - 2aabbex + aabbee}{bb-ee} = 0$$

aut, ponendo $ee + aa = ff$, & $bb - ee = gg$

$$x^4 - 2ex^3 + \frac{bbffxx - eebbxx - 2aabbex}{gg} + \frac{aabbee}{gg} = 0$$

Fac $gy = xx$, quæ eſt æquatio ad parabolam, & ponendo $ggyy$ pro x^4; gxy pro x^3, & gy pro xx, in æquatione poſtrema, habebis, dividendo per gg,

$$yy - \frac{2exy}{g} + \frac{bbffy - bbeey}{g^3} - \frac{2aabbeex + aabbee}{g^4} = 0$$

æquationem ad hyperbolam, cum diviſores termini altiſſimi $yy - \frac{2exy}{g}$, ſint y & $y - \frac{2ex}{g}$, inæquales & reales; quam facile deſcribes e ſuperioribus.

ferentiam circuli; propoſuimus igitur inventionem loci ubi differentia angulorum ad baſem datur. Sit angulus DBA major angulo DAB, ſitque ABF eorum data differentia, recta BF occurrente AD in F. Inſuper ad BF demittatur normalis DE, ut & ad AB normalis DC occurrens BF in G. Dictiſque AB $= a$, AC $= x$, & CD $= y$, erit BC $= a - x$. Jam in triangulo BCG cum dentur omnes anguli, dabitur ratio laterum BC & GC; ſit iſta d ad a, & erit GC $= \frac{aa - ax}{d}$. Aufer hanc de DC ſive y, & reſtabit DG $= \frac{dy - aa + ax}{d}$. Præterea, propter ſimilia triangula BGC, DGE, eſt BG . BC :: DG . DE. Eſt autem in triangulo BGC, $a . d$ :: CG . BC; adeoque $aa . dd$ :: CGq . BCq, & componendo $aa + dd . dd$ :: BGq . BCq. Et extractis radicibus $\sqrt{(aa + dd)} . d$ (:: BG . BC) :: DG . DE. Ergo DE $= \frac{dy - aa + ax}{\sqrt{(aa + dd)}}$. Adhæc cum angulus ABF ſit differentia angulorum BAD & ABD, adeoque anguli BAD & FBD æquentur, ſimilia erunt triangula rectangula CAD & EBD, & proinde latera proportionalia DA . DC :: BD . DE. Sed eſt DC $= y$. DA ($= \sqrt{(ACq + DCq)} = \sqrt{(xx + yy)}$. DB ($= \sqrt{(BCq + DC)q}) = \sqrt{(aa - 2ax + xx + yy)}$, & ſupra erat DE $= \frac{dy - aa + ax}{\sqrt{(aa + dd)}}$. Quare eſt $\sqrt{(xx + yy)} . y$ :: $\sqrt{(aa - 2ax + xx + yy)} . \frac{dy - aa + ax}{\sqrt{(aa + dd)}}$. Et extremorum & mediorum quadratis in ſe ductis $aayy - 2axyy + xxyy + y^4 = \frac{ddxxyy + ddy^4}{aa + dd}$

$$\frac{-2aadxxy - 2aady^3 + 2adyx^3 + 2adxy^3 + a^4xx + a^4yy - 2a^3x^3}{aa + dd}$$

$$\frac{-2a^3xyy + aax^4 + aaxxyy}{aa + dd}$$

Duc omnes terminos in $aa + dd$, & prodeuntes redige in debitum ordinem, & orietur $x^4 \begin{array}{l} -2a \\ +\frac{2d}{a}y \end{array} x^3 \begin{array}{l} -2dy \\ +aa \end{array} xx \begin{array}{l} +\frac{2d}{a}y^3 \\ +\frac{2dd}{a}yy \end{array} x \begin{array}{l} -ddyy \\ -2dy^3 \\ -y^4 \end{array} = 0.$

Divide hanc æquationem per $xx - ax \begin{array}{l} +dy \\ +yy \end{array}$, & orietur $xx \begin{array}{l} -a \\ +\frac{2d}{a}y \end{array} x \begin{array}{l} -yy \\ -dy \end{array} = 0$. Duæ itaque prodierunt æquationes in ſolutione hu-

jus

jus problematis. Prior $xx - ax \begin{array}{l} +dy \\ +yy \end{array} = 0$ eſt ad circulum, locum nempe puncti D ubi angulus FBD ſumitur ad alias partes rectæ BF quam in figura deſcribitur, exiſtente angulo ABF ſumma angulorum DAB, DBA ad baſem, adeoque angulo ADB ad verticem dato. Poſterior $xx \begin{array}{l} -a \\ +\frac{2d}{a}y \end{array} x \begin{array}{l} -yy \\ -dy \end{array} = 0$ eſt ad hyperbolam, locum puncti D ubi angulus FBD ſitum obtinet a recta BF quem in figura deſcripſimus, hoc eſt ita ut angulus ABF ſit differentia angulorum DAB, DBA ad baſem. Hyperbolæ autem hæc eſt determinatio. Biſeca AB in P. Age PQ conſtituentem angulum BPQ æqualem dimidio anguli ABF. Huic erige normalem PR, & erunt PQ, PR aſſymptoti hujus hyperbolæ, & B punctum per quod hyperbola tranſibit. (*u*)

Et

Tab. R. Fig. 6. (*u*) Si propoſitum fuiſſet problema. *Inveni-re locum verticis* D *trianguli, cujus baſis* AB *datur, & anguli ad baſem* DAB, DBA *datam conficiunt ſummam*, poſſes illud ſolvere ratiocinio prorſus eodem, niſi quod hic e GC demere deberes CD; ſed nihilominus ad eandem æquationem devenires, ut facile videbis; debet igitur hæc æquatio ambabus hypotheſibus inſervire.

Poſuimus autem angulum ABF, vel æqualem BDF, eſſe recto minorem, alioquin rectæ BF, CD coire nequirent in G, ut ſtatuimus, eſt ergo angulus BDA obtuſus, quapropter circuli centrum debet eſſe infra rectam BA.

Si nunc circulum, cujus ſegmentum terminatum recta BA debet eſſe capax anguli BDA, deſcribas *Euclideo* more, erit BG hujus circuli tangens, BM diameter, & L centrum, quod invenies biſecta chorda AB in H, & ex H educta normali ipſi BA.

Junge AM, erit angulus ad A rectus, & AMB æqualis CBG; ſunt igitur ſimilia triangula rectangula CBG, AMB; & eſt AM ad AB, ut BC ad CG :: *d*. *a*, ſed AB $= a$, ergo AM $= d$: quare HL aut CP $= \frac{d}{2}$, igitur DP $= y + \frac{d}{2}$. Pariter BL, vel LO, aut Lo $= \sqrt{(\frac{aa+dd}{4})}$ (BH² + HL²), quo circa OP ($=$ LO + LQ − QP) $= \sqrt{(\frac{aa+dd}{4})} + \frac{a}{2} - x$, & Po ($=$ oL − LQ + QP) $= \sqrt{(\frac{aa+dd}{4})} - \frac{a}{2} + x$. Sed ex proprietate circuli OP . Po $=$ PD², ergo $ax - xx = xx + dy$, aut $xx - ax \begin{array}{l} +dy \\ +yy \end{array} = 0$.

Atqui æquatio ab Auctore inventa debet etiam hanc continere, & quidem per multiplicationem, ergo dividendo reſtat

$$xx \begin{array}{l} -a \\ +\frac{2dy}{a} \end{array} x \begin{array}{l} -yy \\ -dd \end{array} = 0,$$

pro ſolutione problematis quod propoſitum fuerat.

Hyperbola facile determinatur & ſuperioribus.

Eſt enim $y = \frac{dx}{a} - \frac{d}{2} \pm \sqrt{(\frac{(aa+dd)xx}{aa} - \frac{x(aa+dd)}{a} + \frac{dd}{4})}$; & factis $u = \frac{dx}{a} - \frac{d}{2}$, ac $z = \pm\sqrt{(\frac{(aa+dd)\,xx}{aa} - \frac{x(aa+dd)}{a} + \frac{dd}{4})}$; ubi $u = 0$, eſt $x = \frac{a}{2} =$ AP, & cum $x = 0$, $u = -\frac{d}{2} =$ AL. Tab. R. Fig. 7. Proinde per P & L age indefinitam PL in ea erit vera diameter ordinatarum AL, cujus poſitio determinata eſt ſecundum Num.

130.

Et hinc prodit tale theorema. Hyperbolæ rectangulæ diametro quavis AB ducta, & terminis ejus ad hyperbolæ puncta duo quævis D & H ductis rectis AD, DB, AH, BH; hæ rectæ angulos DAH, DBH ad terminos diametri conſtituent æquales.

Idem brevius.

Ad PROB. XXIV. *Regulam* de commoda terminorum ad ineundum calculum electione tradidi; ubi obvenit ambiguitas in electione. Hic differentia angulorum ad baſem eodem modo ſe habet ad utrumque angulum; & in conſtructione ſchematis æque potuit addi ad angulum minorem DAB, ducendo ab A rectam ipſi BF parallelam, ac ſubtrahi ab angulo majori DBA ducendo rectam BF. Quamobrem nec addo nec ſubtraho, ſed dimidium ejus uni angulorum addo, alteri ſubtraho. Deinde cum etiam ambiguum ſit utrum AC vel BC pro termino indefinito cui ordinatim applicata DC inſiſtit, adhibeatur, neutrum adhibeo; ſed biſeco AB in P, & ad-

130. Sed eſt LA $(\frac{d}{2})$. AP $(\frac{a}{2})$ :: d . a :: BC . CG, & ſunt anguli ad A & C æquales, igitur ſimilia ſunt triangula PAL, GCB, & angulus ALP æquat angulum CBG.

Pone nunc o $= z = \sqrt{(\frac{(aa+dd)\ xx}{aa} - \frac{x\,(aa+dd)}{a} + \frac{dd}{4})}$ erit $xx = ax - \frac{aadd}{4aa+4dd}$, & $x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^4}{4aa+4dd}} = \frac{a}{2} \pm \frac{aa}{2\sqrt{(aa+dd)}}$, & jam AP $= \frac{a}{2}$, ut in N°. 104.; quære ergo tertiam poſt LP $\frac{(\sqrt{(aa+dd)})}{4}$, & PA $(\frac{a}{2})$; hæc ſit PN $=$ Pn, & age NO, no parallelas AL; erunt O, o vertices hyperbolarum oppoſitarum, ut ex N°. 135.

Atqui triangula ſimilia LAP, ONP dant LP . PA :: OP . PN, & fecimus LP . PA :: PA . PN, ergo PA . PN :: PO . PN, quare eſt OP $=$ PA $= \frac{a}{2}$, igitur OP, PA ſunt diametri æquidiſtantes ab axe, nam hyperbola tranſit per B & per A, quia ſi in æquatione ponas $y = o$, eſt $xx - ax = o$, id eſt $x = o$, vel $x = a$.

Sed LP^2 — PO^2 $(\frac{dd}{4})$. LA^2 $(\frac{dd}{4})$ :: OP^2 . rr, eſt igitur $r = \frac{a}{2}$, & hyperbola eſt æquilatera, quapropter aſymptoti ſunt invicem ad rectos angulos; ſed axis biſecat angulum aſymptotorum, debent ergo aſymptoti facere cum diametris OP, PA angulos æquales; verum anguli APL; PLA ſimul conficiunt unum rectum, igitur fac angulum QPB æqualem dimidio dato CBG, & recta QB erit aſymptotorum una, altera vero erit RP priori normalis.

Nam age quamlibet MC parallelam AL, & curvæ occurrentem in V: erit AC $= x$, CP $= x - \frac{a}{2}$, & CV $= y$; ſed quia AP $(\frac{a}{2}$. AL $(\frac{d}{2}$ :: PC $(x - \frac{a}{2})$. CM $= \frac{dx}{a} - \frac{d}{2}$; eſt MV $= \frac{dx}{a} - \frac{d}{2} - y$, & cum AP $(\frac{a}{2})$. PL $(\frac{1}{2}\sqrt{(aa+dd)})$ :: CP $(x - \frac{a}{2})$. PM $= \frac{x}{a}\sqrt{(aa+dd)} - \frac{1}{2}\sqrt{(aa+dd)}$, reperitur PM^2 $= xx + \frac{ddxx}{aa} - ax - \frac{ddx}{a} + \frac{aa+dd}{4}$; ſed PM^2 — PO^2 $=$ MV^2 ergo $xx - ax = yy + dy - 2\frac{dxy}{a}$, quæ eſt æquatio conſtruenda.

Digitized by Google

adhibeo PC: vel potius acta MPQ conſtituente hinc inde angulos APQ, BPM æquales dimidio differentiæ angulorum ad baſem, ita ut ea cum rectis AD, BD, conſtituat angulos DQP, DMP æquales; ad MQ demitto normales AR, BN, DO, & adhibeo DO pro ordinatim applicata ac PO pro indefinita linea cui inſiſtit. Voco itaque PO $= x$, DO $= y$, AR, vel BN $= b$, & PR vel PN $= c$. Et propter ſimilia triangula BNM, DOM, erit BN . DO :: MN . MO: & dividendo, DO — BN ($y - b$). DO (y) :: MO — MN (ON, ſive $c - x$) . MO. Quare MO $= \frac{cy - xy}{y - b}$. Similiter ex altera parte propter ſimilia triangula ARQ, DOQ, erit AR. DO ::.RQ. QO: & componendo DO + AR ($y + b$). DO (y) :: QO + RQ (OR, ſive $c + x$) . QO. Quare QO $= \frac{cy + xy}{y + b}$. Denique propter æquales angulos DMQ, DQM, æquantur MO & QO, hoc eſt $\frac{cy - xy}{y - b} = \frac{cy + xy}{y + b}$. Divide omnia per y, & multiplica per denominatores, & orietur $cy + bc - xy - bx = cy - bc + xy - bx$, ſive $cb = xy$, notiſſima æquatio ad hyperbolam. (v) Tab. V. Fig. 5.

Quin etiam locus puncti D ſine calculo algebraico prodire potuit. Eſt enim ex ſuperioribus DO — BN . ON :: DO . MO (QO) :: DO + AR . OR. Hoc eſt DO — BN . DO + BN :: ON . OR, & mixtim (x) DO . BN :: $\frac{ON + OR}{2}$ (NP). $\frac{OR - ON}{2}$ (OP). Adeoque DO in OP $=$ BN in NP.

PROB.

(v) Hujus hyperbolæ conſtructionem ut nimis facilem, omitto.

(x) Eſt enim DO—BN ad DO + BN ut ON ad OR; ergo DO — BN + DO + BN (2DO) ad DO + BN ut NO + OR ad OR; ergo etiam DO+BN ad DO + BN— DO + BN (2BN) ut OR ad OR — ON; quare *ex æquo ordinate*, 2DO ad 2BN ut RO + ON ad RO—ON, & dividendo per 2. &c.

Sed idem problema facilius ſolvit *Robertus Simſon* in appendice ad ſuas ſectiones conicas, edit. 2a; hoc pacto.

Tab. R. Fig. 8. Eſto triangulum ABC, cujus datur baſis AB & exceſſus anguli ABC ſupra angulum BAC. Ipſi angulo BAC æqualis ponatur angulus BCD.

Cum ſit angulus ABC æqualis utrique BDC & DCB, vel BAC, ſimul; erit angulus BDC exceſſus anguli ABC ſupra angulum BAC; atque ideo dabitur angulus BDC per hypot.

Nunc triangula ADC; BDC, quæ habent communem angulum ad D & æquales angulos DAC; DCB, ſunt æquiangula; ergo AD ad DC ut CD ad DB, & rectangulum ſub AD; DB eſt æquale quadrato ex DC, & datus eſt angulus ADC; quare punctum C tangit hyperbolam æquilateram, quæ deſcribetur biſecta AB in E, & ducta EF æquali ipſi AE vel EB, & conſtituente angulum AEF æqualem dato angulorum exceſſui. Erunt AE; EL, ſemidiametri conjugatæ, quarum transverſa & integra erit AB.

Digitized by Google

Et hinc prodit tale theorema. Hyperbolæ rectangulæ diametro quavis AB ducta, & terminis ejus ad hyperbolæ puncta duo quævis D & H ductis rectis AD, DB, AH, BH; hæ rectæ angulos DAH, DBH ad terminos diametri conſtituent æquales.

Idem brevius.

Ad PROB. XXIV. *Regulam* de commoda terminorum ad ineundum calculum electione tradidi; ubi obvenit ambiguitas in electione. Hic differentia angulorum ad baſem eodem modo ſe habet ad utrumque angulum; & in conſtructione ſchematis æque potuit addi ad angulum minorem DAB, ducendo ab *A* rectam ipſi BF parallelam, ac ſubtrahi ab angulo majori DBA ducendo rectam BF. Quamobrem nec addo nec ſubtraho, ſed dimidium ejus uni angulorum addo, alteri ſubtraho. Deinde cum etiam ambiguum ſit utrum AC vel BC pro termino indefinito cui ordinatim applicata DC inſiſtit, adhibeatur, neutrum adhibeo; ſed biſeco AB in P, & ad-

130. Sed eſt LA $(\frac{d}{2})$. AP $(\frac{a}{2})$ :: d . a :: BC . CG, & ſunt anguli ad A & C æquales, igitur ſimilia ſunt triangula PAL, GCB, & angulus ALP æquat angulum CBG.

Pone nunc o $= x = \sqrt{\left(\frac{(aa+dd)\,xx}{aa} - \frac{x\,(aa+dd)}{a} + \frac{dd}{4}\right)}$ erit $xx = ax - \frac{aadd}{4aa+4dd}$, & $x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^4}{4aa+4dd}} = \frac{a}{2} \pm \frac{aa}{2\sqrt{(aa+dd)}}$, & jam AP $= \frac{a}{2}$, ut in N°. 104; quære ergo tertiam poſt LP $\frac{(\sqrt{(aa+dd)})}{4}$, & PA $(\frac{a}{2})$; hæc ſit PN $=$ Pn, & age NO, no parallelas AL; erunt O, o vertices hyperbolarum oppoſitarum, ut ex N°. 135.

Atqui triangula ſimilia LAP, ONP dant LP . PA :: OP . PN, & fecimus LP . PA :: PA . PN, ergo PA . PN :: PO . PN, quare eſt OP $=$ PA $= \frac{a}{2}$, igitur OP, PA ſunt diametri æquidiſtantes ab axe, nam hyperbola tranſit per B & per A, quia ſi in æquatione ponas $y = 0$, eſt $xx - ax = 0$, id eſt $x = 0$, vel $x = a$.

Sed $LP^2 - PO^2 (\frac{dd}{4})$. $LA^2 (\frac{dd}{4})$ :: OP^2. rr, eſt igitur $r = \frac{a}{2}$, & hyperbola eſt æquilatera, quapropter aſymptoti ſunt invicem ad rectos angulos; ſed axis biſecat angulum aſymptotorum, debent ergo aſymptoti facere cum diametris OP, PA angulos æquales; verum anguli APL; PLA ſimul conficiunt unum rectum, igitur fac angulum QPB æqualem dimidio dato CBG, & recta QB erit aſymptotorum una, altera vero erit RP priori normalis.

Nam age quamlibet MC parallelam AL, & curvæ occurrentem in V: erit AC $= x$, CP $= x - \frac{a}{2}$, & CV $= y$; ſed quia AP $(\frac{a}{2}$. AL $(\frac{d}{2}$ :: PC $(x - \frac{a}{2})$. CM $= \frac{dx}{a} - \frac{d}{2}$; eſt MV $= \frac{dx}{a} - \frac{d}{2} - y$, & cum AP $(\frac{a}{2})$. PL $(\frac{1}{2}\sqrt{(aa+dd)})$ :: CP $(x - \frac{a}{2})$. PM $= \frac{x}{a}\sqrt{(aa+dd)} - \frac{1}{2}\sqrt{(aa+dd)}$, reperitur $PM^2 = xx + \frac{ddxx}{aa} - ax - \frac{ddx}{a} + \frac{aa+dd}{4}$; ſed $PM^2 - PO^2 = MV^2$ ergo $xx - ax = yy + dy - 2\frac{dxy}{a}$, quæ eſt æquatio conſtruenda.

adhibeo PC: vel potius acta MPQ conſtituente hinc inde angulos APQ, BPM æquales dimidio differentiæ angulorum ad baſem, ita ut ea cum rectis AD, BD, conſtituat angulos DQP, DMP æquales; ad MQ demitto normales AR, BN, DO, & adhibeo DO pro ordinatim applicata ac PO pro indefinita linea cui inſiſtit. Voco itaque PO $= x$, DO $= y$, AR, vel BN $= b$, & PR vel PN $= c$. Et propter ſimilia triangula BNM, DOM, erit BN . DO :: MN . MO: & dividendo, DO — BN ($y - b$). DO (y) :: MO — MN (ON, ſive $c - x$). MO. Quare MO $= \frac{cy - xy}{y - b}$. Similiter ex altera parte propter ſimilia triangula ARQ, DOQ, erit AR. DO :: RQ. QO: & componendo DO + AR ($y + b$). DO (y) :: QO + RQ (OR, ſive $c + x$). QO. Quare QO $= \frac{cy + xy}{y + b}$. Denique propter æquales angulos DMQ, DQM, æquantur MO & QO, hoc eſt $\frac{cy - xy}{y - b} = \frac{cy + xy}{y + b}$. Divide omnia per y, & multiplica per denominatores, & orietur $cy + bc - xy - bx = cy - bc + xy - bx$, ſive $cb = xy$, notiſſima æquatio ad hyperbolam. (v) Tab. V. Fig. 5.

Quin etiam locus puncti D ſine calculo algebraico prodire potuit. Eſt enim ex ſuperioribus DO — BN . ON :: DO . MO (QO) :: DO + AR . OR. Hoc eſt DO — BN . DO + BN :: ON . OR, & mixtim (x) DO . BN :: $\frac{ON + OR}{2}$ (NP). $\frac{OR - ON}{2}$ (OP). Adeoque DO in OP $=$ BN in NP.

PROB.

(v) Hujus hyperbolæ conſtructionem ut nimis facilem, omitto.

(x) Eſt enim DO — BN ad DO + BN ut ON ad OR; ergo DO — BN + DO + BN (2DO) ad DO + BN ut NO + OR ad OR; ergo etiam DO + BN ad DO + BN — DO + BN (2BN) ut OR ad OR — ON; quare *ex æquo ordinate*, 2DO ad 2BN ut RO + ON ad RO — ON, & dividendo per 2. &c.

Sed idem problema facilius ſolvit *Robertus Simſon* in appendice ad ſuas ſectiones conicas, edit. 2a; hoc pacto.

Tab. R. Fig. 8. Eſto triangulum ABC, cujus datur baſis AB & exceſſus anguli ABC ſupra angulum BAC. Ipſi angulo BAC æqualis ponatur angulus BCD. Cum ſit angulus ABC æqualis utrique BDC & DCB, vel BAC, ſimul; erit angulus BDC exceſſus anguli ABC ſupra angulum BAC; atque ideo dabitur angulus BDC per hypot.

Nunc triangula ADC; BDC, quæ habent communem angulum ad D & æquales angulos DAC; DCB, ſunt æquiangula; ergo AD ad DC ut CD ad DB, & rectangulum ſub AD; DB eſt æquale quadrato ex DC, & datus eſt angulus ADC; quare punctum C tangit hyperbolam æquilateram, quæ deſcribetur biſecta AB in E, & ducta EF æquali ipſi AE vel EB, & conſtituente angulum AEF æqualem dato angulorum exceſſui. Erunt AE; EL, ſemidiametri conjugatæ, quarum tranſverſa & integra erit AB.

PROB. XLII.

Locum verticis trianguli invenire cujus baſis datur & angulorum ad baſem unus dato angulo differt a duplo alterius.

TAB. V. Fig. 5.

In ſchemate noviſſimo ſuperioris problematis ſit ABD triangulum illud, AB baſis biſecta in P, APQ vel BPM triens anguli dati, quo angulus DBA excedit duplum anguli DAB; & angulus DMQ erit duplus anguli DQM. (y) Ad MQ demitte perpendicula AR, BN, DO; & angulum DMQ biſeca recta MS occurrente DO in S; & erunt triangula DOQ, SOM ſimilia; adeoque OQ . OM :: OD . OS, & dividendo OQ — OM . OM :: SD . OS :: (per 3. VI. Elem.) DM . OM Quare (per 9. V. Elem.) OQ — OM = DM. Dictis jam PO = x, OD = y, AR vel BN = b, & PR vel PN = c, erit, ut in ſuperiore problemate, OM = $\frac{cy - xy}{y - b}$, & OQ = $\frac{cy + xy}{y + b}$, adeoque OQ – OM = $\frac{-2bcy + 2xyy}{yy - bb}$.

Pone jam DOq + OMq = DMq, hoc eſt $yy + (\frac{cc - 2cx + xx}{yy - 2by + bb})yy = (\frac{4bbcc - 8bcxy + 4xxyy}{y^4 - 2bbyy + b^4})yy$. Et per debitam reductionem (z) orietur tandem

$$y^4 * \begin{array}{l} + cc \\ - 2bb \\ - 2cx \\ - 3xx \end{array} yy \begin{array}{l} + 2bxx \\ + 4bcx \\ + 2bcc \end{array} y \begin{array}{l} + b^4 \\ - 3bbcc \\ - 2bbcx \\ + bbxx \end{array} = 0.$$

Divide omnia per $y - b$, & evadet $y^3 + byy \begin{array}{l} - bb \\ + cc \\ - 2cx \\ - 3xx \end{array} y \begin{array}{l} - b^3 \\ + 3bcc \\ + 2bcx \\ - bxx \end{array} = 0.$

Quare punctum D eſt ad curvam trium dimenſionum; quæ tamen evadit hyperbola ubi angulus BPM ſtatuitur nullus, ſive angulorum ad baſem unus DBA duplus alterius DAB. Tunc enim BN, ſive b evaneſcente, æquatio fiet $yy = 3xx + 2cx - cc$ (a).

Ex

(y) Cum angulus BPM ſit triens anguli, quo angulus DBP ſuperat duplum anguli DAP, & cum angulus DBP æquet angulos DMP, BPM ſimul; erit angulus DMP æqualis duplo angulorum DAP, APQ ſimul; at angulus DQM æquatur angulis DAP & APQ, ergo angulus DMP par eſt duplo angulo DQM.

(z) Reductio fiet ducendo yy in $y^4 - 2bbyy + b^4$, & $(cc - 2cx + xx)\,yy$ in $yy + 2by + bb$, (eſt enim $y^4 - 2bbyy + b^4 = (yy - 2by + bb)(yy + 2by + bb)$) & deletis delendis, ac transponendo &c.

(a) Cum $y = \pm \sqrt{(3xx + 2cx - cc)}$ ſit = 0, eſt $xx = \frac{-2cx + cc}{3}$, & $x = \frac{-c \pm \sqrt{4cc}}{3}$, quare $x = \frac{c}{3}$, aut $x = -c$. Abſcinde PV = $\frac{c}{3}$, quo circa erunt V, & R vertices TAB. S. Fig. 1.

by-

Ex hujus autem æquationis conſtructione tale elicitur theorema. Si centro C, aſymptotis CS, CT, angulum SCT 120 graduum continentibus deſcribatur hyperbola quævis DV, cujus ſemiaxes ſint CV, CA: produc CV ad B, ut ſit VB = VC, & ab A & B actis utcunque rectis AD, BD concurrentibus ad hyperbolam, erit angulus BAD dimidium anguli ABD, triens vero anguli ADE quem recta AD comprehendit cum BD producta. Hoc intelligendum eſt de hyperbola quæ tranſit per punctum V. Quod ſi ab iiſdem punctis A & B actæ rectæ *Ad*, B*d* conveniant ad conjugatam hyperbolam quæ tranſit per A: tunc externorum angulorum trianguli ad baſem, ille ad B erit duplus alterius ad A. TAB. V. Fig. 6.

PROB.

hyperbolarum oppoſitarum, & tota diameter $VR = \frac{4c}{3}$, atque ideo dimidia $VC = \frac{2c}{3} = VN$. Erit igitur quævis abſciſſa $PQ = x$, & RQ $c + x$; ſed $QV = x - \frac{c}{3}$, & $RQ \cdot QV = \frac{3xx + 2cx - cc}{3}$, quæ quantitas eſſe debet ad ordinatæ quadratum $(yy = 3xx + 2cx - cc)$ :: $VC^2 (\frac{4cc}{9}) \cdot \sigma\sigma = \frac{4cc}{3}$: ſume hinc inde $CL = Cl, = \frac{2c}{\sqrt{3}}$ & circa has diametros deſcribe hyperbolam, quæ, ut conſtat, erit locus æquationis.

Nunc dico quod angulus, quem faciunt aſymptoti eſt 120. graduum.

Nam per V acta KV ad rectos angulos, & quæ aſymptoto occurrat in K, & juncta NK, quia NV æquat VC, erit NK æqualis KC; ſed ſed quadratum ex KV, (CL) æquat ter quadratum ex CV, igitur quadratum ex CK æquat (quater quadratum ex CV vel) quadratum ex CN: eſt igitur æquilaterum triangulum NCK, quapropter angulus NCK eſt 60. grad. Q.E.D.

Hinc facilior hyperbolæ determinatio. Triſeca rectam RN; ſuper duos ejus trientes NC deſcribe triangulum æquilaterum NKC, age TC facientem cum NC angulum TCN æqualem NCK; erunt TC, CK aſymptoti, & hyperbola tranſire debet per V.

Idem, analyſi geometrica.

TAB. S. Fig. 2. Sit triangulum ABC habens angulum ACB duplum anguli BAC. Ex B demitte perpendicularem BD, & abſcinde DE ipſi DC parem. Erit igitur juncta EB æqualis BC, & angulus BEC angulo BCE: ſed angulus BEC angulo EBA una cum BAE æquatur, ergo (angulus BEC, aut) bis angulus EAB æqualis eſt angulis EAB, ABE; atque ideo triangulum AEB eſt iſoſceles. Idem oſtenditur in fig. 3. ſumendo angulum BEF pro angulo BEC. Sed exceſſus quadrati ex BE ſuper quadratum ex ED eſt quadratum ex DB, & (ſumpta EF ipſi ED æquali) exceſſus quadrati ex AE ſuper quadratum ex EF eſt rectangulum DAF; & æqualia ſunt quadrata ex AE, EB, atque ex EF, DE, igitur rectangulum DAF æquat quadratum ex DB.

Sit CG triens datæ CA, & quia CD triens eſt ipſius CF, erit reſiduum (fig. 2.), aut ſumma (fig. 3.) AF triplex reliqui aut ſummæ GD, quare ter rectangulum ADG æquabit (rectangulum DAF vel) quadratum ex DB; eſt igitur rectangulum ex data AG una cum variabili GD in variabilem GD ad quadratum ex variabili DB ut unitas ad tres, quare punctum B eſt ad hyperbolam.

Componetur ſic. Ex data AC abſcinde trientem CG, ex axe AG; parametro tripla ipſius AG, deſcribe hyperbolam, erit angulus ACB duplex anguli CAB.

Nam ducta normali BD, eſt rectangulum ADG ad quadratum ex DB ut unitas ad tres, quo circa ter rectangulum ADG æquale eſt quadrato ex DB, hoc eſt exceſſui quadrati ex CB ſuper quadratum ex CD, aut (capta ED ipſi DC æquali) quadrati ex EB ſuper quadratum ex ED. Pone nunc EF ipſi ED parem, & quia tota AC eſt ad trientem CG ut reſiduum vel ſumma antecedentium AF ad reſiduum vel ſummam conſequentium GD: igitur AF eſt tripla ipſius GD, quare rectangulum DAF æquat ter rectangulum ADG, id eſt, exceſſum quadrati ex BE ſuper quadratum ex ED; ſed rectangulum DAF, eſt exceſſus quadrati ex AE ſuper quadratum ex EF; igitur quadratum ex AE æquat quadratum ex

PROB. XLIII.

Circulum per data duo puncta deſcribere qui rectam poſitione datam continget (c).

TAB. V. Fig. 7. Sunto A & B puncta data, & EF recta poſitione data, & requiratur circulum ABE per iſta puncta deſcribere, qui contingat rectam iſtam FE. Junge AB, & eam biſeca in D. Ad D erige normalem DF occurrentem rectæ FE in F, & circuli centrum incidet in hanc noviſſime ductam DF, puta in C. Junge ergo CB; & ad FE demitte CE normalem, eritque E punctum contactus, ac CB, CE æquales inter ſe, utpote radii circuli quæſiti. Jam cum puncta A, B, D, & F dentur, eſto DB $= a$, ac DF $= b$; & ad determinandum centrum circuli quæratur DC, quam ideo dic x. Jam in triangulo CDB propter angulum ad D rectum, eſt $\surd(DBq + DCq)$, hoc eſt $\surd(aa + xx) =$ CB. Eſt & DF — DC ſive $b - x =$ CF. Et in triangulo rectangulo CFE cum dentur anguli, datur ratio laterum CF & CE; ſit iſta d ad e; & erit CE $= \frac{e}{d}$ in CF hoc eſt $= \frac{eb - ex}{d}$. Pone jam CB & CE, (radios nempe circuli quæſiti,) æquales inter ſe, & habebitur æquatio $\surd(aa + xx) = \frac{eb - ex}{d}$. Cujus partibus quadratis & multiplicatis per dd, oritur $aadd + ddxx = eebb - 2eebx + eexx$. Sive $xx = \frac{-2eebx - aadd + eebb}{dd - ee}$. Et extracta radice, $x = \frac{-eeb + d\surd(eebb + eeaa - ddaa)}{dd - ee}$. Inventa eſt ergo longitudo DC adeo-

EB, quare triangulum AEB eſt iſoſceles, & angulus (BEC, fig. 2. vel BEF, fig. 3. vel æqualis) BCA duplex anguli CAB. *Q. E. D.*

Si angulus ACB eſſet rectus, puncta C, D, E, F coinciderent, & analyſis ac demonſtratio eadem eſſet, ſed aliquanto brevior.

TAB. S. Fig. 4. Hinc angulum datum MPQ triſariam cum Veteribus dividemus. Nam quemvis circulum ACB ſecabimus in duo ſegmenta, quorum unum ATC capax ſit anguli dati, tum tripartita chorda AC, ſuper AG dupla ipſius CG deſcribemus hyperbolam, cujus parameter triplex ſit ipſius AG, connexis punctis A, B, C, erit angulus HBC æqualis angulo dato, & triplex anguli BAC.

(c) *Apollonius* ille qui ſcripſerat *conicorum* libros octo, (ſeptem tantum nobis reliquit tempus edax), plura volumina de rebus geometricis (ut diſcimus ex Pappo in præf. ad ſeptimum collectionum Mathem. librum) confecerat, & inter alia duo *tactionum* quæ perdidimus temporum injuria.

Horum problematum in his libris contentorum unum ſolutum proſtat *Eucl. lib. IV.* 5. ſecundi caſus, videlicet ubi tres rectæ datæ conſtituunt triangulum *ibid.* prop. 4.; ſeptem autem ſolvit Newtonus hoc problemate & quatuor ſequentibus, omnia ſoluta habeo, & me editurum ſpero propediem, cum Poriſmatis Euclidis reſtitutis.

Digitized by Google

adeoque centrum C, quo circulus per puncta A & B deſcribendus eſt ut contingat rectam FE (*d*).

PROB. XLIV.

Circulum per datum punctum deſcribere qui rectas duas poſitione datas continget:

Eſto datum punctum A, & ſint EF, FG rectæ duæ poſitione datæ, & AEG circulus quæſitus eaſdem contingens, ac tranſiens per punctum Tab. V. Fig. 8.

Tab. S. Fig. 5. (*d*) Æquatio ſuperior dat $xx + \frac{2eebx}{dd-ee} = \frac{eebb - aadd}{dd-ee}$; ſed producta DB donec ipſi FE occurrat in G & dicta FG $= d$, eſt GD $= e$, quia FC ad CE, ut FG ad GD; & $dd-ee$ ($FG^2 - GD^2$) $=$ (DF^2) $= bb$, ergo $xx + 2\frac{eex}{b} = ee - \frac{aadd}{bb}$. Per A duc AL facientem angulum DAL æqualem angulo DFG, & occurrentem FC productæ in L; erit DF (b) . FG (d) :: AD (a) . AL $= \frac{ad}{b}$, quam dic $= g$; ergo $xx + 2\frac{eex}{b} = ee - gg$. Per G age GM parallelam CE, & occurrentem FL in M; hinc FD (b) . DG (e) :: DG (e) . DM $= \frac{ee}{b}$. Reſtat igitur per Num 35. Sect. IV. faciendum GD + AL ($e+g$) . x + 2DM :: x. DG—AL ($e-g$).

Determinatio.

Poſuimus quod $ee - gg$ ſit quantitas poſitiva, quod accidit cum $eebb$ major eſt quam $aadd$, aut eb major quam ad, vel cum e ad a majorem habet rationem quam d ad b; ſed (ex D acta ſuper FG ad rectos angulos DO) eſt FG (d) ad FD (b) ut GD (e) ad DO, tunc ergo DG (e) ad DB (a) majorem habebit rationem quam ad DO, igitur DG ſuperat DB.

Tab. S. Fig. 6. Sed ſi $eb = ad$; tunc DO æquaret DB, & æquatio ſuperior fieret $xx + 2\frac{eex}{b} = 0$, unde colligitur aut $x = 0$, & circuli centrum eſſet D, aut $x = -2\frac{ee}{b}$, & (ſumpta CD æquali 2MD) eſſet C centrum circuli.

Tab. S. Fig. 7. Si demum eſſet eb minor quam ad, tunc etiam OD minor eſſet quam DB, & noſtra æquatio hæc erit $-xx - 2\frac{eex}{b} = gg - ee$, & x ſumi deberet ex D verſus M, & CF exprimenda fuiſſet per $b + x$.

Duos habet valores æquatio noſtra, & videndum eſt quando unum, quando nullum habeat circulum, quod concinnius fiet extracta æquationis radice, nam illa duos valores melius explicat: ſumamus ergo $x = \frac{-eeb \pm \sqrt{eebb + aaee - aadd}}{dd-ee} =$ (ſi, ut ſolemus, determinetur d) $-\frac{ee}{b} \pm \frac{d}{b}\sqrt{(ee-aa)}$; ſtatim apparet unum futurum valorem x, cum $e = a$, vel cum punctorum unum eſt in recta poſitione data; nullum ubi e minor eſt quam a, aut recta poſitione data eſt inter duo puncta.

Igitur, propoſito problemate, ſi recta non ſeparet data puncta, ſtatim diſpiciendum eſt utrum alterum punctorum B ſit in ipſa recta, tunc junge data puncta AB, age indefinitam FD, quæ biſecet AB ad rectos angulos; ex B erige BM datæ rectæ perpendicularem & FD occurrentem in M, quo centro, radio MB deſcribe circulum qui, ut liquet, problemati ſatisfaciet. Tab. S. Fig. 8.

Sed facilius ita. Juncta AB & acta BM normali fac angulum BAM æqualem ABM, erit M centrum circuli.

Si vero neutrum ex punctis ſit in data recta junge AB quam biſeca in D: ex D age DO ad rectos angulos datæ rectæ; ſi DO, DB ſint æquales erit ipſum D centrum unius circuli, aliud invenies ut ſupra; ſi DB ſit minor aut major DO conſtrues æquationem ut ſupra, ſed valor x qui eſt poſitivus cum DB minor eſt quam DO, ſit negativus cum DB major eſt quam DO, & contra. Tab. S. Fig. 5. 6.

ctum iſtud A. Recta CF biſecetur angulus EFG & centrum circuli in ipſa reperietur. Sit iſtud C; & ad EF & FG demiſſis perpendiculis CE, CG, erunt E ac G puncta contactus. Jam in triangulis CEF, CGF, cum anguli ad E & G, ſint recti, & anguli ad F ſemiſſes ſint anguli EFG, dantur omnes anguli, adeoque ratio laterum CF & CE vel CG. Sit iſta d ad e, & ſi ad determinandum centrum circuli quæſiti C, aſſumatur CF $= x$, erit CE vel CG $= \frac{ex}{d}$. Præterea ad FC demitte normalem AH (*e*), & cum punctum A detur, dabuntur etiam rectæ AH & FH. Dicantur iſtæ a & b, & ab FH, ſive b, ablato FC, ſive x, reſtabit CH $= b - x$. Cujus quadrato, $bb - 2bx + xx$, adde quadratum ipſius AH, ſive aa & ſumma $aa + bb - 2bx + xx$, erit ACq per 47. I. Elem.; ſiquidem angulus AHC ex hypotheſi ſit rectus. Pone jam radios circuli AC & CG inter ſe æquales; hoc eſt pone æqualitatem inter eorum valores, vel inter quadrata eorum, & habebitur æquatio $aa + bb - 2bx + xx = \frac{eexx}{dd}$. Aufer utrobique xx, & mutatis omnibus ſignis erit $-aa - bb + 2bx = xx - \frac{eexx}{dd}$. Duc omnia in dd, ac divide per $dd - ee$, & evadet $\frac{-aadd - bbdd + 2bddx}{dd - ee} = xx$ (*f*). Cujus æquationis extracta radix eſt $x = \frac{bdd - d\surd(eebb + eeaa - ddaa)}{dd - ee}$. Inventa eſt itaque longitudo FC, adeoque punctum C, quod centrum eſt circuli quæſiti.

Resolvitur ut *Prob.* 43. Nam dato puncto A, datur & aliud punctum B.

Si inventus valor x, ſive FC, auferatur de b, ſive HF, reſtabit HC $= \frac{-eeb + d\surd(eebb + eeaa - ddaa)}{dd - ee}$; eadem æquatio quæ in priori problemate prodiit, ad determinandum longitudinem DC.

PROB. XLV.

Vide *Prop.* 21.

Circulum per data duo puncta deſcribere, qui alium circulum poſitione datum continget (*g*).

TAB. VI. Fig. 1. Sint A, B puncta data, EK circulus poſitione & magnitudine datus, F centrum ejus, ABE circulus quæſitus per puncta A & B tranſiens, ac tangens alterum circulum in E, & C centrum ejus. Ad AB productam

(*e*) Eam produc donec rectæ FE occurrat in L, & dic FL $= d$, erit LH $= v$.

(*f*) Sed quia $dd - ee$ ($FL^2 - LH^2$) $= FH^2 = bb$, erit $2\frac{ddx}{b} - xx = dd + \frac{aadd}{bb}$, quam facile conſtrues.

(*g*) Jam vidimus quod problema XXI. hujus idem eſt ac iſtud XLV.

Digitized by Google

ctam demitte perpendicula CD, & FG; & age CF, ſecantem circulos in puncto contactus E, ac age etiam FH parallelam DG, & occurrentem CD in H. His conſtructis dic AD vel DB $= a$, DG vel HF $= b$, GF $= c$, & EF (radium nempe circuli dati) $= d$, atque DC $= x$: & erit CH ($=$ CD$-$FG) $= x-c$, & CFq ($=$ CHq $+$ HFq) $= xx - 2cx + cc + bb$, atque CBq ($=$ CDq $+$ DBq) $= xx + aa$, adeoque CB vel CE $= \sqrt{(xx+aa)}$. Huic adde EF, & habebitur CF $= d + \sqrt{(xx+aa)}$, cujus quadratum $dd + aa + xx + 2d\sqrt{(xx+aa)}$, æquatur valori ejuſdem CFq prius invento, nempe $xx - 2cx + cc + bb$. Aufer utrobique xx, & reſtabit $dd + aa + 2d\sqrt{(xx+aa)} = cc + bb - 2cx$. Aufer inſuper $dd + aa$, & habebitur $2d\sqrt{(xx+aa)} = cc + bb - dd - aa - 2cx$. Jam, abbreviandi cauſa, pro $cc + bb - dd - aa$, (*b*) ſcribe $2gg$, & habebitur $2d\sqrt{(xx+aa)} = 2gg - 2cx$, ſive $d\sqrt{(xx+aa)} = gg - cx$. Et partibus æquationis quadratis, erit $ddxx + ddaa = g^4 - 2ggcx + ccxx$. Utrinque aufer $ddaa$ & $ccxx$, & reſtabit $ddxx - ccxx = g^4 - ddaa - 2ggcx$. Et partibus æquationis diviſis per $dd - cc$, habebitur $xx = \frac{g^4 - ddaa - 2ggcx}{dd - cc}$. Atque per extractionem radicis affectæ $x = \frac{-ggc + \sqrt{(g^4 dd - d^4 aa + ddaacc)}}{dd - cc}$. (*i*)

In-

(*b*) Junge FK, & KG $= \sqrt{(dd - cc)}$ quam dic $= h$; reſtat igitur $bb - hh - aa$: ſed LD $h + b$ & DK $= b - h$; quare LDK vel (ducta tangente DN) DN^q $= bb - hh$, cui parem ſume DO, & quia AB ſecta eſt in æqualia in D, & ei addita BO, erit AOB cum quadrato ex BD æquale quadrato ex DO, vel AOB æquale $bb - hh - aa$: dic AOB $= 2gg$.

(*i*) Quia KG $= \sqrt{(dd - cc)} = h$, erit $x = \frac{-cgg \pm d\sqrt{(g^4 - aabb)}}{hh}$: fac $g.a :: h.$ ad quartam $= q$, & $gq = ah$, aut $ggqq = aabb$; quapropter $x = \frac{-cgg \pm dg\sqrt{(gg - qq)}}{hh}$: quære $oo = gg - qq$, & fiet $x = \frac{-cgg \pm dgo}{hh}$: fac demum $hh. -cg \pm do :: g.$ ad quartam x.

Sed quia duo reperiuntur valores x, qui ad unum redigerentur ſi $\frac{gg}{h} = a$, & impoſſibiles fierent ſi $\frac{gg}{h}$ eſſet minor quam a, videndum eſt quando $\frac{gg}{h}$ major, æqualis, aut minor ſit quam a. Biſeca AO in P. Quia diximus AOB $= 2gg$, erit POB $= gg$: idcirco fac ut GK ad PO ita OB ad quartam; ſi hæc æquat DB problema erit poſſibile & unam habebit ſolutionem, eritque $x = \frac{ac}{h}$; ſi major, duas, quas conſtrues ut ſupra, & centrum unius circuli cadet ſupra AB, alterius vero infra; ſi minor, problema eſt impoſſibile.

Si recta AB tangeret in G circulum KNL, eſſet $c = d$, & æquatio $ddxx - ccxx = g^4 - aadd - 2ggcx$ fieret $x = \frac{gg}{2d} - \frac{aad}{2gg}$; ſed tum $2gg = bb - aa =$ AGB, & $gg =$ DGB: quare fac AGB. ad quadratum ex DB ut FK ad quartam, & exceſſus hujus ſupra illam erit x.

Si AB neque tangeret, neque ſecaret circulum KNL, eſſet c major quam d & æquatio fieret $xx = \frac{2ggcx + aadd - g^4}{cc - dd}$.

Si punctum B caderet in peripheria circuli KNL, & punctum A extra, eſſet $b = a + c$; quare $2gg$, in prima & tertia hypotheſi, $= 2cc + 2ac - dd$; in ſecunda, $= cc + 2ac$. Facile perſequeris reliquos caſus, nempe, quando unum ex punctis eſt in peripheria, dum alterum intra circulum exiſtit; ambo intra circulum; circulus inter utrumque medius. Ambo autem puncta nequeunt eſſe in peripheria dati circuli.

Inventa igitur x, ſive longitudine DC, biſeca AB in D, & ad D erige perpendiculum $DC = \frac{-ggc + d\sqrt{(g^4 - aadd + aacc)}}{ad - cc}$. Dein centro C per punctum A vel B deſcribe circulum ABE; nam hic continget alterum circulum EK, & tranſibit per utrumque punctum A, B. Q. E. F.

PROB. XLVI.

Circulum per datum punctum deſcribere qui datum circulum, & rectam lineam poſitione datam continget.

Tab. VI. Fig. 2. Sit circulus iſte deſcribendus BD, ejus centrum C, punctum per quod deſcribi debet B, recta quam continget AD, punctum contactus D, circulus quem continget GEM, ejus centrum F, & punctum contactus E. Junge CB, CD, CF; & CD erit perpendicularis ad AD, atque CF ſecabit circulos in puncto contactus E. Produc CD ad Q ut ſit DQ = EF & per Q age QN parallelam AD. Denique a B & F ad AD & QN demitte perpendicula BA, FN, & a C ad AB & FN perpendicula CK, CL. Et cum ſit BC = CD vel AK, erit BK (= AB − AK) = AB − BC, adeoque $BKq = ABq - 2AB \cdot BC + BCq$. Aufer hoc de BCq, & reſtabit $2AB \cdot BC - ABq$, pro quadrato de CK. Eſt itaque $AB(2BC - AB) = CKq$; & eodem argumento erit $FN(2CF - FN) = CLq$, atque adeo $\frac{CKq}{AB} + AB = 2BC$, & $\frac{CLq}{FN} + FN = 2CF$. Quamobrem, ſi pro AB, CK, FN, KL, & CL, ſcribas a, y, b, c, & $c - y$, erit $\frac{yy}{2a} + \frac{1}{2}a = BC$, & $\frac{cc - 2cy + yy}{2b} + \frac{1}{2}b = FC$. De FC aufer BC, & reſtabit $BF = \frac{cc - 2cy + yy}{2b} + \frac{1}{2}b - \frac{yy}{2a} - \frac{1}{2}a$. Jam ſi puncta ubi FN producta ſecat rectam AD, & circulum GEM notentur literis H, G, & M & in HG producta capiatur HR = AB, cum ſit HN (= DQ = EF) = GF, addendo FH utrinque, erit FN = GH, adeoque AB − FN (= HR − GH) = GR, & AB − FN + 2EF, hoc eſt $a - b + 2EF = RM$, & $\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b + EF = \frac{1}{2}RM$. Quare, cum ſupra fuerit $EF = \frac{cc - 2cy + yy}{2b} + \frac{1}{2}b - \frac{yy}{2a} - \frac{1}{2}a$, ſi hoc ſcribatur pro EF habebitur $\frac{1}{2}RM = \frac{cc - 2cy + yy}{2b} - \frac{yy}{2a}$. Dic ergo RM d, & erit $d = \frac{cc - 2cy + yy}{b} - \frac{yy}{a}$. Duc omnes terminos in a & b, & orietur $abd = acc - 2acy + ayy - byy$. Aufer utrinque

que $acc - 2acy$, & reſtabit $abd - acc + 2acy = ayy - byy$. Divide per $a - b$, & orietur $\frac{abd - acc + 2acy}{a - b} = yy$. Et extracta radice $y = \frac{ac}{a-b} \pm \surd\left(\frac{aabd - abbd + abcc}{aa - 2ab + bb}\right)$. Quæ concluſiones ſic abbreviari poſſunt. Pone $c . b :: d . e$, dein $a - b . a :: c . f$; & erit $fe - fc + 2fy = yy$, ſive $y = f \pm \surd(ff + fe - fc)$. Invento y, ſive KC vel AD, cape $AD = f \pm \surd(ff + fe - fc)$, ad D erige perpendiculum DC ($=$ BC) $= \frac{KCq}{2AB} + \frac{1}{2}AB$, & centro C, intervallo CB vel CD deſcribe circulum BDE, nam hic tranſiens per datum punctum B, tanget rectam AD in D, & circulum GEM in E. Q. E. F.

Hinc circulus etiam deſcribi poteſt qui duos datos circulos, & rectam poſitione datam continget. Sint enim circuli dati RT, SV, eorum centra B, F, & recta poſitione data PQ. Centro F, radio FS $-$ BR deſcribe circulum EM. A puncto B, ad rectam PQ demitte perpendiculum BP, & producto eo ad A ut ſit PA $=$ BR per A age AH parallelam PQ, & circulus deſcribatur qui tranſeat per punctum B, tangatque rectam AH, & circulum EM. Sit ejus centrum C; junge BC ſecantem circulum RT in R, & eodem centro C, radio vero CR deſcriptus circulus RS tanget circulos RT, SV, & rectam PQ, ut ex conſtructione manifeſtum eſt. Tab. VI. Fig. 3.

PROB. XLVII.

Circulum deſcribere qui per datum punctum tranſibit, & alios duos poſitione, & magnitudine datos circulos continget.

Eſto punctum datum A, ſintque circuli poſitione, & magnitudine dati TIV, HRS, centra eorum C & B, circulus deſcribendus AIH centrum ejus D, & puncta contactus I & H. Junge AB, AC, AD, DB, ſecetque AB producta circulum RHS in punctis R & S, & AC, producta circulum TIV in T & V. Et a punctis D & C demiſſis perpendiculis DE ad AB, & DF ad AC occurrente AB in G, atque CK ad AB; in triangulo ADB erit $ADq - DBq + ABq = 2AE . AB$, per 13. II. Elem. Sed $DB = AD + BR$, adeoque $DBq = ADq + 2AD . BR + BRq$. Aufer hoc de $ADq + ABq$, & reſtabit $ABq - 2AD . BR - BRq$, pro $2AE . AB$. Eſt & $ABq - BRq = (AB - BR)(AB + BR) = AR . AS$. Quare $AR . AS - 2AD . BR = 2AE . AB$. Et $\frac{AR . AS - AB . AE}{BR} = 2AD$. Tab. VI. Fig. 4.

Et ſimili ratiocinio in triangulo ADC emerget iterum $2AD = \frac{TAV - 2CAF}{CT}$. Quare $\frac{RAS - 2BAE}{BR} = \frac{TAV - 2CAF}{CT}$. Et $\frac{TAV}{CT} -$

$\frac{RAS}{BR} + \frac{2BAE}{BR} = \frac{2CAF}{CT}$. Et $(\frac{TAV}{CT} - \frac{RAS}{BR} + \frac{2BAE}{BR})\frac{CT}{2AC} = AF$. Unde cum ſit $AK . AC :: AF . AG$, erit $AG = (\frac{TAV}{CT} - \frac{RAS}{BR} + \frac{2BAE}{BR})\frac{CT}{2AK}$. Aufer hoc de AE ſive $\frac{2KAE}{CT}$ in $\frac{CT}{2AK}$, & reſtabit $GE = (\frac{RAS}{BR} - \frac{TAV}{CT} - \frac{2BAE}{BR} + \frac{2KAE}{CT})\frac{CT}{2AK}$. Unde cum ſit $KC . AK ::$ $GE . DE$; erit $DE = (\frac{RAS}{BR} - \frac{TAV}{CT} - \frac{2BAE}{BR} + \frac{2KAE}{CT})\frac{CT}{2KC}$. In AB cape AP quæ ſit ad AB ut CT ad BR, & erit $\frac{2PAE}{CT} = \frac{2BAE}{BR}$, adeoque $\frac{2PK . AE}{CT} = \frac{2BAE}{BR} - \frac{2KAE}{CT}$, adeoque $DE = (\frac{RAS}{BR} \cdot \frac{TAV}{CT} \cdot \frac{2PK . AE}{CT})$ $\frac{CT}{2KC}$. Ad AB erige ergo perpendiculum $AQ = (\frac{RAS}{BR} - \frac{TAV}{CT})\frac{CT}{2CK}$, & in eo cape $QO = \frac{PK . AE}{KC}$, & erit $AO = DE$.

Junge DO, DQ, CP, & triangula DOQ, CKP erunt ſimilia, quippe quorum anguli ad O & K ſunt recti, & latera (KC . PK :: AE, vel DO . QO) proportionalia. Anguli ergo OQD, KPC æquales ſunt, & proinde QD perpendicularis eſt ad CP. Quamobrem ſi agatur AN parallela CP, & occurrens QD in N, angulus ANQ erit rectus, & triangula AQN, PCK ſimilia; adeoque PC . KC :: AQ. AN. Unde cum AQ ſit $(\frac{RAS}{BR} - \frac{TAV}{CT})\frac{CT}{2KC}$, AN erit $(\frac{RAS}{BR} - \frac{TAV}{CT})\frac{CT}{2PC}$. Produc AN ad M ut ſit $NM = AN$, & erit $AD = DM$, adeoque circulus quæſitus tranſibit per punctum M. Cum ergo punctum M datum ſit, ex his, ſine ulteriore analyſi, talis emergit problematis reſolutio.

In AB cape AP, quæ ſit ad AB ut CT ad BR; junge CP eique parallelam age AM, quæ ſit ad $\frac{RAS}{BR} - \frac{TAV}{CT}$, ut CT ad PC: & ope *Prob.* 45. per puncta A & M deſcribe circulum AIHM qui tangat alterutrum circulum TIV, RHS, & idem circulus tanget utrumque. Q. E. F.

Et hinc circulus etiam deſcribi poteſt qui tres circulos poſitione & magnitudine datos continget. Sunto trium datorum circulorum radii A, B, C, & centra D, E, F, radiis $B \mp A$, $C \mp A$ deſcribantur duo circuli, & tertius circulus qui hoſce tangat, tranſeatque per punctum D. Sit hujus radius G, & centrum H, & eodem centro H radio $G \mp A$ deſcriptus circulus continget tres primos circulos, ut fieri oportuit.

PROB.

PROB. XLVIII.

Si ad extremitates fili DAE circa paxillum A labentis appendantur pondera duo D & E, quorum pondus E labitur per lineam obliquam BG: invenire locum ponderis E, ubi pondera hæc in æquilibrio conſiſtunt. TAB. VI. Fig. 5.

Puta factum, & ipſi AD age parallelam EF quæ ſit ad AE, ut pondus E ad pondus D. Et a punctis A & F ad lineam BG demitte perpendicula AB, FG. Jam cum pondera, ex hypotheſi, ſint ut lineæ AE, EF, exponantur pondera per lineas iſtas, pondus D per lineam AE, & pondus E per lineam EF. Ergo corpus E proprii ponderis vi directa EF tendit verſus F, & vi obliqua EG tendit verſus G. Et idem corpus E, ponderis D vi directa AE, trahitur verſus A, vi obliqua BE trahitur verſus B. Cum itaque pondera ſe mutuo ſuſtineant in æquilibrio, vis qua pondus E trahitur verſus B æqualis eſſe debet vi contrariæ qua tendit verſus G, hoc eſt BE æqualis eſſe debet ipſi EG. Jam vero datur ratio AE ad EF, ex hypotheſi, & propter datum angulum FEG datur etiam ratio FE ad EG cui BE æqualis eſt. Ergo datur ratio AE ad BE. Datur etiam AB longitudine. Et inde triangulum ABE, & punctum E facile dabitur. Nempe dic $AB = a$, $BE = x$, & erit $AE = \sqrt{(aa + xx)}$: ſit inſuper AE ad BE in data ratione d ad e, & erit $e\sqrt{(aa+xx)} = dx$. Et partibus æquationis quadratis & reductis, $eeaa = ddxx - eexx$, ſive $\frac{ea}{\sqrt{(dd-ee)}} = x$. Inventa eſt igitur longitudo BE quæ determinat locum ponderis E. Q. E. F.

Quod ſi pondus utrumque per lineam obliquam deſcendat, computum ſic inſtitui poteſt. Sint CD, BE obliquæ lineæ poſitione datæ per quas pondera iſta D & E deſcendunt. A paxillo A ad has lineas demitte perpendicula AC, AB, iiſque productis occurrant in punctis G & H lineæ EG, DH, a ponderibus perpendiculariter ad horizontem erectæ, & vis qua pondus E conatur deſcendere juxta lineam perpendicularem, hoc eſt tota gravitas ipſius E, erit ad vim qua pondus idem conatur deſcendere juxta lineam obliquam BE, ut GE ad BE; atque vis qua conatur juxta lineam iſtam obliquam BE deſcendere erit ad vim qua conatur juxta lineam AE deſcendere, hoc eſt ad vim qua filum AE diſtenditur, ut BE ad AE. Adeoque gravitas ipſius E, erit ad tenſionem fili AE ut GE ad AE. Et eadem ratione gravitas ipſius D erit ad tenſionem fili AD ut HD ad AD. Sit itaque fili totius DA + AE longitudo c, ſitque pars ejus $AE = x$, & erit altera pars $AD = c - x$. Et quoniam eſt $AEq - ABq = BEq$, & $ADq - ACq = CDq$, ſit inſuper $AB = a$, & $AC = b$, & erit $BE = \sqrt{(xx-aa)}$ & $CD = \sqrt{(xx - 2cx + cc - bb)}$. Adhæc cum triangula BEG, CDH, dentur ſpecie, ſit $BE . EG :: f . E$, & $CD . DH :: f . g$, & erit $EG = \frac{E}{f}\sqrt{(xx}$ TAB. VI. Fig. 6.

$\frac{E}{f}\sqrt{(xx-aa)}$, & DH $= \frac{g}{f}\sqrt{(xx-2cx+cc-bb)}$. Quamobrem cum ſit GE ad AE ut pondus D ad tenſionem AE; & HD ad AD ut pondus D ad tenſionem AD, & tenſiones iſtæ æquentur inter ſe, erit $\frac{Ex}{\frac{E}{f}\sqrt{(xx-aa)}} =$ tenſioni AE $=$ tenſioni AD $= \frac{Dc-Dx}{\frac{g}{f}\sqrt{(xx-2cx+cc-bb)}}$. Cujus æquationis reductione provenit $\frac{gx\sqrt{(xx-2cx+cc-bb)}}{\sqrt{(xx-aa)}} = (Dc-Dx)$ ſive

$$\begin{matrix}gg\\-DD\end{matrix}x^4 \begin{matrix}-2ggc\\+2DDc\end{matrix}x^3 \begin{matrix}+ggcc\\-ggbb\\-DDcc\\+DDaa\end{matrix}xx - 2DDaacx + DDccaa = 0.$$

Si caſum deſideras quo hoc problema per regulam & circinum conſtrui queat, pone pondus D ad pondus E ut ratio $\frac{BE}{EG}$ ad rationem $\frac{CD}{DH}$, & evadet $g = D$, (k) adeoque vice præcedentis æquationis habebitur hæc $-\frac{aa}{bb}xx - 2aacx + aacc = 0$; ſive $x = \frac{ac}{a+b}$ (l).

PROB.

(k) Nam $\frac{BE}{EG} = \frac{f}{E}$, & $\frac{CD}{DH} = \frac{f}{g}$; cum ergo nunc ſit $\frac{BE}{EG}(\frac{f}{E}) . \frac{CD}{DH}(\frac{f}{g}) :: D . E$, erit, invicem ductis extremis & mediis, $\frac{Df}{g} = f$, & $D = g$.

(l) Aut enim b æquat a, aut minor eſt, aut major. Si primum, $aaxx - bbxx = 0$, & æquatio reſtat $x = \frac{c}{2} = \frac{2ac}{2a} = \frac{ac}{a+b}$. Hoc autem accidit quando BA, AC ſunt æquales.

Si ſecundum, æquatio fit $xx = \frac{2aacx - aacc}{aa-bb}$, & $= x\ \frac{aac \pm \sqrt{aabbcc}}{aa-bb} = \frac{aac \pm abc}{aa-bb} = \frac{ac(a \pm b)}{(a+b)(a-b)} = \frac{ac}{a \pm b}$; & tunc duo videntur eſſe puncta æquilibrium dantia. Sed ſi ponamus $x = \frac{ac}{a+b}$, erit tenſio fili AE $\left(\frac{fx}{\sqrt{(xx-aa)}}\right) = \frac{acf}{(a+b)\sqrt{(\frac{aacc}{aa+2ab+bb} - aa)}} = \frac{cf}{\sqrt{(cc-aa-2ab-bb)}}$. Atqui tenſio fili AD $\left(\frac{fc-fx}{\sqrt{(xx-2cx+cc-bb)}}\right) = \frac{bcf}{(a+b)\sqrt{(\frac{aacc}{(a+b)^2} - \frac{2acc}{a+b} + cc - bb)}} = \frac{cf}{\sqrt{cc-aa-2ab-bb}}$; quæ tenſiones ſunt æquales, & pondera in æquilibrio.

Si vero ponamus $x = \frac{ac}{a-b}$, tenſio fili AE fiet $= \frac{cf}{\sqrt{(cc-aa+2ab-bb)}}$; & tenſio fili AD $= \frac{-cf}{\sqrt{(cc-aa+2ab-bb)}}$ quæ quantitas eſt quidem alteri æqualis, ſed negativa, & debet eſſe poſitiva, quia tenſiones ambæ tendunt ad eaſdem plagas; fieret tantem poſitiva ſi pro tenſione ipſius AD haberetur non

ſe.

PROB. XLIX.

Si ad filum DACBF circa paxillos duos A, B, labile appendantur tria pondera D, E, F; D & F ad extremitates fili, & E ad medium ejus punctum C, inter paxillos poſitum: ex datis ponderibus & ſitu paxillorum invenire ſitum puncti C, ad quod medium pondus appenditur ubi pondera conſiſtunt in æquilibrio.

Cum tenſio fili AC æquetur tenſioni fili AD, & tenſio fili BC tenſioni fili BF, (*m*) tenſiones filorum AC, BC, EC erunt ut pondera D, F, E. In eadem ponderum ratione cape partes filorum CG, CH, CI. Compleatur triangulum GHI. Produc IC donec ea occurrat GH in K, & erit $GK = KH$, & $CK = \frac{1}{2} CI$, adeoque C centrum gravitatis trianguli GHI. (*n*) Nam per C agatur ipſi CE perpendiculare PQ, & huic a punctis G, & H, perpendicularia GP, HQ. Et ſi vis qua filum AC vi ponderis D trahit punctum C verſus A, exponatur per lineam GC, vis qua filum iſtud trahet idem punctum verſus P exponetur per lineam CP, & vis qua trahit illud verſus K exponetur per lineam GP. Et ſimiliter vires quibus filum BC vi ponderis F, trahit idem punctum C verſus B, Q & K, exponentur per lineas CH, CQ, HQ; & vis qua filum CE vi ponderis E, trahit punctum illud C verſus E, exponetur per lineam CI. Jam cum punctum C viribus æquipollentibus ſuſtineatur in æqui-

TAB. VI. Fig. 7.

$\frac{fc - fx}{\sqrt{(xx - 2cx + cc - bb)}}$ ſed $\frac{fx - fc}{\sqrt{xx - 2cx + cc - bb}}$, quod indicat hunc ignotæ valorem ſatisfacere problemati, ſi pro ſumma filorum DA, AE data fuiſſet eorum differentia.

Denique ſi b major eſt quam a, æquatio evadit $xx = -\frac{2aacx + aacc}{bb - aa}$; aut $x = \frac{-aac \pm \sqrt{abc}}{bb - aa}$; quarum altera $\left(\frac{-aac - \sqrt{abc}}{bb - aa}\right)$ eſt falſa, quam non quærimus, & quæ ſatisfaceret problemati ſi fuiſſet quærendum punctum æquilibrii pondero labente per CD, & illud retrahente potentia quadam æquale ponderi E juxta directionem IF ipſi BE parallelam filo circa A recurvato in F ita ut FA AE ſint in directum. Altera vero $\left(\frac{-aac + \sqrt{abc}}{bb - aa}\right)$ dat $\frac{ac}{a + b}$.

(*m*) Quoniam pondera D, E, F, ſunt in æquilibrio, vis qua pondera D & F deorſum trahuntur, æquat vim qua pondus E deprimitur. Pondus autem E ſimul tendit fila AC, CB; ac tenſioni filii AC contraria eſt tenſio fili AD, tenſioni vero fili CB contraria eſt tenſio fili BF; ergo hæ tenſiones contrariæ debent eſſe æquales; alioquin enim tenſió major minorem vinceret, & pondera non eſſent in æquilibrio.

Tenſio fili AD eſt effectus ponderis D perpendiculariter trahentis, & idcirco totam ſuam vim exſerentis; ergo eſt ei proportionalis. Sed tenſio fili AC æquat tenſionem fili AD, igitur tenſio fili AC eſt ut pondus D. Idem dicendum de tenſione fili BC. Tenſionem CE eſſe ut pondus E ſtatim patet.

(*n*) Quod GH biſecetur in K, & quod KC ſit dimidiata CI ab Auctore dilucide oſtenditur, & notum eſt eſſe C centrum gravitatis trianguli GIK.

æquilibrio, ſumma virium quibus fila AC & BC, ſimul trahunt punctum C verſus K, æqualis erit vi contrariæ qua filum EC, trahit punctum illud verſus E, hoc eſt ſumma $GP + HQ$, æqualis erit ipſi CI; & vis qua filum AC trahit punctum C verſus P, æqualis erit vi contrariæ qua filum BC trahit idem punctum C verſus Q, hoc eſt linea PC æqualis lineæ CQ. Quare cum PG, CK, & QH parallelæ ſint, erit etiam $GK = KH$, & $CK \left(= \frac{GP + HQ}{2}\right) = \frac{1}{2}$ CI. Quod erat oſtendendum. Reſtat itaque triangulum GCH determinandum, cujus latera GC & HC, dantur, una cum linea CK, quæ a vertice C ad medium baſis ducitur. Demittatur itaque a vertice C ad baſem GH perpendiculum CL, & erit $\frac{GCq - CHq}{2GH} = KL = \frac{GCq - KCq - GKq}{2GK}$. Pro 2GK ſcribe GH, & rejecto communi diviſore GH, & ordinatis terminis, erit $GCq - 2KCq + CHq = 2GKq$, ſive $\sqrt{\frac{1}{2} GCq - KCq + \frac{1}{2} CHq} = GK$. Invento GK vel KH, dantur ſimul anguli GCK, KCH, ſive DAC, FBC. Quare a punctis A & B in datis iſtis angulis DAC, FBC duc lineas AC, BC concurrentes in puncto C, & iſtud C erit punctum quod quæritur.

Ceterum quæſtiones omnes quæ ſint ejuſdem generis non ſemper opus eſt per algebram ſigillatim ſolvere, ſed ex ſolutione unius plerumque conſectatur ſolutio alterius. Ut ſi jam proponeretur hæc quæſtio.

TAB. VI. Fig. 8. *Filo ACDB in datas partes AC, CD, DB diviſo & extremitatibus ejus ad paxillos duos A, B poſitione datos ligatis, ſi ad puncta diviſionum C ac D appendantur pondera duo E & F; ex dato pondere F, & ſitu punctorum C ac D, cognoſcere pondus E.*

Ex præcedentis problematis ſolutione ſatis facile colligetur hæcce ſolutio hujus. Produc lineas AC, BD, donec occurrant lineis DF, CE in G & H; & erit pondus E ad pondus F ut DG ad CH.

Et hinc obiter patet ratio componendi ſtateram ex ſolis filis, qua pondus corporis cujuſvis E, ex unico dato pondere F cognoſci poteſt.

PROB. L.

Lapide in puteum decidente, ex ſono lapidis fundum percutientis, altitudinem putei cognoſcere.

Sit altitudo putei x, & ſi lapis motu uniformiter accelerato deſcendat per ſpatium quodlibet datum a in tempore dato b, & ſonus motu unifor-

Digitized by Google

formi tranſeat per idem ſpatium datum a in tempore dato d, lapis deſcendet per ſpatium x, in tempore $b\sqrt{\frac{x}{a}}$, ſonus autem qui ſit a lapide in fundum putei impingente aſcendet per idem ſpatium x, in tempore $\frac{dx}{a}$. Ut enim ſunt ſpatia gravibus decidentibus deſcripta, ita ſunt quadrata temporum deſcenſus; vel ut radices ſpatiorum, hoc eſt ut $\sqrt{x}$ & $\sqrt{a}$, ita ſunt ipſa tempora. Et ut ſpatia x & a, per quæ ſonus tranſit, ita ſunt tempora tranſitus. Ex horum temporum $b\sqrt{\frac{x}{a}}$ & $\frac{dx}{a}$ ſumma conflatur tempus a lapide demiſſo ad ſonus reditum. Hoc tempus ex obſervatione cognoſci poteſt. Sit ipſum t, & erit $b\sqrt{\frac{x}{a}} + \frac{dx}{a} = t$. Ac $b\sqrt{\frac{x}{a}} = t - \frac{dx}{a}$. Et partibus quadratis $\frac{bbx}{a} = tt - \frac{2tdx}{a} + \frac{ddxx}{aa}$. Et per reductionem

$$xx = \frac{2adt + abb}{dd}x - \frac{aatt}{dd}.$$ Et extracta radice $x = \frac{adt + \frac{1}{2}abb}{dd} - \frac{ab}{2dd}\sqrt{(bb + 4dt)}$ (o).

PROB. LI.

Dato globo A, poſitione parietis DE, & centri globi B a pariete diſtantia BD; invenire molem globi B ea lege ut in ſpatis liberis, & vi gravitatis deſtitutis, ſi globus A, cujus centrum in linea BD, quæ ad parietem perpendicularis eſt, ultra B producta conſiſtit, uniformi tum motu verſus D feratur donec is impingat in alterum quieſcentem globum B; globus iſte B poſtquam reflectitur a pariete, denuo occurrat globo A in dato puncto C. TAB. VII. Fig. 1.

Sit globi A celeritas ante reflexionem a & erit per PROB. XII. Quæſt. Arit. celeritas globi A poſt reflexionem $= \frac{aA - aB}{A + B}$, & celeritas globi B poſt

(o) Hic ſumitur minor æquationis radix, quia t (tempus quod labitur, dum lapis deſcendit & ſonus aſcendit) debet eſſe majus quam $\frac{dx}{a}$ (tempus, per quod ſonus aſcendit); ergo $\frac{at}{d}$ majus quam x, quod ſic optime efficitur. Eſt enim $\sqrt{(bb + 4dt)}$ major quam b, pone eam $= b + c$; ergo $x = \frac{adt + \frac{1}{2}abb}{dd} - \frac{\frac{1}{2}abb - \frac{1}{2}abc}{dd} = \frac{adt - \frac{1}{2}abc}{dd}$: eſt autem $\frac{adt - \frac{1}{2}abc}{dd}$ minor quam $\frac{adt}{dd}$; ergo x minor quam $\frac{adt}{dd} = \frac{at}{d}$.

poſt reflexionem $= \frac{2aA}{A + B}$. Ergo celeritas globi A ad celeritatem globi B eſt ut $A - B$ ad $2A$. In GD cape $gD = GH$ diametro nempe globi B, & celeritates iſtæ erunt ut GC ad $Gg + gC$. Nam ubi Globus A impegit in globum B, punctum G quod in ſuperficie globi B exiſtens movetur in linea AD, perget per ſpatium Gg antequam globus ille B impinget in parietem, & per ſpatium gC poſtquam a pariete reflectitur; hoc eſt per totum ſpatium $Gg + gC$, in eodem tempore quo globi A punctum F perget per ſpatium GC, eo ut globus uterque rurſus conveniant & in ſe mutuo impingant in puncto dato C. Quamobrem cum dentur intervalla BC & CD, dic $BC = m$, $BD + CD = n$, & $BG = x$, & erit $GC = m + x$, & $Gg + gC = GD + DC - 2gD = GB + BD + DC - 2GH = x + n - 4x$, ſeu $= n - 3x$. Supra erat $A - B$ ad $2A$ ut celeritas globi B ut GC ad $Gg + gC$, adeoque $A - B$ ad $2A$ ut GC ad $Gg + gC$, ergo cum ſit $GC = m + x$, & $Gg + gC = n - 3x$, erit $A - B$ ad $2A$ ſicut $m + x$ ad $n - 3x$. Porro globus A eſt ad globum B ut cubus radii ejus AF ad cubum radii alterius GB, hoc eſt ſi ponas radium AF eſſe s, ut s^3 ad x^3. Ergo $s^3 - x^3 . 2s^3$ $(:: A - B . 2A) ::$ $m + x . n - 3x$. Et ductis extremis & mediis in ſe habebitur æquatio $s^3n - 3s^3x - nx^3 + 3x^4 = 2ms^3 + 2xs^3$. Et per reductionem

$$3x^4 - nx^3 - 5s^3x \begin{matrix} + s^3n \\ + 2s^3m \end{matrix} = 0.$$

Si datus eſſet globus B & quæreretur globus A ea lege ut globi duo poſt reflexionem convenirent in C, quæſtio foret facilior. Nempe in inventa æquatione noviſſima ſupponendum eſſet x dari & s quæri. Qua ratione per debitam reductionem illius æquationis, tranſlatis terminis $-5s^3x + s^3n - 2s^3m$ ad æquationis partem contrariam ac diviſa utraque parte per $5x - n + m$, emergeret $\frac{3n^4 - nx^3}{5x - n + 2m} = s^3$. Ubi per ſolam extractionem radicis cubicæ obtinebitur s.

Quod ſi dato globo utroque quæreretur punctum C in quo poſt reflexionem ambo in ſe mutuo impingerent: cum ſupra fuerit $A - B$ ad $2A$ ut GC ad $Gg + gC$ ergo invertendo & componendo $3A - B$ erit ad $A - B$ ut $2Gg$ ad diſtantiam quæſitam GC.

PROB.

PROB. LII.

Si globi duo A & B tenui jungantur filo PQ, & pendente globo B a globo A, ſi demittatur globus A, ita ut globus uterque ſimul ſola gravitatis vi in eadem linea perpendiculari PQ cadere incipiat; dein globus inferior B, poſtquam a fundo ſeu plano horizontali FG ſurſum reflectitur, ſuperiori decidenti globo A occurrat in puncto quodam D: ex data fili longitudine PQ, & puncti illius D a fundo diſtantia DF, invenire altitudinem PF, a qua globus ſuperior A ad hunc effectum demitti debet. TAB. VII. Fig. 2.

Sit fili PQ longitudo a. In perpendiculo PQRF ab F ſurſum cape FE æqualem globi inferioris diametro QR, ita ut cum globi illius punctum infimum R incidit in fundum ad F, punctum ejus ſupremum Q occupet locum E; ſitque ED diſtantia per quam globus ille, poſtquam a fundo reflectitur, aſcendendo tranſit antequam globo ſuperiori decidenti occurrat in puncto D. Igitur, ob datam puncti D a fundo diſtantiam DF globique inferioris diametrum EF, dabitur eorum differentia DE. Sit ea $= b$. Sitque altitudo quam globus ille inferior, antequam impingit in fundum, cadendo deſcribit, RF vel QE $= x$, ſiquidem ea ignoretur. Et invento x ſi eidem addantur EF & PQ habebitur altitudo PF, a qua globus ſuperior ad effectum deſideratum demitti debet.

Cum igitur ſit PQ $= a$, & QE $= x$, erit PE $= a + x$. Aufer DE ſeu b, & reſtabit PD $= a + x - b$. Eſt autem tempus deſcenſus globi A ut radix ſpatii cadendo deſcripti ſeu $\sqrt{(a + x - b)}$, & tempus deſcenſus globi alterius B ut radix ſpatii cadendo deſcripti, ſeu $\sqrt{x}$, & tempus aſcenſus ejuſdem ut differentia radicis illius & radicis ſpatii quod cadendo tantum a Q ad D deſcriberetur (*p*). Nam hæc differentia eſt ut tempus deſcenſus a D ad E, quod æquale eſt tempori aſcenſus ab E ad D. Eſt autem differentia illa $\sqrt{x} - \sqrt{(x - b)}$. Unde tempus deſcenſus & aſcenſus conjunctim erit ut $2\sqrt{x} - \sqrt{(x - b)}$. Quamobrem cum hoc tempus æquetur tempori deſcenſus globi ſuperioris erit $\sqrt{(a + x - b)} = 2\sqrt{x} - \sqrt{(x - b)}$ (*q*). Cujus æquationis partibus quadratis habebitur

$a + x$

(*p*) Hæc explicantur infra ſub ſigno *q*.

(*q*) Cum vis gravitatis eadem ſit in globo aſcendente aut deſcendente, cumque ea deorſum tendat, illa uniformiter retardabit globum aſcendentem, ut uniformiter cadentem acceleraverat. Ita ut ſi globus B in QR quieſcens vi gravitatis cadere concipiatur in EF, & inde verſus RQ repelli eadem prorſus velocitate quam acquiſiverat, eodem tempore aſcendet in primum locum RQ ac ex eo deſcenderat in EF, & ipſo momento, quo venerit in RQ, nullum prorſus motum habebit; ſed tempus deſcenſus puncti Q ex Q in E eſt ut $\sqrt{x}$, ergo tempus aſcenſus ejuſdem erit ut $\sqrt{x}$; quare hæc duo tempora ſimul ſumpta ut $2\sqrt{x}$: ſed cum punctum Q debeat ſolum veniſſe in D, quando globus A item eſt in D, ergo ex tempore aſcenſus globi B demendum eſt tempus aſcenſus ex D in Q, quod eſt ut $\sqrt{(x - b)}$;

$a + x - b = 5x - b - 4\sqrt{(xx - bx)}$, ſeu $a = 4x - 4\sqrt{(xx - bx)}$, & ordinata æquatione $4x - a = 4\sqrt{(xx - bx)}$. Cujus partes iterum quadrando oritur $16xx - 8ax + aa = 16xx - 16bx$, ſeu $aa = 8ax - 16bx$. Et diviſis omnibus per $8a - 16b$, fiet $\frac{aa}{8a - 16b} = x$. Fac igitur ut $8a - 16b$ ad a ita a ad x, habebitur x ſeu QE. Q. E. I.

Quod ſi ex dato QE quæreretur fili longitudo PQ ſeu a; eadem æquatio $aa = 8ax - 16bx$ extrahendo affectam radicem quadraticam daret $a = 4x - \sqrt{(16xx - 16bx)}$ (*r*). Id eſt ſi ſumas QY mediam proportionalem inter QD & QE, erit $PQ = 4EY$. Nam media illa proportionalis erit $\sqrt{(x.(x - b))}$, ſeu $\sqrt{(xx - bx)}$ quod ſubductum de x ſeu QE, relinquit EY, cujus quadruplum eſt $4x - 4\sqrt{(xx - bx)}$.

Sin vero ex datis tum QE, ſeu x, tum fili longitudine PQ, ſeu a, quæreretur punctum D in quo globus ſuperior in inferiorem incidit; puncti illius a dato puncto E diſtantia DE ſeu b, e præcedente æquatione $aa = 8ax - 16bx$, eruetur transferendo aa & $16bx$ ad æquationis partes contrarias cum ſignis mutatis, & omnia dividendo per $16x$. Orietur enim $\frac{8ax - aa}{16x} = b$. Fac igitur ut $16x$, ad $8x - a$ ut a ad b, & habebitur b ſeu DE.

Hactenus ſuppoſui globos tenui filo connexos ſimul demitti. Quod ſi nullo connexi filo diverſis temporibus demittantur, ita ut globus ſuperior A verbi gratia prius demiſſus, deſcenderit per ſpatium PT antequam globus alter incipiat cadere, & ex datis diſtantiis PT, PQ ac DE quæratur altitudo PF a qua globus ſuperior demitti debet ea lege ut inferiorem incidat ad punctum D; ſit $PQ = a$, $DE = b$, $PT = c$, & $QE = x$, & erit $PD = a + x - b$, ut ſupra. Et tempora quibus globus ſuperior cadendo deſcribat ſpatia PT ac TD, & globus inferior prius cadendo dein reaſcendendo deſcribat ſummam ſpatiorum QE + ED, erunt ut $\sqrt{PT}$, $\sqrt{PD} - \sqrt{PT}$, & $2\sqrt{QE} - \sqrt{QD}$ hoc eſt ut $\sqrt{c}$, $\sqrt{a + x - b)} - \sqrt{c}$, & $2\sqrt{(x - b.)}$ At ultima duo tempora, propterea quod ſpatia TD, & QE + ED ſimul deſcribuntur, æqualia ſunt. Ergo $\sqrt{(a + x - b)} - \sqrt{c}$

eſt igitur tempus deſcenſus ex Q in E, & aſcenſus ex E in D, ut $2\sqrt{x} - \sqrt{(x - b)}$; ſed globus B debet deſcendere & aſcendere quo tempore globus A venit ex P in D, ergo $\sqrt{(x + a - b)} = 2\sqrt{x} - \sqrt{(x - b)}$.

(*r*) Hic quoque radix habetur ambigua, nam $a = 4x \pm \sqrt{(16xx - 16bx)}$: quæ ambo ſunt poſitivæ: cur ergo minor eligenda? Reſponſum naſcitur ex re ipſa. Siquidem eſſe debet $\sqrt{(a + x - b)} = 2\sqrt{x} - \sqrt{(x - b)} =$ (ſubſtitit.) $\sqrt{(5x - b \pm \sqrt{(16xx - 16bx)})}$: extrahe hanc radicem, & fac $A = 5x - b$ (Sect. I. Cap. VIII. Art. VI.), $B = \sqrt{(16xx - 16bx)}$; erit $\frac{A + \sqrt{(A^2 - B^2)}}{2} = 4x$, quadratum majoris partis radicis, & $\frac{A - \sqrt{(A^2 - B^2)}}{2} = x - b$ quadratum minoris partis; ergo radices ſunt $2\sqrt{x}$ & $\sqrt{(x - b)}$, hæ ſignis, quæ prius habebant, jungendæ ſunt; ergo ſumi debet $a = 4x - \sqrt{(16xx - 16bx)}$, alioquin haberetur $2\sqrt{x} - \sqrt{(x - b)} = 2\sqrt{x} + \sqrt{(x - b)}$, quod eſt abſurdum, niſi cum $x = b$, id eſt, cum globus B debet ad priſtinum ſitum aſcendiſſe, cum illiditur globo A cadenti, tunc enim $\sqrt{x - b} = 0$, & $2\sqrt{x} - 0 = 2\sqrt{x} + 0$: ſed tunc ſtatim apparet $a = 4x = 4b$.

$\sqrt{c} = 2\sqrt{x} - \sqrt{(x-b)}$. Et partibus quadratis $a+c-2\sqrt{(ca-cb+cx)} = 4x - 4\sqrt{(xx-bx)}$. Pone $a+c=e$, & $a-b=f$, & erit per debitam reductionem $4x - e + 2\sqrt{(cf+cx)} = 4\sqrt{(xx-bx)}$, & partibus quadratis $ee - 8ex + 16xx + 4cf + 4cx + (16x - 4e)\sqrt{(cf+cx)} = 16xx - 16bx$. Ac deletis utrobique $16xx$ & pro $ee+4cf$ ſcripto m nec non pro $8e - 16b - 4c$ ſcripto n, habebitur per debitam reductionem $(16x - 4e)\sqrt{(cf+cx)} = nx - m$. Et partibus quadratis $256cfxx + 256cx^3 - 128cefx - 128cexx + 16ceef + 16ceex = nnxx - 2mnx + mm$. Et ordinata æquatione

$$\begin{array}{llll} 256cx^3 & -128cexx & +16ceex & +16ceef \\ & +256cf & -128cef & -mm \\ & -nn & +2mn & \end{array}$$

$= 0$. Cujus æquationis conſtructione dabitur x ſeu QE, cui ſi addas datas diſtantias PQ, & EF habebitur altitudo PF quam oportuit invenire.

PROB. LIII.

Si globi duo quieſcentes ſuperior A, & inferior B diverſis temporibus demittantur; & globus inferior eo temporis momento cadere incipiat ubi ſuperior cadendo jam deſcripſit ſpatium PT; invenire loca α, β quæ globi illi cadentes occupabunt ubi eorum intervallum $\varpi\chi$ dato æquale eſt. TAB. VII. Fig. 3.

Cum dentur diſtantiæ PT, PQ, & $\varpi\chi$, dic primam a, ſecundam b, tertiam c, & pro $P\varpi$ ſeu ſpatio quod globus ſuperior, antequam pervenit ad locum quæſitum α, cadendo deſcribit, ponatur x. Jam tempora quibus globus ſuperior deſcribit ſpatia PT, $P\varpi$, $T\varpi$, & inferior ſpatium $Q\chi$, ſunt ut $\sqrt{PT}$, $\sqrt{P\varpi}$, $\sqrt{P\varpi} - \sqrt{PT}$, & $\sqrt{Q\chi}$: quorum temporum poſteriora duo, eo quod globi cadendo ſimul deſcribant ſpatia $T\varpi$ & $Q\chi$, ſunt æqualia. Unde & $\sqrt{P\varpi} - \sqrt{PT}$ æquale erit $\sqrt{Q\chi}$. Erat $P\varpi = x$, & $PT = a$, & ad $P\varpi$ addendo $\varpi\chi$ ſeu c & a ſumma auferendo PQ ſeu b habebitur $Q\chi = x+c-b$. Quamobrem his ſubſtitutis fiet $\sqrt{x} - \sqrt{a} = \sqrt{(x+c-b)}$. Et æquationis partibus quadratis, orietur $x + a - 2\sqrt{ax} = x + c - b$. Ac deleto utrobique x, & ordinata æquatione habebitur $a+b-c = 2\sqrt{ax}$. Et partibus quadratis erit quadratum de $a+b-c$ æquale $4ax$, & quadratum illud diviſum per $4a$ æquale x, ſeu $4a$ ad $a+b-c$ ſicut $a+b-c$ ad x. Ex invento autem x ſeu $P\varpi$ datur globi ſuperioris decidentis locus quæſitus α. Et per locorum diſtantiam ſimul datur etiam locus inferioris β.

Et hinc ſi punctum quæratur ubi globus ſuperior cadendo impinget in inferiorem; ponendo diſtantiam $\varpi\chi$ nullam eſſe ſeu delendo c, dic $4a$ ad $a+b$ ut $a+b$ ad x, ſeu $P\varpi$, & punctum ϖ erit quod quæris.

Et viciſſim ſi detur punctum illud ϖ vel χ in quo globus ſuperior incidit in inferiorem, & quæratur locus T, quem ſuperioris globi decidentis punctum imum P tunc occupabat cum globus inferior incipiebat cadere; quo-

Nn 2 niam

niam eſt $4a$ ad $a+b$ ut $a+b$ ad x, ſeu ductis extremis & mediis in ſe $4ax=aa+2ab+bb$, & per æquationis debitam ordinationem $aa=4ax-2ab-bb$; extrahe radicem quadraticam & proveniet $a=2x-b-2\sqrt{(xx-bx)}$ (s). Cape ergo Vϖ mediam proportionalem inter Pϖ & Qϖ, & verſus V cape VT = VQ, & erit T punctum quod quæris. Nam Vϖ erit $=\sqrt{P\varpi \cdot Q\varpi}$ hoc eſt $=\sqrt{(x(x-b))}$ ſeu $=\sqrt{(xx-bx)}$, cujus duplum ſubductum de $2x-b$, ſeu de $2P\varpi - PQ$, hoc eſt de $PQ+2Q\varpi$, relinquit $PQ-2VQ$ ſeu $PV-VQ$, hoc eſt PT.

Si denique globorum, poſtquam ſuperior incidit in inferiorem, & impetu in ſe invicem facto inferior acceleratur, ſuperior retardatur, deſiderantur loci ubi inter cadendum diſtantiam datæ rectæ æqualem acquirent: quærendus erit primo locus ubi ſuperior impingit in inferiorem; dein ex cognitis tum magnitudinibus globorum tum eorum, ubi in ſe impingunt, celeritatibus, inveniendæ ſunt celeritates quas proxime poſt reflexionem habebunt, idque per modum Prob. XII. Quæſt. Arith. Poſtea quærenda ſunt loca ſumma ad quæ globi celeritatibus hiſce ſi ſurſum ferantur aſcenderent, & inde cognoſcentur ſpatia quæ globi datis temporibus poſt reflexionem cadendo deſcribent, ut & differentia ſpatiorum: & viciſſim ex aſſumpta illa differentia, per analyſin regredietur ad ipſa ſpatia cadendo deſcripta.

Tab. VII. Fig. 4. Ut ſi globus ſuperior incidit in inferiorem ad punctum ϖ, & poſt reflexionem celeritas ſuperioris deorſum tanta ſit, ut ſi ſurſum eſſet, aſcendere faceret globum illum per ſpatium ϖN, & inferioris celeritas deorſum tanta eſſet, ut, ſi ſurſum eſſet, aſcendere faceret globum illum inferiorem per ſpatium ϖM; tum tempora quibus globus ſuperior viciſſim deſcenderet per ſpatia Nϖ, NG; & inferior per ſpatia Mϖ, MH, forent ut $\sqrt{N\varpi}$, $\sqrt{NG}$, $\sqrt{M\varpi}$, $\sqrt{MH}$, adeoque tempora quibus globus ſuperior conficeret ſpatium ϖG, & inferior ſpatium ϖH, forent ut $\sqrt{NG}-\sqrt{N\varpi}$, ad $\sqrt{MH}-\sqrt{M\varpi}$. Pone hæc tempora æqualia eſſe, & erit $\sqrt{NG}-\sqrt{N\varpi}=\sqrt{MH}-\sqrt{M\varpi}$. Et inſuper cum detur diſtantia GH pone $\varpi G+GH=\varpi H$. Et harum duarum æquationum reductione ſolvetur problema. Ut ſi ſit $M\varpi=a$, $N\varpi=b$, $GH=c$, $\varpi G=x$; erit juxta poſteriorem æquationem $x+c=\varpi H$. Adde Mϖ fiet $MH=a+c+x$. Ad ϖG adde Nϖ, & fiet $NG=b+x$. Quibus inventis, juxta priorem æquationem erit $\sqrt{(b+x)}-\sqrt{b}=\sqrt{(a+c+x)}-\sqrt{a}$. Scribatur e pro $a+c$, & $\sqrt{f}$ pro $\sqrt{a}-\sqrt{b}$: & æquatio fiet $\sqrt{(b+x)}=\sqrt{(e+x)}-\sqrt{f}$. Et partibus quadratis $b+x=e+x+f-$
2

(s) En rurſus radicem ambiguam, in quo bivio Mercurius noſter erit, (ut ſemper,) conſideratio rei ipſius.

Quia hic $e=0$, debet eſſe $\sqrt{x}-\sqrt{a}=\sqrt{(x-b)}$: ſed $a=2x-b\mp\sqrt{(4xx-4bx)}$; ergo quæramus radicem ipſius $2x-b\mp\sqrt{(4xx-4bx)}$, ut videamus quinam ſit valor ipſius a. Sit igitur $2x-b=A$ (Sect. I. C. VIII. Art. VI.), $\sqrt{(4xx-4bx)}=B$, tunc $\frac{A+\sqrt{(A^2-B^2)}}{2}=x$, & $\frac{A-\sqrt{(A^2-B^2)}}{2}=x-b$; ergo $\sqrt{a}=\sqrt{x}\mp\sqrt{(x-b)}$: ſed $\sqrt{x}-\sqrt{a}=\sqrt{(x-b)}=\sqrt{x}-\sqrt{x}\mp\sqrt{(x-b)}=0\mp\sqrt{(x-b)}=+\sqrt{(x-b)}$, ergo in exceſſu $\sqrt{x}$ ſupra $\sqrt{a}$ ſumi debet $+\sqrt{(x-b)}$; quare $\sqrt{a}=\sqrt{x}-\sqrt{(x-b)}$ & $a=2x-b-2\sqrt{(xx-bx)}$.

$2\sqrt{(ef+fx)}$, ſeu $e+f-b=2\sqrt{(ef+fx)}$. Pro $e+f-b$ ſcribe g, & fiet $g=2\sqrt{(ef+fx)}$, & partibus quadratis $gg=4ef+4fx$, & per reductionem $\frac{gg}{4f}-e=x$.

PROB. LIV.

Si duo ſint globi A, B, quorum ſuperior A ab altitudine G decidens, in alterum inferiorem B a fundo H verſus ſuperiora reſilientem incidat, & hi globi ita per reflexionem ab invicem denuo recedant, ut globus A vi reflexionis illius ad altitudinem priorem G redeat, idque eodem tempore quo globus inferior B ad fundum H revertitur; dein globus A rurſus decidat, & in globum B a fundo reſilientem denuo incidat, idque in eodem loco AB ubi prius in ipſum incidebat; & ſic perpetuo globi ab invicem reſiliant rurſuſque ad eundem locum redeant: ex datis globorum magnitudinibus, poſitione fundi, & loco G a quo globus ſuperior decidit, invenire locum ubi globi in ſe mutuo impingent. TAB. VII. Fig. 5.

Sit e centrum globi A, & f centrum globi B, d centrum loci G in quo globus ſuperior in maxima eſt altitudine, g centrum loci globi inferioris ubi in fundum impingit, a ſemidiameter globi A, b ſemidiameter globi B, c punctum contactus globorum in ſe mutuo impingentium, & H punctum contactus globi inferioris & fundi. Et celeritas globi A, ubi in globum B impingit, ea erit quæ generatur caſu globi ab altitudine de, adeoque eſt ut $\sqrt{de}$ (t). Hac eadem celeritate reflecti debet globus A verſus ſuperiora, ut ad locum priorem G redeat: at globus B eadem celeritate deorſum reflecti debet qua aſcenderat ut eodem tempore redeat ad fundum quo inde receſſerat. Ut autem hæc duo eveniant, globorum motus inter reflectendum æquales eſſe debent. Motus autem ex globorum celeritatibus & magnitudinibus componuntur, adeoque quod fit ex globi unius mole & celeritate æquale erit ei quod fit ex globi alterius mole & celeritate (v). Unde ſi factum ex unius globi mole & celeritate divi-

(t) Nam celeritates acquiſitæ, in motibus uniformiter acceleratis, ſunt ut tempora; tempora autem in ſubduplicata ſpatiorum peractorum ratione.

(v) Etenim (Probl. Arithm. XII. Caſ. II.) invenimus velocitatem Corporis A poſt reflexionem $=\frac{aA-aB-2bB}{A+B}$. Hæc debet eſſe negativa quidem, ſed æqualis velocitati, quam A habebat ante reflectionem, nempe æqualis velocitati $-a$; ergo $aA-aB-2bB=-aA-aB$: & (deletis delendis, ac transponendo) $2aA=2bB$, vel $aA=bB$. Sunt autem $-aA$, bB motus corporum A & B; ergo &c. Idem inveniſſemus, ſi adhibuiſſemus velocitatem ipſius B poſt reflexionem.

dividatur per molem alterius globi, habebitur celeritas alterius globi proxime ante & poſt reflexionem, ſeu ſub fine aſcenſus & initio deſcenſus. Erit igitur hæc celeritas ut $\frac{A\sqrt{de}}{B}$, ſeu, cum globi ſint ut cubi radiorum, ut $\frac{a^3\sqrt{de}}{b^3}$. Ut autem hujus celeritatis quadratum ad quadratum celeritatis globi A proxime ante reflexionem, ita altitudo ad quam globus B hac celeritate, ſi occurſu globi A in eum decidentis non impediretur, aſcenderet, ad altitudinem ed a qua globus A deſcendit. Hoc eſt ut $\frac{Aq}{Bq}de$ ad de ſeu ut Aq ad Bq vel a^6 ad b^6 ita altitudo illa prior ad x, ſi modo pro altitudine poſteriore ed ponatur x. Ergo hæc altitudo, ad quam nimirum B, ſi non impediretur, aſcenderet, eſt $\frac{a^6}{b^6}x$. Sit ea fK. Ad fK adde fg, ſeu $dH - de - ef - gH$, hoc eſt $p - x$ ſi modo pro dato $dH - ef - gH$ ſcribas p, & x pro incognito de & habebitur $Kg = \frac{a^6}{b^6}x + p - x$. Unde celeritas globi B ubi decidit a K ad fundum, hoc eſt ubi decidit per ſpatium Kg, quod centrum ejus inter decidendum deſcriberet, erit ut $\sqrt{(\frac{a^6}{b^6}x + p - x)}$. At globus ille decidit a loco Bcf ad fundum eodem tempore quo globus ſuperior A aſcendit a loco Ace ad ſummam altitudinem d, aut viciſſim deſcendit a d ad locum Ace, & proinde cum gravium cadentium celeritates æqualibus temporibus æqualiter augeantur, celeritas globi B deſcendendo ad fundum tantum augebitur quanta eſt celeritas tota quam globus A eodem tempore cadendo a d ad e acquirat vel aſcendendo ab e ad d amittat. Ad celeritatem itaque quam globus B habet in loco Bcf, adde celeritatem quam globus A habet in loco Ace, & ſumma, quæ eſt ut $\sqrt{de} + \frac{a^3\sqrt{de}}{b^3}$, ſeu $\sqrt{x} + \frac{a^3}{b^3}\sqrt{x}$ æquabitur $\sqrt{(\frac{a^6}{b^6}x + p - x)}$. Pro $\frac{a^3 + b}{b^3}$ ſcribe $\frac{r}{s}$ & pro $\frac{a^6 - b^6}{b^6}$, $\frac{rt}{ss}$ & æquatio illa fiet $\frac{r}{s}\sqrt{x} = \sqrt{(\frac{rt}{ss}x + p)}$, & partibus quadratis $\frac{rr}{ss}x = \frac{rt}{ss}x + p$. Auſer utrobique $\frac{rt}{ss}x$, duc omnia in ss ac divide per $rr - rt$, & orietur $x = \frac{ssp}{rr - rt}$. Quæ quidem æquatio prodiiſſet ſimplicior ſi modo aſſumpſiſſem $\frac{p}{s}$ pro $\frac{a^3 + b^3}{b^3}$, prodiiſſet enim $\frac{ss}{p - t} = x$. Unde faciendo ut ſit $p - t$ ad s ut s ad x habebitur x ſeu ed; cui ſi addas ec habebitur dc, & punctum c in quo globi in ſe mutuo impingent. Q. E. F.

PROB.

PROB. LV.

Erectis alicubi terrarum tribus baculis ad horizontale planum in punctis A, B, & C perpendicularibus, quorum is qui in A ſit ſex pedum, qui in B octodecim pedum, & qui in C octo pedum, exiſtente linea AB triginta trium pedum; contingit quodam die extremitatem umbræ baculi A, tranſire per puncta B & C, baculi autem B per A & C, ac baculi C per punctum A. Quæritur declinatio ſolis & elevatio poli, ſive dies locuſque ubi hæc evenerint (x)? TAB. VII. Fig. 6.

Quoniam umbra baculi cujuſque deſcripſit conicam ſectionem, ſectionem nempe coni radioſi cujus vertex eſt baculi ſummitas; fingam BCDEF, eſſe hujuſmodi curvam (ſive ea ſit hyperbola, parabola vel ellipſis) quam umbra baculi A eo die deſcripſit, ponendo AD, AE, AF ejus umbras fuiſſe cum BC, BA, CA reſpective fuerunt umbræ baculorum B & C. Et prætercea fingam PAQ eſſe lineam meridionalem ſive axem hujus curvæ ad quem demiſſæ perpendiculares BM, CH, DK, EN, & FL, ſunt ordinatim applicatæ. Has vero ordinatim applicatas indefinite deſignabo littera y, & axis partes interceptas AM, AH, AK, AN, & AL litera x. Fingam denique æquationem $aa \dot{-} bx \dot{-} cxx = yy$, ipſarum x, & y relationem (*i. e.* naturam curvæ) deſignare, aſſumendo aa, b & c tanquam cognitas ut ex analyſi tandem inveniantur. Ubi incognitas quantitates x & y, duarum tantum dimenſionum poſui quia æquatio eſt ad conicam ſectionem; & ipſius y dimenſiones impares omiſi quia ipſa eſt ordinatim applicata ad axem. Signa autem ipſorum b & c, quia indeterminata ſunt, deſignavi notula $\dot{-}$ quam indifferenter pro $+$ aut $-$ uſurpo, & ejus oppoſitum $\dot{\mp}$ pro ſigno contrario. At ſignum quadrati aa affirmativum poſui, quia baculum A umbras in adverſas plagas (C & F, B & E) projicientem concava pars curvæ neceſſario complectitur, & proinde ſi ad punctum A erigatur perpendiculum Aβ; hoc alicubi occurret curvæ puta in β, hoc eſt, ordinatim applicatum y, ubi x nullum eſt, erit reale. Nam inde ſequitur quadratum ejus, quod in eo caſu eſt aa, affirmativum eſſe.

Conſtat itaque quod æquatio hæc fictitia $aa \dot{-} bx \dot{-} cxx = yy$, ſicut terminis ſuperfluis non referta ſic neque reſtrictor eſt quam ut ad omnes hujus problematis conditiones ſe extendat, hyperbolam, ellipſin vel parabolam

(x) Hoc problema totidem verbis propoſitum, & diverſimode ſolutum legitur apud SCHOOTENIUM in additamento ad ſuos comtarios in CARTESII Geometriam, quem lege.

(y) Cum hoc problema, æque ac ſequens majorem Aſtronomiæ cognitionem flagitet, quam qua Tirones plerumque præditi ſint; nos autem Tironibus ſcribamus, nec fieri poſſit ut omnia ſcitu neceſſaria ſatis breviter & perſpicue tradantur, conſultius duximus illa non explicata relinquere.

Digitized by Google

Iam quamlibet deſignatura prout ipſorum aa, b, c, valores determinabuntur, aut nulli forte reperientur. Quid autem valent, quibusque ſignis b & c debent affici, & inde quænam ſit hæc curva ex ſequenti analyſi conſtabit.

Analyſeos pars prior.

Cum umbræ ſint ut altitudines baculorum erit BC . AD :: AB . AE (:: 18.6.) :: 3.1. Item CA . AF (:: 8 . 6.) :: 4. 3. Quare nominatis $AM = r$, $MB = s$, $AH = t$, & $HC = \dot{-}v$. Ex ſimilitudine triangulorum AMB, ANE, & AHC, ALF erunt $AN = -\frac{r}{3}$. $NE = -\frac{s}{3}$. $AL = -\frac{3t}{4}$. Et $LF = \dot{-}\frac{3v}{4}$: quarum ſigna ſignis ipſarum AM, MB, AH, HC contraria poſui quia tendunt ad contrarias plagas reſpectu puncti A, a quo ducuntur, axisve PQ cui inſiſtunt. His autem pro x & y in æquatione fictitia $aa \dot{-} bx \dot{-} cxx = yy$, reſpective ſcriptis,

$$r \ \& \ s \text{ dabunt } aa \dot{-} br \dot{-} crr = ss.$$
$$-r \ \& -\frac{s}{3} \text{ dabunt } aa \underset{\cdot}{-} \frac{br}{3} \dot{-} \frac{1}{9}crr = \frac{1}{9}ss.$$
$$t \ \& \dot{-} v \text{ dabunt } aa \dot{-} bt \dot{-} ctt = vv.$$
$$-\frac{3}{4}t \ \& \underset{\cdot}{-}\frac{3}{4}v \text{ dabunt } aa \underset{\cdot}{-} \frac{3}{4}bt \dot{-} \frac{9}{16}ctt = \frac{9}{16}vv.$$

Jam e prima & ſecunda harum exterminando ss ut obtineatur r, prodit $\frac{2aa}{\dot{-}b} = r$. Unde patet $\dot{-}b$ eſſe affirmativum. Item e tertia & quarta exterminando vv ut obtineatur t, prodit $\frac{aa}{3b} = t$. Et ſcriptis inſuper $\frac{2aa}{b}$ pro r in prima, & $\frac{aa}{3b}$ pro t in tertia, oriuntur $3aa \dot{-} \frac{4a^4c}{bb} = ss$, & $\frac{4}{3}aa \dot{-} \frac{a^4c}{9bb} = vv$.

Porro demiſſa Bλ perpendiculari in CH, erit BC . AD (:: 3. 1.) :: Bλ . AK :: Cδ . DK, Quare cum ſit Bλ ($= AM - AH = r - t$) $= \frac{5aa}{3b}$, erit $AK = \frac{5aa}{9b}$, vel potius $= -\frac{5aa}{9b}$. Item cum ſit Cλ ($= CH \dot{-} BM = v \dot{-} s$) $= \sqrt{(\frac{4aa}{3} \dot{-} \frac{a^4c}{9bb})} \dot{-} \sqrt{(3aa \dot{-} \frac{4a^4c}{bb})}$, erit DK ($= \frac{1}{3}$ Cλ) $= \sqrt{(\frac{4aa}{27} \dot{-} \frac{a^4c}{81bb})} \dot{-} \sqrt{(\frac{1}{3}aa \dot{-} \frac{4a^4c}{9bb})}$. Quibus in æquatione

aa

$aa + bx \dot{-} cxx = yy$, pro AK, ac DK, ſive x, & y, reſpectivè ſcriptis, prodit $\frac{4aa}{9} \dot{-} \frac{25a^4c}{81bb} = \frac{13}{27}aa \dot{-} \frac{37a^4c}{81bb} \dot{-} 2(\sqrt{(\frac{4aa}{27} \dot{-} \frac{a^4c}{81bb})}(\sqrt{(\frac{aa}{3} \dot{-} \frac{4a^4c}{9bb})})$ Et per reductionem $-bb \mp 4aac = \dot{-} 2\sqrt{(36b^4 \dot{-} 51aabbc + 4a^4cc)}$; & partibus quadratis iterumque reductis, exit $0 = 143b^4 \dot{-} 196\,aabbc$, ſive $\frac{-143bb}{196aa} = \dot{-} c$. Unde conſtat $\dot{-} c$ negativam eſſe, adeoque æquationem fictitiam $aa \dot{-} bx \dot{-} ccxx = yy$, hujus eſſe formæ $aa + bx - cxx = yy$, & ideo curvam, quam deſignat, ellipſin eſſe. Ejus vero centrum & axes duo ſic eruuntur.

Ponendo $y = 0$, ſicut in figuræ verticibus P & Q contingit, habebitur $aa + bx = cxx$, & extracta radice, $x = \frac{b}{2c} \pm \sqrt{(\frac{bb}{4cc} + \frac{aa}{c})} =$ AQ vel AP. Adeoque ſumpto $AV = \frac{b}{2c}$, erit V centrum ellipſis, & VQ vel VP $(\sqrt{\frac{bb}{4cc} + \frac{aa}{c}})$ ſemiaxis maximus. Si porro ipſius AV valor $\frac{b}{2c}$ pro x in æquatione $aa + bx - cxx = yy$ ſcribatur, fiet $aa + \frac{bb}{4c} = yy$. Quare eſt $aa + \frac{bb}{4c} = VZq$, hoc eſt quadrato ſemiaxis minimi. Denique in valoribus ipſarum AV, VQ, VZ jam inventis, ſcripto $\frac{143bb}{196aa}$ pro c, exeunt $\frac{98aa}{143b} = AV$, $\frac{112aa\sqrt{3}}{143b} = VQ$, & $\frac{8a\sqrt{3}}{\sqrt{143}} = VZ$.

Analyſeos pars altera.

Supponatur jam baculus puncto A inſiſtens eſſe AR, & erit RPQ planum meridionale, ac RPZQ conus radioſus cujus vertex eſt R. Sit inſuper TXZ planum ſecans horizontem in VZ, ut & meridionale planum in TVX, quæ ſectio ſit ad axem mundi, coni-ve, perpendicularis, & ipſum planum TXZ erit ad eundem axem perpendiculare, & conum ſecabit in peripheria circuli TZX, quæ ab ejus vertice pari ubique intervallo RX, RZ, RT diſtabit. Quamobrem ſi PS ipſi TX parallela ducatur, fiet RS = RP propter æquales RX, RT; nec non SX = XQ propter æquales PV, VQ. Unde eſt RX vel RZ $(= \frac{RS + RQ}{2}) = \frac{RP + RQ}{2}$. Denique ducatur RV; & cum VZ perpendiculariter inſiſtat plano RPQ, (ſectio utique exiſtens planorum eidem perpendiculariter inſiſtentium fiet triangulum RVZ rectangulum ad V. TAB. VII. Fig. 7.

Dictis jam $RA = d$, $AV = e$, PV vel $VQ = f$, & $VZ = g$, erit $AP = f - e$, & $RP = \sqrt{(ff - 2ef + ee + dd)}$. Item $AQ = f + e$, & $RQ = \sqrt{(ff + 2ef + ee + dd)}$: adeoque RZ $\left(= \frac{RP + RQ}{2}\right)$ $= \frac{\sqrt{(ff - 2ef + ee + dd)} + \sqrt{(ff + 2ef + ee + dd)}}{2}$. Cujus quadratum $\frac{dd + ee + ff}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(f^4 - 2eeff + e^4 + 2ddff + 2ddee + d^4)}$, eſt æquale $(RVq + VZq = RAq + AVq + VZq =)$ $dd + ee + gg$. Jam reductione facta eſt $\sqrt{(f^4 - 2eeff + e^4 + 2ddff + 2ddee + d^4)} = dd + ee - ff + 2gg$, & partibus quadratis ac in ordinem redactis, $ddff = ddgg + eegg - ffgg + g^4$, ſive $\frac{ddff}{gg} = dd + ee - ff + gg$. Denique 6, $\frac{98aa}{143b}$, $\frac{112aa\sqrt{3}}{143b}$, & $\frac{8a\sqrt{3}}{\sqrt{143}}$ (valoribus ipſorum AR, AV, VQ, & VZ,) pro d, e, f, ac g reſtitutis, oritur $36 - \frac{196a^4}{143bb} + \frac{192aa}{143} = \frac{36 \cdot 14 \cdot 14aa}{143bb}$, & inde per reductionem $\frac{49a^4 + 36 \cdot 49aa}{48aa + 1287} = bb$.

In Fig. 6. eſt $AMq + MBq = ABq$, hoc eſt $rr + ss = 33 \cdot 33$. Erat autem $r = \frac{2aa}{b}$, & $ss = 3aa - \frac{4a^4c}{bb}$, unde $rr = \frac{4a^4}{bb}$, & (ſubſtituto $\frac{143bb}{196aa}$ pro c) $ss = \frac{4aa}{49}$. Quare $\frac{4a^4}{bb} + \frac{4aa}{49} = 33 \cdot 33$, & inde per reductionem iterum reſultat $\frac{4 \cdot 49a^4}{53361 - 4aa} = bb$. Ponendo igitur æqualitatem inter duo bb, & dividendo utramque partem æquationis per 49, fit $\frac{a^4 + 36aa}{48aa + 1287} = \frac{4a^4}{53361 - 4aa}$. Cujus partibus in crucem multiplicatis, ordinatis, ac diviſis per 49, exit $4a^4 = 981aa + 39204$ cujus radix aa eſt $\frac{981 + \sqrt{1589625}}{8} = 280⌊2254144$.

Supra inventum fuit $\frac{4 \cdot 49a^4}{53361 - 4aa} = bb$, ſive $\frac{14aa}{\sqrt{(53361 - 4aa)}} = b$. Unde AV $\left(\frac{98aa}{143b}\right)$ eſt $\frac{7\sqrt{(53361 - 4aa)}}{143}$, & VP vel VQ $\left(\frac{112aa\sqrt{3}}{143b}\right)$ eſt $\frac{8}{143}\sqrt{(160083 - 12aa)}$. Hoc eſt ſubſtituendo $280⌊2254144$ pro aa, ac terminos in decimales numeros reducendo, $AV = 11⌊188297$, & VP vel $VQ = 22⌊147085$. Adeoque AP $(PV - AV) = 10⌊958788$, & AQ $(AV + VQ)$ $33⌊335382$.

Deni-

Denique ſi $\frac{1}{6}$ AR ſive 1 ponatur radius, erit $\frac{1}{6}$ AQ ſive 5,555897 tangens anguli ARQ 79 gr. 47′. 48″, & $\frac{1}{6}$ AP ſive 1,826465 tangens anguli ARP 61 gr. 17′. 57″. Quorum angulorum ſemiſumma 70 gr. 32′. 52″, eſt complementum declinationis ſolis; & ſemidifferentia 9 gr. 14′. 56″, complementum latitudinis loci. Proinde declinatio ſolis erat 19 gr. 27′. 8″, & latitudo loci 80 gr. 45′. 4″. Quæ erant invenienda.

PROB. LVI.

E cometæ motu uniformi rectilineo per cœlum trajicientis locis quatuor obſervatis, diſtantiam a terra, motuſque determinationem, in hypotheſi copernicæa colligere.

SI e centro cometæ in locis quatuor obſervatis, ad planum eclipticæ demittantur totidem perpendicula; ſintque A, B, C, D, puncta in plano illo in quæ perpendicula incidunt; per puncta illa agatur recta AD, & hæc ſecabitur a perpendiculis in eadem ratione cum linea quam cometa motu ſuo deſcribit, hoc eſt, ita ut ſit AB ad AC ut tempus inter primam & ſecundam obſervationem ad tempus inter primam ac tertiam, & AB ad AD ut tempus illud inter primam & ſecundam obſervationem ad tempus inter primam & quartam. Ex obſervationibus itaque dantur rationes linearum AB, AC, AD, ad invicem. Tab. VII. Fig. 8.

Inſuper in eodem eclipticæ plano ſit S ſol, EH arcus lineæ eclipticæ in qua terra movetur, E, F, G, H loca quatuor terræ temporibus obſervationum, E locus primus, F ſecundus, G tertius, H quartus. Jungantur AE, BF, CG, DH, & producantur donec tres poſteriores priorem ſecent in I, K, & L, BF in I, CG in K, DH in L. Et erunt anguli AIB, AKC, ALD differentiæ longitudinum obſervatarum cometæ; AIB differentia longitudinum loci primi cometæ & ſecundi; AKC differentia longitudinum loci primi ac tertii; & ALD differentia longitudinum loci primi & quarti Dantur itaque ex obſervationibus anguli AIB, AKC, ALD.

Junge SE, SF, EF; & ob data puncta S, E, F, datumque angulum ESF, dabitur angulus SEF. Datur etiam angulus SEA, utpote differentia longitudinis cometæ & ſolis tempore obſervationis primæ. Quare ſi complementum ejus ad duos rectos, nempe angulum SEI, addas angulo SEF, dabitur angulus IEF. Trianguli igitur IEF dantur anguli una cum latere EF, adeoque datur etiam latus IE. Et ſimili argumento dantur KE & LE. Dantur igitur poſitione lineæ quatuor AI, BI, CK, DL, adeoque problema huc redit, ut lineis quatuor poſitione datis, quintam inveniamus quæ ab his in data ratione ſecabitur.

Demiſſis ad AI perpendiculis BM, CN, DO, ob datum angulum AIB datur ratio BM ad MI. Eſt & BM ad CN in data ratione BA ad CA, & ob datum angulum CKN datur ratio CN ad KN. Quare datur etiam ratio BM ad KN; & inde ratio quoque BM ad MI — KN, hoc eſt ad MN + IK. Cape P ad IK ut eſt AB ad BC, & cum ſit MA ad MN in eadem ratione, erit etiam P + MA ad IK + MN in eadem ratione; hoc eſt in ratione data. Quare datur ratio BM ad P + MA. Et ſimili argumento ſi capiatur Q ad IL in ratione AB ad BD, dabitur ratio BM ad Q + MA. Et proinde ratio BM ad ipſorum P + MA & Q + MA differentiam, quoque dabitur. At differentia illa, nempe P — Q vel Q — P, datur. Et proinde dabitur BM. Dato autem BM, ſimul dantur P + MA, & MI, & inde MA, ME, AE, & angulus EAB.

His inventis, erige ad A lineam plano eclipticæ perpendicularem, quæ ſit ad lineam EA ut tangens latitudinis cometæ in obſervatione prima ad radium, & iſtius perpendicularis terminus erit locus centri cometæ in obſervatione prima. Unde datur diſtantia cometæ a terra tempore illius obſervationis. Et eodem modo ſi e puncto B erigatur perpendicularis quæ ſit ad lineam BF ut tangens latitudinis cometæ in obſervatione ſecunda ad radium, habebitur locus centri cometæ in illa ſecunda. Et acta linea a loco ad primo ad ſecundum, ea eſt in qua cometa per cœlum trajicit.

PROB. LVII.

Si angulus datus CAD circa punctum angulare A, poſitione datum, & angulus datus CBD circa punctum angulare B, poſitione datum, ea lege circumvolvantur ut crura AD, BD ad rectam poſitione datam EF ſeſe ſemper interſecent: invenire lineam illam curvam quam reliquorum crurum AC, BC interſectio C deſcribit.

TAB. VIII. Fig. 1. Produc CA ad *d* ut ſit A*d* = AD, & CB ad *δ* ut ſit B*δ* = BD. Fac angulum A*de* æqualem angulo ADE, & angulum B*δf* æqualem angulo BDF, & produc AB utrinque donec ea occurrat *de* & *δf* in *e* & *f*. Produc etiam *ed* ad G. ut ſit *d*G = *δf*, & a puncto C ad lineam AB ipſi *ed* parallelam age CH, & ipſi *fδ* parallelam CK. Et concipiendo lineas *e*G, *fδ* immobiles manere dum anguli CAD, CBD lege præſcripta circa polos A & B volvuntur, ſemper erit G*d* æqualis ipſi *fδ*, & triangulum CHK dabitur ſpecie (*a*). Dic itaque A*e* = *a*, *e*G = *b*, B*f* = *c*, AB = *m*, BK = *x*, &

(*a*) Ad pleniorem hujus problematis explicationem, anguli dati certum aliquem ſitum occupare fingantur, ita ut puncta *c*, L æque dentur ac puncta A, B: tunc dabuntur *c*A; AL; LB; B*c*, ut & anguli ALE, BLF.

Sumantur ergo *l*A = AL, ac *λ*B = BL; & fiant anguli A*le* = ALE, & B*λf* = BLF; & ex *c* ducantur *ch*, *ck*, ipſis *el*, *fλ*, parallelæ; eæ dabuntur: ſit ergo *kc* = *d*, *ch* = *e*, *hk* = *f*.

Jam vero anguli gyrent circa polos A & B, ceteris ſtantibus; & venerint quocumque *c*A in

& CK $= y$. Et erit BK ad CK ut Bf ad $f\delta$. Ergo $f\delta = \frac{cy}{x} =$ Gd. Aufer hoc de Ge, & reſtabit $ed = b - \frac{cy}{x}$. Cum detur ſpecie triangulum CKH, pone CK ad CH ut d ad e; & CH ad HK ut e ad f, & erit CH $= \frac{ey}{d}$, & HK $= \frac{fy}{d}$.

Ade-

in AC, Al in Ad, AL in AD, BL in BD, eB in BC, & Bλ in Bδ.

Semper triangulum dAl erit æquale ac ſimile triangulo ADL, ut DBL triangulo δBλ.

Cum enim anguli gyrantes dati ſint, & ſemper ſibimet æquales, ſemper quoque ſibimet æquales erunt anguli quibus ii a duobus rectis deficiunt; ergo angulus dAD $=$ lAL; igitur, demto communi lAD, erit dAl $=$ DAL: ſed angulus Ald factus eſt æqualis angulo ALD: ergo triangula dAl, DAL ſunt æquiangula; atqui latus LA æquat homologum Al, ex conſtructione: igitur triangula dAl, DAL ſunt etiam æqualia. Quare $dl =$ DL.

Sed eodem pacto demonſtratur triangulum λBδ æquale triangulo LBD. Proinde $\lambda\delta =$ LD $= dl$.

Si ergo ſumatur lG $= f\lambda$ datæ; ſemper erit dG vel ($dl +$ lG) $= f\delta$ vel ($f\lambda + \lambda\delta$).

Quod ſi ex C ducantur CH & CK ipſis ch, ck parallelæ; erunt triangula hck, HCK ſimilia.

Hæc ſufficiunt quidem ad Auctorem intelligendum: ſed viam ad inferius dicenda ſtraturus, denuo rem, nonnullis mutatis, aggredior.

TAB. T. Fig. 1. Aut anguli dati ſunt æquales aut inæquales. Si primum, licet quemlibet aſſumere: ſi ſecundum, bene ſumetur minimus, quem eſſe pono ad A.

Super AB fiat angulus BAL æqualis dato illi, qui circa A movetur; ſeu (quod idem eſt) ponatur alterum ex ejus cruribus cadere in AB; alterum crus anguli gyrantis circa B cadet in LB per hypotheſim. Jam, biſecta AB in V, demittatur ei ad rectos angulos TV ſecans EF in T: eidem EF occurret AL, aut extra punctum T, aut in ipſo puncto T. Si primum, rurſum aut verſus E, aut verſus F.

Jungantur AT, TB: erunt anguli TAB, TBA æquales. Nunc ſi punctum L eſt verſus E, cadet recta BL intra angulum TBA; erit ergo angulus LBA minor angulo TBA vel TAB; ſed hic minor eſt angulo BAL, per hypotheſim, igitur illo minor eſt angulus LBA. Sed angulus gyrans circa B poſitus eſt non minor angulo LAB; quare alterum illius crus cadere debet ſupra lineam AC: cadat in BM.

Si vero punctum L eſt verſus F, eodem pacto probabitur angulus LBA major angulo LAB; ideo fieri poterit ut alterum anguli circa B gyrantis crus cadat vel ſupra lineam AB, vel in ipſa, vel infra eam: ſi cadit ſupra, res in caſum ſuperiorem recidet, & eadem utemur figura: ſi in ipſa recta AB, quid accidat diſpiciemus ſuo loco: ſi vero infra, utemur ejus productione BM eademque figura.

Si autem punctum L cadit in T, anguli mobiles aut æquales ſunt, aut inæquales. Si primum, alterum crus anguli B cadet in ipſa BA, & de hoc caſu poſtea loquemur. Si inæquales, crus illud cadere debet ſupra AB, per hypotheſim.

Animadvertendum eſt, quod in his omnibus, nulla poſitionis rectæ EF ratio habita eſt; unde fit hæc ſtare in illius poſitione quacumque.

Jam ſuper BA ultra A ſumatur Ae æqualis datæ AL, & fiat angulus AeN æqualis dato ALE, ponaturque eA $=$ AL $= a$.

Item ſuper MB ultra B producta capiatur Bg æqualis datæ BL, & fiat angulus Bgf æqualis angulo dato BLF, & exponatur gf per b, ac fB per c; & ſumatur eG $= gf = b$.

 Gy-

Adeoque $AH = m - x - \frac{fy}{d}$. Eſt autem AH ad HC ut A*e* ad *ed*, hoc eſt $m - x - \frac{f}{d}y \cdot \frac{cy}{d} :: a \cdot b - \frac{cy}{x}$. Ergo ducendo media & extrema in ſe, fiet $mb - \frac{mcy}{x} - bx + cy - \frac{bf}{d}y + \frac{cfyy}{dx} = \frac{aey}{d}$. Duc omnes terminos in dx, eoſque in ordinem redige; & fiet $fcyy \begin{array}{l} +dc \\ -aex \\ -fb \end{array} y - dcmy - bdxx + bdmx = 0$. Ubi cum incognitæ quantitates x & y, ad duas tantum dimenſiones aſcendant, patet curvam lineam quam punctum C deſcribit, eſſe conicam ſectionem. Pone $\frac{ae + fb - dc}{c} = 2p$, & fiet $yy = \frac{2p}{f}xy + \frac{dm}{f}y + \frac{bd}{fc}xx - \frac{bdm}{fc}x$. Et extracta radice $y = \frac{p}{f}x + \frac{dm}{2f} \pm \sqrt{(\frac{pp}{ff}xx + \frac{bd}{fc}xx + \frac{pdm}{ff}x - \frac{bdm}{fc}x + \frac{ddmm}{4ff})}$. Unde colligitur curvam hyperbolam eſſe, ſi ſit $\frac{bd}{fc}$ affirmativum, vel negativum & minus quam $\frac{pp}{ff}$; parabolam, ſi ſit $\frac{bd}{fc}$ negativum & æquale $\frac{pp}{ff}$; ellipſin vel circulum, ſi ſit $\frac{bd}{fc}$ & negativum & majus quam $\frac{pp}{ff}$. Q. E. I. (*b*)

PROB.

Gyrent nunc anguli dati, & eorum latera ſe interſecent in recta EF alicubi in D ab L verſus F; latus anguli LAB erit in AP, ita ut angulus DAP æquet angulum LAB; quocirca, demto communi DAB, erit LAD æqualis BAP vel *e*A*d*, ſi latus PA producatur donec occurrat N*e* in *d*. Quod etiam patet, quia angulus LA*e* æquat DA*d*; &, communi LA*d* ablato, DAL æqualis eſt ipſi *d*A*e*. Sed anguli LAD, ADL ſimul ſumti ſunt æquales externo ALE, & hic, per conſtructionem, æquat angulum A*e*N, id eſt, angulos internos & oppoſitos *e*A*d*, A*de* ſimul; ergo, ſublatis æqualibus, DAL, *d*A*e*, reſtat angulus ADL æqualis angulo A*de*; &, ob latus *e*A æquale lateri AL, eſt latus *d*A æquale lateri AD, ac *ed* æquale LD.

Haud aliter latus BM tunc erit in BQ, ita ut angulus LBM æquet angulum DBQ; &, demto communi LBQ, erit angulus LBD æqualis angulo MBQ vel *g*B*δ*, producta recta QB: quare angulus BDF, qui æquat interiores oppoſitos DBL, BLD ſimul, æquabit ipſos *δ*B*g*, B*gδ*, vel his parem B*δf*; æquales enim fecimus angulos BLF, B*gf*.

Atqui triangula æquiangula BLD, B*gδ* habent latera LB, B*g* æqualia; ſunt igitur æqualia, & DB æquat B*δ*, ac DL ipſam *δg*: ſed recta DL oſtenſa eſt æqualis rectæ *ed*, & facta fuerat *e*G æqualis *fg*; ſupereſt igitur *d*G æqualis ipſi *fδ*.

Nunc ex R, ubi FE occurrit *e*G (productæ, quatenus opus eſt), duc R*k* ipſi *fg* parallelam, & dic *k*R = *d*, R*e* = *e*, *ek* = *f*.
In ceteris Auctorem ſequere.

(*b*) Si crura AP, BQ datorum angulorum fieri poſſunt parallela, tunc ordinata in infinitum creſcit, id eſt curva in ſeipſam non redit; ſed in infinitum extenditur; ſecus vero, ſi crura illa ſemper in aliquo puncto concurrant. Tab. T. Fig. 2.

Si primum, curva erit hyperbola aut parabola; ſi ſecundum, ellipſis aut circulus.

Crura PA, QB parallela erunt, ſi anguli PAB;

PAB; ABQ ſimul æquales ſint duobus angulis rectis: ſed anguli BAD; ADB; DBA ſimul æquales ſunt duobus rectis; ergo eſt ADB complementum angulorum datorum PAD; DBQ ſimul ad quatuor rectos.

Ut ergo appareat utrum PA, QB eſſe poſſint parallela, ſuper AB deſcribatur verſus EF arcus capax hujus complementi.

Hic aut ſecabit rectam EF, aut eam tanget, aut inſectam & intactam infra ſe relinquet.

Tab. T. Fig. 3.

Si primum, duo erunt puncta in recta EF, nempe E; F, ubi eam ſecat circulus; quæ ſuppeditabunt latera parallela. Jam ſint anguli in EAP, EBQ; latera vero AP, BQ parallela. Si tantiſper moveatur interſectio E, & veniat in *e*, circulus alicubi ſecabit ipſam B*e* in G. Junge AG, angulus AGB æquabit angulum AEB; eſt autem exterior AGB major interiore & oppoſito A*e*G; ergo angulus A*e*G minor eſt angulo AEB: atque ideo anguli *e*AB, *e*BA ſimul ſumti majores ſunt angulis EAB, EBA ſimul. Sunt autem anguli *e*A*p*, *e*B*q*, ſimul, æquales angulis EAP, EBQ, ſimul; igitur, demtis hinc minoribus EAB, EBA, inde majoribus *e*AB, *e*BA, reſtant anguli *p*AB, AB*q*, ſimul, minores angulis PAB, ABQ; & hi æquales erant duobus rectis, ergo anguli *p*AB, AB*q* minores ſunt duobus rectis, quapropter rectæ A*p*, B*q* alicubi convenient ſupra rectam AB: conveniant in *c*.

Jam quia angulus *e*AB major eſt angulo EAB, debet reliquus BA*p* minor eſſe reliquo BAP, & recta A*p* occurrere rectæ BQ, & ultra eam ferri verſus R. Quoniam vero *e*BA minor eſt EBA, eſt reliquus AB*q* major reliquo ABQ, & recta BQ cadit ultra BQ verſus R.

Eodem pacto probabitur quod ſi interſectio ſuper recta fiat in *f*, concurſus laterum reliquorum fiet ultra lineam AO verſus S.

Tab. T. Fig. 4.

Rurſus veniat eadem interſectio in *e* inter puncta E & F, & circulus occurret ipſi B*e*, productæ, alicubi in G; & juncta AG, demonſtrabitur eodem pacto angulos BA*p*, AB*q* ſimul majores eſſe duobus rectis, & latera illa producta occurrere infra rectam AB ultra rectam PAL verſus F, & ideo AL totam eſſe extra curvam.

Idem demonſtratur de recta MN. Unde conficitur duas rectas ſibi non parallelas huic curvæ non occurrere, niſi, ſingulas in ſingulis punctis. Notum autem eſt ex conicis id uni hyperbolæ contingere, & quidem quando rectæ illæ ſunt aſymptotis parallelæ. Tunc igitur curva eſt hyperbola.

Iiſdem veſtigiis inſiſtens facile diſpicies, quando arcus, ut ſupra, deſcriptus, tangit rectam EF, unum eſſe punctum præbens latera parallela: hæc duo latera curvæ non occurrere, niſi ſingula in ſingulis punctis, & rectas omnes alias bis curvam ſecare: conſtat ex conicis id uni parabolæ accidere, & quidem quando rectæ illæ ſunt diametri. Tunc ergo curva eſt parabola.

Sed quando arcus rectæ EF non occurrit, nullum eſt punctum præbens latera parallela; neque curva in infinitum extenditur. Eſt ergo circulus aut ellipſis.

Ut nunc perſpiciam num ſectio ſit circulus aut ellipſis, noto quod in circulo tranſeunte per A, B, angulus deſcribens, C, *c*, debet ſemper eſſe idem; quare ſemper eadem eſt ſumma angulorum CAB, CBA, & *c*AB, *c*BA; ergo & PAB, ABQ, & *p*AB, AB*q*; quapropter etiam angulus concurſus (ſi quis ſit) eſt ſemper idem: ſed locus tunc eſt circuli arcus. Ergo ut deſcribatur circulus, aut PA, BQ debent eſſe parallelæ, aut percurrere circuli arcum; ergo in hypotheſi noſtra ſectio ſemper eſt ellipſis. Tab. T. Fig. 5.

Hinc ſequitur quod cum recta EF ipſam AB ſecat inter A & B, ſectio ſemper eſt hyperbola.

Si, ceteris ſtantibus, anguli dati ita mutentur, ut eadem ſemper ſit eorum ſumma, curvæ ſpecies non mutatur; nam ſemper idem erit angulus ADB: quare arcus illius capax ſibi conſtabit, & ſi primo caſu rectam EF tetigerit, ſemper eam tanget, &c.

Cum latus QB cadit ſuper BA interſectio curvam deſcribens fit in A. Tab. T. Fig. 6.

Tunc autem AP ſectionem tangit in A; Feratur enim punctum D in *d*, tunc certe recta PA (producta pro neceſſitate) cadere debet in *p*A inter PA & punctum B vel ſupra vel infra rectam AB, & recta BQ tunc lata in B*q* ei occurret inter PA & punctum B; quare curva totam rectam extra ſe relinquet verſus Q.

Data quavis recta QB tranſeunte per alterutrum polorum B facile invenitur punctum ubi ea ſectioni occurrit. Fiat angulus QBD æqualis dato gyranti in B. Jungatur DA & Tab. U. Fig. 1.

fiat

Digitized by Google

PROB. LVIII.

Parabolam deſcribere quæ per data quatuor puncta tranſibit.

TAB. VIII. Fig. 2. Sint puncta illa data A, B, C, D. Junge AB & eam biſeca in E. Et per E age rectam aliquam VE, quam concipe diametrum eſſe parabolæ, puncto V exiſtente vertice ejus. Junge AC ipſique AB parallelam age DG occurrentem AC in G. Dic $AB = a$, $AC = b$, $AG = c$, $GD = d$. In AC cape AP cujusvis longitudinis & a P age PQ parallelam AB, & concipiendo Q punctum eſſe parabolæ; dic $AP = x$, $PQ = y$, & æquationem quamvis ad parabolam aſſume quæ relationem inter AP & PQ exprimat. Ut quod ſit $y = e + fx \pm \sqrt{gg + hx}$.

Jam ſi ponatur AP ſive $x = o$, puncto P incidente in ipſum A, fiet PQ ſive $y = o$, ut & $= —$ AB. Scribendo autem in æquatione aſſumta o pro x, fiet $y = e \pm \sqrt{gg}$, hoc eſt $= e \pm g$. Quorum valorum ipſius y major $e + g$ eſt $= o$, minor $e - g = -$ AB ſive $- a$ (c). Ergo $e = - g$ & $e - g$, hoc eſt $- 2g = - a$, ſive $g = \frac{1}{2} a$. Atque adeo vice æquationis aſſumptæ habebitur hæc $y = - \frac{1}{2} a + fx \pm \sqrt{\frac{1}{4} aa + hx}$.

Adhæc

fiat angulus DAP æqualis alteri ex datis. Recta AP alicubi occurret rectæ BQ in P, quod erit punctum quæſitum.

Ex his facillime deſcribuntur ſectiones hoe problemate quæſitæ.

TAB. U. Fig. 2. Sit enim AP ſectionis tangens in A, cui parallela ſit BQ. Inveniatur punctum Q, ubi hæc ſectioni occurret. Recta BQ biſecetur in G. Erit AG diameter; id ſufficit pro parabola.

Sed pro aliis ſectionibus, quære in AG punctum H, ubi AG curvæ occurrit & deſcribe ſectionem.

Nota quod in ellipſi erit AH majoı quam AG; ſecus vero in hyperbola.

TAB. U. Fig. 3. Cum recta EF tranſit per alterutrum polorum B, recta deſcribitur.

Siquidem, quia datorum angulorum crura concurrere debent in recta EF, punctum aliquod ex crure anguli QBE ſemper eſſe debet in recta FE; ſed alterum ex his punctis (nempe punctum B) eſt in eadem recta; ergo totum crus illius anguli cum recta FE coincidit: quare alterum BQ jacet immobile; igitur interſectio Q anguli mobilis EAQ ſemper ſit in recta QB, quæ hoc motu deſcribitur.

Veniamus tandem ad alteram hypotheſim.

Nunc igitur ambo auguli ſimul cadere ponuntur in AB: ſint ii BAL, LBA. TAB. U. Fig. 4.

Quia hic ambo crura ſuper eandem rectam cadunt; ſumatur $eA = AL = a$, & $fB = BL = c$, & fiant anguli $NeA = ALE$, ac $MfB = BLF$; & quia punctum g cadit in f, erit b (diſtantia horum punctorum) $= o$.

Igitur ex ſuperiote æquatione deleantur termini, ubi eſt b; & erit

$$fcyy \frac{+dc}{-ae} xy - dcmy = o,$$

&, cunctis diviſis per y, $fcy \frac{+dc}{-ae} x - dcm = o$, æquatio ad rectam,

(c) Quando $x = o$, habet y ex æquatione duos valores $e + g$, $e - g$, & ex conſideratione figuræ duos alios o & $- a$; hi duo valores debent eſſe æquales ſinguli ſingulis, igitur, pone, ut libet, vel $e + g = o$ vel $e - g = o$. Si primum, quid inde fiat vides apud Auctorem. Si ſecundum, erit ergo $e + g = - a$; ſed quoniam

Digitized by Google

Adhæc ſi ponatur AP ſive $x = $ AC ita ut punctum P incidat in C, fiet iterum PQ $= 0$. Pro x igitur in æquatione noviſſima ſcribe AC ſive b, & pro y, o, & fiet $0 = -\frac{1}{2}a + fb + \sqrt{(\frac{1}{4}aa + bb)}$ (*d*), ſive $\frac{1}{2}a - fb = \sqrt{(\frac{1}{4}aa + bb)}$; & partibus quadratis, $-afb + ffbb = bb$. Sive $ffb - fa = b$. Atque ita vice aſſumptæ æquationis habebitur iſthæc $y = -\frac{1}{2}a + fx \pm \sqrt{(\frac{1}{4}aa + ffbx - fax)}$.

Inſuper ſi ponatur AP ſive $x = $ AG ſive c, fiet PQ ſive $y = -$ GD ſive $-d$ (*e*). Quare pro x & y in æquatione noviſſima ſcribe c & $-d$, & fiet $-d = -\frac{1}{2}a + fc - \sqrt{(\frac{1}{4}aa + ffbc - fac)}$. Sive $\frac{1}{2}a - d - fc = \sqrt{(\frac{1}{4}aa + ffbc - fac)}$. Et partibus quadratis, $-ad - fac + dd + 2dcf + ccff = ffbc - fac$. Et æquatione ordinata & reducta, $ff = \frac{2d}{b-c}f + \frac{dd - ad}{bc - cc}$. Pro $b - c$ hoc eſt pro GC ſcribe k, & æquatio illa fiet $ff = \frac{2d}{k}f + \frac{dd - ad}{kc}$. Et extracta radice $f = \frac{d}{k} + \sqrt{(\frac{ddc + ddk - adk}{kkc})}$. (*f*) Invento

niam $e - g = 0$, eſt $e = g$, ergo $2g = e + g = -a$, & $g = \frac{1}{2}a = e$, unde oritur eadem æquationis aſſumtæ mutatio.

(*d*) Ponit Newtonus ſignum poſitivum quantitati radicali, quia jam finxerat radicem majorem æqualem nihilo, & in eadem hypotheſi ſemper eſt manendum. Siquis autem finxiſſet minorem radicem, in ſuperiori collatione, æqualem nihilo, affigere nunc deberet quantitati radicali ſignum negativum & idem inveniret.

(*e*) Eſt quidem etiam $y = +$ Gq: ſed quoniam hoc non conducit ad definiendum valorem ipſius f, ideo negligitur.

(*f*) Duc AF ipſi BD parallelam & æqualem, & CH parallelam FA; & habebis AG (c) . GF (GD $-$ DF $=$ GD $-$ BA $= d - a$) :: CG (k) . GH $= \frac{dk - ak}{c}$, & proinde HD $= \frac{cd + dk - ak}{c}$; igitur ſi fiat GD (d). DK :: DK.DH, erit DK $= \sqrt{(\frac{cdd + ddk - adk}{c})}$; eſt autem $fk = d \pm \sqrt{(\frac{cdd + ddk - adk}{c})}$, atque ideo æquat aut GD $+$ DK (id eſt, 2GD $+$ GK) aut DG $-$ DK (hoc eſt, $-$GK). Pone GK $= n$; & erit fk, vel æqualis $2d + n$, vel $-n$: unde æquatio ad parabolam evadet,

vel $y = -\frac{a}{2} + \frac{2dx + nx}{k} \pm \sqrt{(\frac{aa}{4} + \frac{4bddx + 4bdnx + bnnx}{kk} - \frac{2adx - anx}{k})}$;

vel $y = -\frac{a}{2} - \frac{nx}{k} \pm \sqrt{(\frac{aa}{4} + \frac{bnnx}{kk} + \frac{anx}{k})}$;

quæ cum diverſæ ſint, indicant parabolas duas problemati ſatisfacere.

Primam ut conſtruas, pone MD æqualem DG. Ex K age KL parallelam & æqualem datæ CG. Junge ML, cui parallelam duc EI occurrentem MK productæ in I. Cetera, ut in Auctore. Secundæ autem conſtructionem dat Auctor ipſe. Tab. U, Fig. 4.

vento autem f, æquatio ad parabolam, id eſt $y = -\frac{1}{2}a + fx \pm \sqrt{(\frac{1}{4}aa + ffbx - fax)}$, plene determinatur: cujus itaque conſtructione parabola etiam determinabitur. Conſtructio autem ejus hujuſmodi eſt. Ipſi BD parallelam age CH occurrentem DG in H. Inter DG ac DH cape mediam proportionalem DK, & ipſi CK parallelam age EI biſecantem AB in E, & occurrentem DG in I. Dein produc IE ad V, ut ſit EV . EI :: EBq . DIq − EBq, & erit V vertex (g), VE diameter, & $\frac{BEq}{VE}$ latus rectum parabolæ quæſitæ. (b)

PROB.

(g) Eſt enim VI ad VE ut quadratum DI ad quadratum BE, & dividendo, &c.

Tab. U. Fig. 5.6. Verticem autem ſic expedite invenies. Super DI diametro deſcribe ſemicirculum ILD, cui inſcribe chordam DN æqualem BE, junge IN, & ex N demitte NR ad rectos angulos ſupra DI. Junge RE, & age parallelam DV. Dico factum.

Eſt enim VI ad VE ut DI ad DR ut quadratum ID ad quadratum DN vel EB.

(b) Quia nempe rectangulum lateris recti in abſciſſam æquat quadratum ordinatæ.

Una autem erit parabola quæſito reſpondens, cum unus erit valor ipſius f; nempe cum aut nulla erit horum valorum differentia $2\sqrt{\frac{cdd + ddk - adk}{ckk}}$, aut cum f evaneſcit. Si primum; fiet $cd + dk = ak$, vel $c + k$ (AG + GC = b) . k (GC = $b - c$) :: a (AB, . d (GD), aut CA . AB :: CG . GD, quod, quoniam anguli CAB, CGD ſunt æquales) fieri nequit, niſi quando puncta B, D, C ſunt in eadem recta; tunc autem res erit ſemper impoſſibilis, quia parabola rectæ occurrere nequit in tribus punctis. Oportet ergo ut valor ipſius f ſit nullus, id eſt, ut $\frac{d}{k} = \sqrt{\frac{cdd + ddk - adk}{ckk}}$, aut $\frac{dd}{kk} = \frac{cdd + ddk - adk}{ckk}$, & denique $a = d$, ſive rectæ AC, BD parallelæ.

Hæc eleganter quidem Newtonus: ſed facile poterat hoc per præcedens problema ſolvi.

Tab. U. Fig. 7. Jungantur tria quævis puncta B, A, C; e quarto D fiant anguli DBM = CBA, & DAP = CAB. Super chorda AB deſcribatur arcus capax complementi datorum angulorum ad quatuor rectos, ad quem ex P ducantur tangentes EP, PF. Jam demonſtratum eſt angulos hos deſcripturos parabolam, quæ tranſibit per D, B, A tria ex datis punctis, ut & per quartum C, cum latera AB, BD venient ambo in ABK.

Eodem pacto invenietur ellipſis & hyperbola tranſiens per data quatuor puncta.

Ellipſis, quidem, ducta ex P aliqua Pe extra circulum.

Hyperbola vero, ducta aliqua Pe ſecante circulum. Et quia infinitæ Pe, Pe duci poſſunt, liquet quod infinitæ ellipſes aut hyperbolæ problemati ſatisfaciunt.

Idem Analyſi Geometrica.

Puta factum, & data quatuor puncta C, A, B, D. Sit parabola per illa tranſiens AOVD: ita junge bina puncta ut rectæ jungentes AD, CB alicubi ſe interſecent in G; & ſint VI diameter pertinens ad ordinatam AD & LM diameter pertinens ad ordinatam BC. Hæ duæ diametri ſunt parallelæ. Per L agatur recta LE parabolam tangens; hæc erit parallela ipſi BC, & occurret IV productæ alicubi in E. Ex L demitte LK parallelam ipſi AD. Pariter per V age VF tangentem parabolæ & occurrentem ML productæ in F; & per V duc VN parallelam BC. Hæ duæ tangentes alicubi, in H, ſe decuſſabunt. Quia ELNV, VFLK ſunt parallelogramma, æquales ſunt EV, LN, & VK, FL; ſed KV æquat EV, ergo etiam FL & LN; & FH æquat HV, ac EH, HL. Eſt autem quadratum LK vel VF æquale rectangulo ex VK in ejus latus rectum π, & quadratum VN vel EL rectangulo Tab. X. Fig. 1.

gulo ex LN in ejus latus rectum ϖ; ergo hæc duo quadrata, vel quadrata VH, HE, ſunt ut ϖ & ϖ. Jam ex G age GO diametrum ſive parallelam VI, & OP ordinatam; erit quadratum OP par rectangulo PV in ϖ, & quadratum AI par rectangulo IV in ϖ, ac exceſſus hujus quadrati ſupra illud, nempe rectangulum AGD, æquale exceſſui rectangulorum, id eſt, rectangulo ex PI, ſeu OG, in ϖ. Eadem ratione, acta per O parallela ipſi CB, demonſtrabitur rectangulum BGC æquale rectangulo OG in ϖ. Igitur hæc duo rectangula ſunt ut ϖ & ϖ, ſeu, ut quadrata VH, HE; vel, acta AQ diametro, ut quadratum AG ad GQ quadratum. Dantur autem rectangula AGD, BGC; datur itaque eorum ratio (Dat. 1.) id eſt, quadratorum AG, GQ. At datur recta AG, ergo etiam GQ (Dat. 2.), & datum eſt punctum G in recta BC poſitione data; datur ideo etiam punctum Q, & recta AQ datur poſitione ut omnes ei parallelæ: quapropter duc BR ipſi AQ parallelam & datam poſitione ac magnitudine: biſeca datam AD in I; magnitudine quoque dabuntur AR, RD, AI. Eſt autem, ex demonſtratis, rectangulum ARD ad quadratum AI ut BR ad VI; igitur datur VI magnitudine. Quære tertiam poſt VI, IA, quæ erit latus rectum ϖ. & per V verticem, latere recto ϖ, diametro VI deſcribe parabolam, quæ tranſibit per quatuor aſſignata puncta.

Demonſtrationem facile invenies, analyſeos veſtigia retro legens.

Notandum quod punctum Q ſumi poteſt verſus B, & tunc fuiſſent duæ parabolæ propoſito ſervientes.

Determinatio.

Tab. X. Fig. 2. Sed ſi alterutrum ex punctis Q, puta Q', caderet in C, una eſſet parabola ſolvens problema; illa nempe, cujus diameter eſt AQ'; nam illa, cujus diameter eſt AQ'; evaneſcit, quia tunc diameter occurrere debet parabolæ in duobus punctis A, C, quod eſt abſurdum. Tunc autem iterum parallelæ eſſent AC, BD. Igitur ſi & alterum punctum Q caderet in alterum ex datis punctis, problema eſſet impoſſibile.

Aliter.

Tab. X. Fig. 3. 4. Factum ſit, & jungantur data quatuor puncta C, A, B, D, duabus rectis alicubi convenientibus in G, aut extra, aut intra parabolam. Per A ducatur AH parallela ipſi BD, ac per puncta A, C, H, diametri AE, CF, HK.

Patet quod ſi daretur punctum F, problema eſſet ſolutum; tunc enim daretur poſitione & magnitudine recta CF; quare & diametri parabolæ darentur poſitione; & quia recta BD datur magnitudine, datur etiam punctum I eam biſecans, quapropter poſitione datur diameter IV, ſed etiam magnitudine; quoniam rectangulum (quod tunc datum eſſet) DFB ad quadratum datum DI, ut data recta FC ad IV. Daretur ergo parabolæ vertex & diameter, ſed & latus rectum; eſt enim tertia poſt duas datas VI, ID. Superest igitur inveſtigandum punctum F.

Jam rectangulum BFD eſt ad rectangulum BED ut CF ad AE, vel ut FG ad GE. Sed rectangulum BFD una cum quadrato IF æquat quadratum ID, nempe rectangulum BKD una cum quadrato KI; & quadratum KI par eſt rectangulo EFK & quadrato IF ſimul; igitur, demto hinc inde communi, rectangulum BFD æquat rectangula EFK & BKD, vel BED (ſunt enim æquales BI, ID, & EI, IK.) Igitur rectangula BED & EFK, ſimul, ad rectangulum BED ut FG ad GE, & BED ac EFK ſimul ad EFK ut GF ad FE ut GFK ad EFK; ſunt igitur æqualia rectangula BED ac EFK ſimul, ſeu BFD, & GFK; quare GF ad FB ut DF ad FK, atque FG ad GB ut FD ad DK vel BE: igitur (addendo antecedentes antecedentibus, & conſequentes conſequentibus) DG ad GE ut FG ad GB, & rectangulum DGB æquat rectangulum EGF. Datur autem rectangulum DGB; quo circa & rectangulum EGF datur magnitudine: ſed EG ad GF eandem habet rationem ac data AG ad datam GC; ideoque rectangulum EGF ſpecie datur, & latera EG, GF: dantur magnitudine (dat. 55.); quare, cum detur punctum G & recta GD poſitione, dantur puncta E & F. Quod inveniendum ſupererat.

Compoſitio fiet deſcribendo rectangulum æquale dato BGD & ſimile dato AGC per 25. VI. Elem. & ſumendo GE, GF æqualia lateribus rectanguli ſic deſcripti.

Quia vero e G verſus D & verſus partes contrarias ſumi poſſunt GE & GF; duæ ſunt parabolæ Tab. X. Fig. 5.
propoſito ſatisfacientes; niſi cum alterum punctum F cadit in D: quod ſi accideret, eſſet rectangulum DGB æquale rectangulo DGE, ergo GE Tab. X. Fig. 6. 7.
= GB: factum autem eſt rectangulum FGE, id eſt, nunc DGB, ſimile rectangulo, CAG; igitur DG

Digitized by Google

PROB. LIX.

Conicam ſectionem per data quinque puncta deſcribere.

TAB. VII Fig. 3. Sint puncta iſta A, B, C, D, E. Junge AC, BE ſe mutuo ſecantes in H. Age DI parallelam BE, & occurrentem AC in I. Item EK parallelam AC, & occurrentem DI productæ in K. Produc ID ad F, & EK ad G; ut ſit AHC ad BHE :: AIC ad FID :: EKG ad FKD, & erunt puncta F ac G in conica ſectione, ut notum eſt *(i)*. Hoc tamen obſervare debebis, quod ſi punctum H cadit inter puncta omnia A, C & B, E, vel extra ea omnia, punctum I cadere debebit vel inter puncta omnia A, C & F, D, vel extra ea omnia; & punctum K inter omnia D, F & E, G, vel extra ea omnia. At ſi punctum H cadit inter duo puncta A, C, & extra alia duo B, E, vel inter illa duo B, E, & extra altera duo A, C, debebit punctum I cadere inter duo punctorum A, C & F, D; & extra alia duo eorum; & ſimiliter punctum K debebit cadere inter duo punctorum D, F & E, G, & extra alia duo eorum; id quod fiet capiendo IF, KG, ad hanc vel illam partem punctorum I, K, pro exigentia problematis. Inventis punctis F ac G, biſeca AC, EG in N & O; item BE, FD in L & M. Junge NO, LM ſe mutuo ſecantes in R; & erunt LM & NO diametri conicæ ſectionis, R centrum ejus, & BL, FM ordinatim applicatæ ad diametrum DM *(k)*. Produc LM hinc inde ſi opus eſt ad P & Q ita ut ſit BL*q*. FM*q* :: PLQ. PMQ, & erunt P & Q vertices conicæ ſectionis & PQ latus transverſum. Fac PLQ. LB*q* :: PQ. T. Et erit T latus rectum. Quibus cognitis cognoſcitur figura.

Reſtat tantum ut doceamus quomodo LM hinc inde producenda ſit ad P & Q ita ut fiat BL*q*. FM*q* :: PLQ. PMQ. Nempe PLQ ſive PL. LQ eſt (PR — LR) (PR + LR), nam PL eſt PR — LR, & LQ eſt RQ + LR ſeu PR + LR. Porro (PR — LR) (PR + LR) multiplicando fit PR*q*.

ad IC ut EG ad GA; & CD; AB rurſus ſunt parallelæ, & parabola ſatisfaciens problemati ea eſſet, cujus diameter biſecaret ordinatas AB, CD, &c.

(*i*) Puncta F ac G ſic inveniri poſſunt.

TAB. X. Fig. 8. Per tria data puncta A, B, C, tranſeat circulus ABCR. Eſt AH. HC = BH. HR; quare AH. HC ad BH. HE :: RH ad HE, quod debet eſſe :: AI. IC ad DI. IF :: $\frac{AI.IC}{DI}$ ad IF; ergo inveni IS = $\frac{AI.IC}{DI}$ (junctis DC, & ducta AS ipſi DC parallela) & junge RI, RS, atque huic parallelam duc VF; & erit punctum F quæſitum, quia RH ad HE :: RI ad IV :: SI ad IF, reſtat faciendum :: KG ad $\frac{FK.KD}{EK}$; quod eodem pacto facile fiet.

Auctoris vero monitum pendet a propoſ. cui ſolutio innititur.

(*k*) Nam EB & FD ut & EG; AI; ſunt ordinatæ parallelæ, quæ a diametris biſecari debent. Omnes autem diametri aut ſunt parallelæ aut per centrum tranſeunt. Unde interſectio duarum diametrorum licet non conjugatarum exhibet centrum. Si ML, ON parallelæ ſint, ſectio erit parabola cujus vertex V, & parameter invenietur ut in Probl. ſuperiori.

Si hæ diametri ſe decuſſant, ſectio erit hyperbola aut ellipſis.

Digitized by Google

$PRq - LRq$. Et ad eundem modum PMQ eſt $(PR+RM)(PR-RM)$, ſeu $PRq - RMq$. Ergo $BLq . FMq :: PRq - LRq . PRq - RMq$, & dividendo $BLq - FMq . FMq :: RMq - LRq . PRq - RMq$. Quamobrem cum dentur $BLq - FMq$, FMq, & $RMq - LRq$ dabitur $PRq - RMq$. Adde datum RMq, & dabitur ſumma PRq, adeoque & latus ejus PR (*l*), cui QR æqualis eſt.

(*l*) Recta autem PR invenitur more ſolito per circulos & rectas.

Tab. Y. Fig. 1. Ex. gr. diametro BL deſcribatur ſemicirculus BL*m*, ſit chorda $Lm = FM$. Erit $Bm^2 = BL^2 - FM^2$; fiat $Lm = mQ$. Sit $BT = RM$; deſcribatur alter ſemicirculus BTX; & ſit chorda $TX = LR$; & erit $XB^2 = RM^2 - LR^2$. Jungatur *m*X; cui parallela ducatur QZ; & habebitur $Bm\ (\sqrt{BL^2 - FM^2}) . mQ\ (FM) :: BX\ (\sqrt{RM^2 - LR^2}) . XZ$, quæ proinde æquabit $\sqrt{PR^2 - RM^2}$. Sume $XY = RM$, & erit $ZY = PR$. Eodem pacto invenitur altera ſectionis diameter.

Cum duæ diametri datæ ſint magnitudine & poſitione, patet quod una tantum ſectio problemati ſatisfaciet.

Poterant aliter inveniri puncta P & Q. Sed opus eſt his duobus lemmatibus.

Tab. Y. Fig. 2. *Si inter duas parallelas AB, CD incidat quomodocumque recta OF, a cujus punctis duobus quibuſvis agantur aliæ rectæ EH, LI, parallelis occurrentes in P & K, erit rectangulum ENL ad rectangulum LME ut HNK rectangulum ad rectangulum PMI.*

Nam ratio rectanguli ENL ad rectangulum EML componitur ex ratione NE ad EM & & NL ad LM. Sed ratio NE ad EM eadem eſt ac ratio NH ad MP; ratio autem NL ad LM eadem eſt ac ratio NK ad MI; & ex rationibus NH ad NK, ac PM ad MI componitur ratio rectangulorum HNK, GMI. &c.

Tab. Y. Fig. 3. *Si datum ſit rectangulum utrumque ACB, ADB, & data puncta C, D, invenire puncta A, B.*

Rectangulo ACB æquale fiat rectangulum DCE; quod quoniam datum eſt magnitudine & datum eſt latus DC, dabitur latus CE & punctum E. Erit autem BC ad CD ut EC ad CA: ſed BC major eſt CD, ex hypoth. ergo CE major eſt CA; quare *dividendo* CB ad BD ut CE ad EA.

Item rectangulo ADB fiat æquale CDF, & datum erit punctum F. Sed eſt CD ad DB ut AD ad DF; ergo etiam CB ad BD ut AF ad FD. Atqui demonſtratum eſt, ut CB ad BD ita etiam CE ad EA: igitur AF ad FD ut CE ad EA, & rectangulum FAE æquat rectangulum ex FD in CE; ſed hoc datur, & illud applicatum eſt rectæ datæ FE, ita ut deficiat quadrato; datur ergo recta EA & punctum A. Jam dabatur rectangulum ACB & datur latus unum AC, ergo & alterum CB.

Compoſitio manifeſta eſt.

Nunc ex A duc AS parallelam diametro Tab. Y. Fig. 4. jam deſcriptæ PQ: & in ea determina punctum S ad ſectionem. Junge FC occurrentem AS in T, & PQ in M, ac CS occurrentem PQ in K; & per data puncta F, K, age rectam FA occurrentem PQ in V. Et quoniam inter duas parallelas AS, PQ incidit recta FC, a qua ductæ duæ parallelis occurrentes FV, CS; erunt rectangula FMC, FTC ut rectangula KMV, STA. Sed quia puncta A, F, S, Q, C, P, ſunt ad ſectionem conicam, & AS, PQ parallelæ, rectangula eadem FMC, FTC ſunt ut rectangula QMP, STA. Igitur æqualia ſunt KMV, QMP; hoc autem datum eſt, ergo & illud magnitudine datur.

Eodem modo per A & E age rectam AE occurrentem PQ in β, & per B & S rectam BS occurrentem PQ in γ, & demonſtrabis rectangulum QLP æquale $\beta L\gamma$, & hoc datum eſt, ergo & illud; dantur autem duo puncta M & L; ergo, per lemma II, dantur etiam puncta Q & P. *Quod E. I.*

Item poterat hoc problema ſolvi per Tab. Y. Fig. 5. Probl. LVII. Junctis enim tribus quibuſvis punctis A, E, C. ut & A, B, E, ac A, D, E; fac angulum $BAF = DAG =$ dato CAE; item angulum $BEF = DEH =$ dato CEA. Produc HE in G, donec ipſi AG occurrat: duc rectam GF occurrentem ipſi AE in M; anguli dati MAC, MEC gyrantes circa polos A, E & per rectam GM circumducti deſcribunt conicam ſectionem per data quinque puncta tranſeuntem, ut liquet.

Digitized by Google

PROB. LX.

Conicam ſectionem deſcribere quæ tranſibit per quatuor data puncta, & in uno iſtorum punctorum continget rectam poſitione datam.

Tab. VIII. Fig. 4.

Sint puncta quatuor data A, B, C, D, & recta poſitione data AE, quam conica ſectio contingat in puncto A. Junge duo quævis puncta D, C, & DC, producta ſi opus eſt, occurrat tangenti in E. Per quartum punctum B ipſi DC age parallelam BF, quæ occurrat eidem tangenti in F. Item tangenti parallelam age DI, quæ occurrat ipſi BF in I. In FB, DI, ſi opus eſt productis, cape FG, HI ejus longitudinis ut ſit $AEq . CED :: AFq . BFG :: DIH . BIG$. Et erunt puncta G & H in conica ſectione, ut notum eſt: ſi modo capias FG, IH ad legitimas partes punctorum F & I, juxta regulam in ſuperiore problemate traditam. Biſeca BG, DC, DH in K, L & M. Junge KL, AM ſe mutuo ſecantes in O, & erit O centrum, A vertex, & HM ordinatim applicata ad ſemidiametrum AO. Quibus cognitis cognoſcitur figura (*m*).

PROB. LXI.

Conicam ſectionem deſcribere quæ tranſibit per tria data puncta, & in duobus iſtorum punctorum continget rectas poſitione datas.

Tab. VIII. Fig. 5.

Sint puncta illa data A, B, C, tangentes AD, BD ad puncta A & B, D communis interſectio tangentium. Biſeca AB in E. Age DE, & produc eam donec in F occurrat CF actæ parallelæ AB: & erit DF diameter, & AE, CF ordinatim applicatæ ad diametrum. Produc DF ad O, & in DO cape OV mediam proportionalem inter DO & EO ea lege ut ſit etiam $AEq . CFq :: VE (VO + OE) . VF (VO + OF)$; & erit V vertex, & O centrum figuræ. Quibus cognitis figura ſimul cognoſcitur. Eſt autem $VE = VO - OE$, adeoque $VE (VO + OE) = (VO - OE)(VO + OE) = VOq - OEq$. Præterea, quia VO media proportionalis eſt inter DO & EO, erit $VOq = DOE$, adeoque $VOq - OEq = DOE - OFq = DEO$. Et ſimili argumento erit $VF (VO + OF) = VOq - OFq = DOE - OFq$. Ergo $AEq . CFq :: DEO . DOE - OFq$. Eſt $OFq = EOq - 2FEO + FEq$ (*n*). Adeoque $DOE - OFq =$ DOE

Tab. Y. Fig. 6.

(*m*) Nulla hic eſt difficultas; ſed interim per Probl. LVII. hoc ſolvam. Junge DC, CB, donec rectæ DC, CB occurrant datis FA, AG in F & G: per quæ puncta duc rectam indefinitam FG, quacum perpetuo concurrant recta GB & crus anguli GAB; ſic deſcribetur ſectio conica tranſiens per puncta B, A, D, C & rectam AE tangens in A.

(*n*) Eſt enim EO diviſa in F; ergo EO quadratum æquale quadratis EF, FO una cum bis rectangulo EFO; igitur OF quadratum æquat exceſſum quadrati EO ſupra quadratum EF cum bis rectangulo EFO; ſed bis rectangulum EFO una cum bis quadrato EF æquat bis rectangulum OEF; igitur quadratum OF æquat exceſſum quadratorum OE, EF ſupra bis rectangulum OEF, aut $OFq = OEq + EFq - 2OEF$.

$DOE - OEq + 2FEO - FEq = DEO + 2FEO - FEq$. Et $AEq . CFq :: DEO . DEO + 2FEO - FEq :: DE . DE + 2FE - \frac{FEq}{EO}$.

Datur ergo $DE + 2FE - \frac{FEq}{EO}$. Aufer hoc de dato $DE + 2FE$, & reſtabit $\frac{FEq}{EO}$ datum. Sit illud N; & erit $\frac{FEq}{N} = EO$, adeoque dabitur EO. Dato autem EO ſimul datur VO medium proportionale inter DO & EO.

Hoc modo per theoremata quædam Apollonii (*o*) ſatis expedite reſolvuntur hæc problemata: quæ tamen ſine iſtis theorematibus per Algebram ſolam reſolvi poſſent. Ut ſi proponatur primum trium noviſſimorum problematum; ſint puncta quinque data A, B, C, D, E, per quæ conica ſectio tranſire debet. Junge duo quævis AC, & alia duo BE rectis ſe ſecantibus in H. Ipſi BE parallelam age DI occurrentem AC in I; ut & aliam quamvis rectam KL occurrentem AC in K, & conicæ ſectioni in L. Et finge conicam ſectionem datam eſſe, ita ut cognito puncto K ſimul cognoſcatur punctum L. Et poſito $AC = x$, & $KL = y$, ad exprimendam relationem inter x & y, aſſume quamvis æquationem quæ conicas Tab. VIII. Fig. 6.

(*o*) Quoniam Apollonii theorematibus uti vult Auctor, multo facilius poterat centrum inveniri. Per datum punctum C duc ipſi AD parallelam CG, quæ occurrat DB in G, & ſectioni in I; erit igitur per demonſtrata in conicis, rectangulum CGI ad quadratum GB ut quadratum AD ad quadratum DB; dantur autem tria hæc quadrata, & inſuper recta CG; datur ergo recta GI, & punctum I. Quapropter ordinata eſt IC; eam biſeca, & per puncta contactus & biſectionis age rectam, quæ aut ſuo cum DF concurſu dabit centrum; aut ei parallela erit.

Si primum ſectio erit ellipſis, ſi centrum cadit intra angulum ADB, hyperbola vero, ſi cadit extra; & tunc ſemper, dato EO, ut ait Newtonus, ſimul datur VO medium proportionale inter DO & EO.

Si ſecundum, ſectio erit parabola, & biſecta ED dat V verticem. Hoc enim problema diverſimode proponi poteſt. Siquidem fieri poteſt, ut ſciamus AD, DB eſſe tangentes nunc parabolæ, nunc hyperbolæ, nunc ellipſeos per C tranſeuntis, & deſcribenda ſit certa curva; & fieri poteſt ut datis tangentibus & punctis, proponatur invenire quænam ſectio problemati ſatisfaciat, & eam deſcribere. Nos ſolvimus problema ſecundo modo propoſitum, quia difficilius eſt, & ſolutum exhibet ſolutionem alterius.

Ceterum punctum I facile determinatur. Occurrat enim recta CG rectæ AB in K; & erit AD ad DB ut KG ad GB; ſeu quadrata AD, DB ut quadrata KG, GB; oſtenſum autem eſt in conicis ut quadrata AD, DB ita eſſe rectangulum CGI ad quadratum GB; ergo quadratum datum KG æquat rectangulum CGI; igitur CG ad GK ut KG ad GI: dantur autem CG; GK; quare datur etiam GI.

Poterat etiam per C agi *ki* parallela alteri tangenti, & ſic definiri punctum *i* quintum ad ſectionem, quæ deſcripta circa hæc quinque puncta, tanget rectas AD, DB.

Sed & hoc per Probl. LVII. ſolvi poteſt.

Jungantur puncta B; A; C; fiat angulus CAG æqualis KAB; & per CB agatur recta CB ipſi AG occurrens in G, fiat nunc angulus BAF æqualis BAK; producatur FA, donec ipſi DB occurrat in L: per data puncta G, L agatur recta indefinita GL; recta GB; & angulus GAC circa puncta A; G; gyrantes, concurſu ſuo peragrantes rectam GL deſcribent ſectionem conicam requiſitam. Tab. Y. Fig. 7.

Digitized by Google

nicas ſectiones generaliter exprimit, puta hanc $a + bx + cxx + dy + exy + yy = 0$, ubi a, b, c, d, e denotant quantitates determinatas cum ſignis ſuis, x vero & y quantitates indeterminatas. Si jam quantitates determinatas a, b, c, d, e invenire poſſumus, habebimus conicam ſectionem. Fingamus ergo punctum L ſucceſſive incidere in puncta A, C, B, E, D, & videamus qui inde ſequetur. Si ergo punctum L incidit in punctum A, erit in eo caſu AK & KL, hoc eſt x & y, nihil. Proinde æquationis omnes termini præter a evaneſcent, & reſtabit $a = 0$. Quare delendum eſt a in æquatione illa, & ceteri termini

$$bx + cxx + dy + exy + yy \text{ erunt } = 0.$$

Porro ſi L incidit in C, erit AK ſeu $x = AC$, & LK ſeu $y = 0$. Pone ergo $AC = f$, & ſubſtituendo f pro x, & 0 pro y; æquatio ad curvam.

$$bx + cxx + dy + exy + yy = 0,$$

evadet

$$bf + cff = 0, \text{ ſeu } b = -cf.$$

Et in æquatione illa ſcripto $-cf$ pro b evadet

$$-cfx + cxx + dy + exy + yy = 0.$$

Adhæc ſi punctum L incidit in punctum B, erit AK ſeu $x = AH$, & CL ſeu $y = BH$. Pone ergo $AH = g$ & $BH = h$, & perinde ſcribe g pro x & h pro y, & æquatio

$$-cfx + cxx, \text{ \&c.}$$

evadet

$$-cfg + cgg + dh + egh + hh = 0.$$

Quod ſi punctum L incidit in E, erit $AK = AH$ ſeu $x = g$, & KL ſeu $y = HE$. Pro HE. ergo ſcribe $-k$ cum ſigno negativo quia HE jacet ad contrarias partes lineæ AC, & ſubſtituendo g pro x & $-k$ pro y, æquatio

$$-cfx + cxx, \text{ \&c.}$$

evadet

$$-cfg + cgg - dk - egk + kk = 0.$$

Aufer hoc de ſuperiori æquatione

$$-cfg + cgg + dh + egh + hh,$$

&

& reſtabit

$$db + egh + hh + dk + egk - kk = 0.$$

Divide hoc per $h + k$, & fiet $d + eg + h - k = 0$.

Hoc ductum in h aufer de

$$-efg + egg + dh + egh + hh = 0,$$

& reſtabit

$$-efg + egg + hk = 0, \text{ ſeu } \frac{hk}{-gg + fg} = e.$$

Denique ſi punctum L incidit in punctum D, erit AK ſeu $x =$ AI, & KL ſeu $y =$ ID. Quare pro AI ſcribe m & pro ID n, & perinde pro x & y ſubſtitue m & n, & æquatio

$$-efx + exx, \text{ \&c.}$$

evadet

$$-efm + emm + dn + emn + nn = 0.$$

Hoc divide per n & fiet

$$\frac{-efm + emm}{n} + d + em + n = 0.$$

Aufer $d + eg + h - k = 0$,

& reſtabit

$$\frac{-efm + emm}{n} + em - eg + n - h + k = 0.$$

Sive

$$\frac{emm - efm}{n} + n - h + k = eg - em.$$

Jam vero ob data puncta A, B, C, D, E dantur AC, AH, AI, BH, EH, DI, hoc eſt f, g, m, h, k, n. Atque adeo per æquationem $\frac{hk}{fg - gg} = e$ datur e. Dato autem e, per æquationem

$$\frac{emm - efm}{n} + n - b + k = eg - em$$

datur $eg - em$. Divide hoc datum per datum $g - m$, & emerget datum e. Quibus inventis, æquatio $d + eg + b - k = 0$, ſeu $d = k - b - eg$ dabit d. Et his cognitis, ſimul determinatur æquatio ad quæſitam conicam ſectionem

$$cfx = cxx + dy + exy + yy.$$

Et ex ea æquatione per methodum Carteſii determinabitur conica ſectio.

Quod ſi quatuor puncta A, B, C, E, & poſitio rectæ AF quæ tangit conicam ſectionem ad unum iſtorum punctorum A, daretur, poſſet conica ſectio ſic facilius determinari. Inventis ut ſupra æquationibus

$$cfx = cxx + dy + exy + yy,$$

$$d = k - b - eg,$$

&

$$e = \frac{bk}{fg - gg},$$

concipe tangentem AF occurrere rectæ EH in F, dein punctum L moveri per perimetrum figuræ CDE donec incidat in punctum A: & ultima ratio ipſius LK ad AK erit ratio FH ad AH, ut contemplanti figuram conſtare poteſt (p). Dic vero FH $= p$, & in hoc caſu ubi LK eſt ad AK in ultima ratione, erit $p \,.\, g :: y,\, x$, ſive $\frac{gy}{p} = x$. Quare pro x in æquatione

$$cfx = cxx + dy + exy + yy,$$

ſcribe $\frac{gy}{p}$, & orietur

$$\frac{cfgy}{p} = \frac{cggyy}{pp} + dy + \frac{egyy}{p} + yy.$$

Divide omnia per y, & emerget

cfg

(p) Ubicunque cadat recta LK, ſi producatur in l, ſimilia ſemper erunt triangula lAK, FAH, unde ſemper lK . KA :: FH . HA; quæ ratio, cum ſemper eadem ſit, manebit etiam, ubi lK tam prope AL eſt, ut fere cum ea coincidat, ſive, ut triangulum lKA evaneſcat; tunc vero coincident puncta K, L, A, quæ ratio dicitur ultima.

Digitized by Google

$$\frac{cfg}{p} = \frac{eggy}{pp} + d + \frac{egy}{p} + y.$$

Jam, quia ſupponitur punctum L incidere in punctum A, adeoque KL, ſeu y, infinite parvum vel nihil eſſe, dele terminos qui per y multiplicantur, & reſtabit $\frac{cfg}{p} = d$. Quare fac $\frac{bk}{fg - gg} = c$ dein $\frac{cfg}{p} = d$, denique $\frac{k - b - d}{g} = e$, & inventis c, d & e, æquatio

$$cfx = cxx + dy + exy + yy$$

determinabit conicam ſectionem.

Si denique tria tantum puncta A, B, B dentur, una cum poſitione duarum rectarum AT, CT, quæ tangunt conicam ſectionem in duobus iſtorum punctorum A & C, obtinebitur ut ſupra ad conicam ſectionem æquatio hæc Tab. VIII. Fig. 7.

$$cfx = cxx + dy + exy + yy.$$

Deinde ſi ſupponatur ordinatam KL parallelam eſſe tangenti AT, & concipiatur eam produci donec rurſus occurrat conicæ ſectioni in M, & lineam illam LM accedere ad tangentem AT donec cum ea conveniat ad A; ultima ratio linearum KL & KM ad invicem erit ratio æqualitatis, ut contemplanti figuram conſtare poteſt. Quamobrem in illo caſu exiſtentibus KL & KM, ſibi invicem æqualibus, hoc eſt duobus valoribus ipſ y (affirmativo ſcilicet KL, & negativo KM) æqualibus, debent æquationis

$$cfx = cxx + dy + exy + yy$$

termini illi in quibus y eſt imparis dimenſionis, hoc eſt termini $+ dy + exy$ reſpectu termini yy in quo y eſt paris dimenſionis, evaneſcere (q). Aliter enim duo valores ipſius y, affimativus & negativus, æquales eſſe non poſſunt. Et in illo quidem caſu AK infinite minor erit quam LK, hoc eſt x quam y, proinde terminus exy quam terminus yy. Atque adeo infinite mi-

(q) Ex æquationum natura patebit in omni æquatione ſecundum terminum evaneſcere, ubi aggregatum en radicibus affirmativis æquat aggregatum ex radicibus negativis. Nobis autem ſufficit id demonſtrare in æquationibus quadraticis; in quibus duæ ſunt omnino radices, & ideo debent eſſe æquales, ut aggregatum ex poſitivis æquet aggregatum ex negativis. Sit igitur $x = a$, & $x = -a$; aut $x - a = 0$ & $x + a = 0$, Factum ex duabus hiſce quantitatibus eſt $xx - aa$, ubi ſecundus terminus ax non apparet; & quoniam hæc æquatio exponit omnes quadraticas habentes duas radices æquales, ſed alteram negativam, alteram poſitivam, patet propoſitum.

Digitized by Google

minor exiſtens, pro nihilo habendus erit. At terminus dy reſpectu termini yy, non evaneſcet ut oportet, ſed eo major erit niſi d ſupponatur eſſe nihil (*r*). Delendus eſt itaque terminus dy, & ſic reſtabit

$$cfx = cxx + cxy + yy,$$

æquatio ad conicam ſectionem. Concipiantur jam tangentes AT, CT ſibi mutuo occurrere in T, & punctum L accedere ad punctum C donec in illud incidat. Et ultima ratio ipſius KL ad KC erit AT ad AC. KL erat y; AK, x; & AC, f; atque adeo KC, $f - x$. Dic AT $= g$, & ultima ratio y ad $f - x$, erit ea quæ eſt g ad f. Æquatio

$$cfx = cxx + cxy + yy,$$

ſubducto utrobique cxx, fit

$$cfx - cxx = cxy + yy,$$

hoc eſt, $f - x$ in $cx = y$ in $cx + y$. Ergo eſt $y \,.\, f - x :: cx \,.\, cx + y$, adeoque $g \,.\, f :: cx \,.\, cx + y$. At puncto L incidente in C, fit y nihil (*s*). Er-

(*r*) Mens Auctoris non bene explicari poſſe videtur niſi e Fluxionum natura, quæ conſideratio loci hujus non eſt. Sed, opinor, res ipſa poteſt aliter explanari. Secundus terminus $dy + cxy$ debet evaneſcere. Igitur $d + cx = o$; ſed quia ex hypotheſi $x = o$, erit $d + o = o$ aut $d = o$.

(*s*) Licet hæc ſatis perſpicua videantur, tamen ſic quodammodo explicari poſſunt. Quia $f - x$ & y in nihilum evaneſcunt, eis præfigatur o, ut ſimul pateat illas quantitates in nihilum redactas eſſe, & noſci poſſit, unde quivis terminus ortus ſit; tunc ergo y evadet oy, & $f - x$ fiet $of - ox$; (non enim x evaneſcit, quinimo evadit quam maximus poteſt, ſed tota quantitas complexa $f - x$) eſt autem $oy \,.\, of - ox :: g \,.\, f$, igitur $oy = og - \frac{gox}{f}$,

quapropter

$$cfx - cxx = (f - x)\, cx$$

fit

$$(of - ox)\, cx;$$

&

$$cxy = cx \,.\, y = cx \,.\, oy = cx\left(og - \frac{gox}{f}\right);$$

ac

$$yy = oyoy = oogg - \frac{2ooggx}{f} + \frac{ggooxx}{ff};$$

unde habetur

$$(of - ox)\, cx = cx\left(og - \frac{gox}{f}\right)$$

$$+ oogg - \frac{2oggox}{f} + \frac{ggooxx}{ff}$$

& cunctis diviſis per o,

$$(f - x)\, cx = cx\left(g - \frac{gx}{f}\right) + ogg - \frac{2oggx}{f}$$

$$+ \frac{ggoxx}{ff};$$

atqui ultimi tres termini ducti in nihilum evaneſcant, dum alteri manent finiti, ergo

$$(f - x)\, cx = cx\left(g - \frac{gx}{f}\right);$$

&

Ergo $g \,.\, f :: ex \,.\, ex$. Divide poſteriorem rationem per x, & evadet $g \,.\, f :: e \,.\, e$, & $\frac{ef}{g} = e$. Quare ſi in æquatione

$$efx = exx + exy + yy,$$

ſcribas $\frac{ef}{g}$ pro e, fiet

$$efx = exx + \frac{ef}{g}xy + yy,$$

æquatio ad conicam ſectionem. Denique ipſi KL ſeu AT a dato puncto B, per quod conica ſectio tranſire debet, age parallelam BH occurrentem AC in H, & concipiendo LK accedere ad BH donec cum ea coincidat, in eo caſu erit AH $= x$, & BH $= y$. Dic ergo datam AH $= m$, & datam BH $= n$, & perinde pro x & y in æquatione

$$efx = exx + \frac{ef}{g}xy + yy,$$

ſcribe m & n, orietur

$$efm = emm + \frac{ef}{g}mn + nn.$$

Aufer utrobique $emm + \frac{ef}{g}mn$, & fiet

$$efm - emm - \frac{ef}{g}mn = nn.$$

Pone $f - m - \frac{fn}{g} = s$, & erit $esm = nn$. Divide utramque partem æquationis per sm, & orietur $e = \frac{nn}{sm}$. Invento autem e, determinata habetur æquatio ad conicam ſectionem

$$efx = exx + \frac{ef}{g}xy + yy.$$

Et

& cunctis diviſis per x, multiplicatiſque per f, $(f-x)\,ef = e\,(gf - gx) = e \,.\, g\,(f-x)$; quare $ef = ge$, & $\frac{ef}{g} = e$.

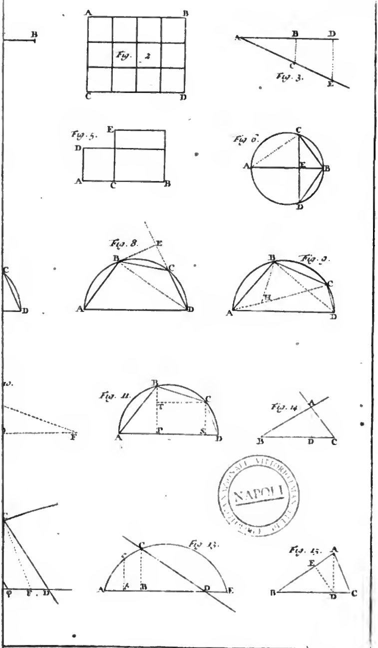
Et inde per methodum Carteſii conica ſectio datur & deſcribi poteſt.

Atque hactenus varia evolvi problemata. In ſcientiis enim addiſcendis proſunt exempla magis quam præcepta. Qua de cauſa in his fuſius expatiatus ſum. Sed & aliqua quæ inter ſcribendum occurrebant, immiſcui ſine Algebra ſoluta, ut inſinuarem in problematibus, quæ prima fronte difficilia videntur, non ſemper ad Algebram recurrendum eſſe. Sed tempus eſt jam æquationum reſolutionem docere. Nam poſtquam problema ad æquationem deductum eſt, radices illius æquationis, quæ quantitates ſunt problemati ſatisfacientes, extrahere oportebit.

FINIS TOMI I.

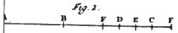
609433

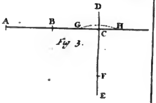
TAB. I.

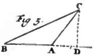


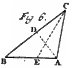
NAPOLI

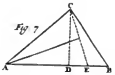
Digitized by Google

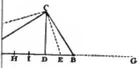


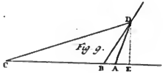


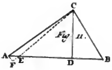


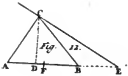


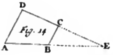


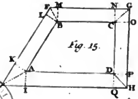








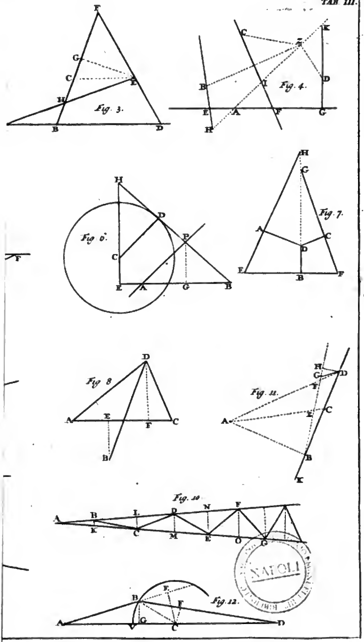




NAPOLI

Digitized by Google

TAB. III.

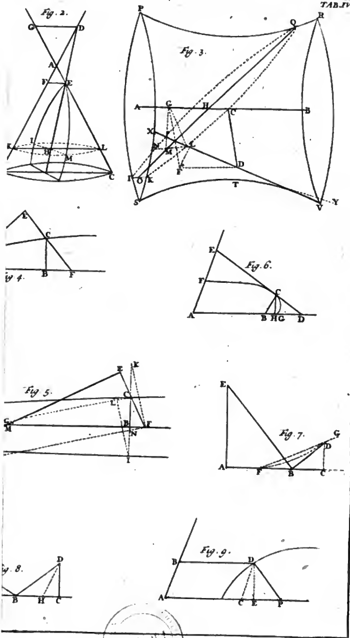


NAPOLI

Digitized by Google

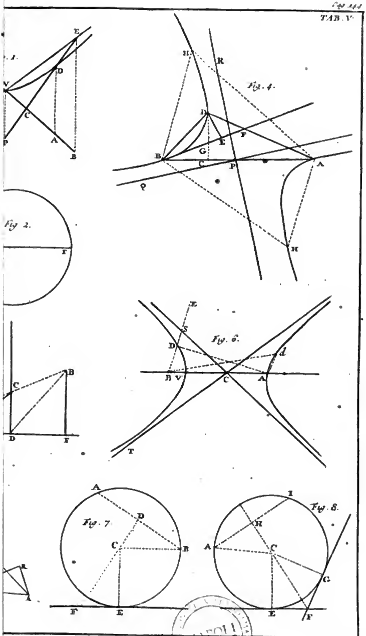
Digitized by Google

TAB. IV.



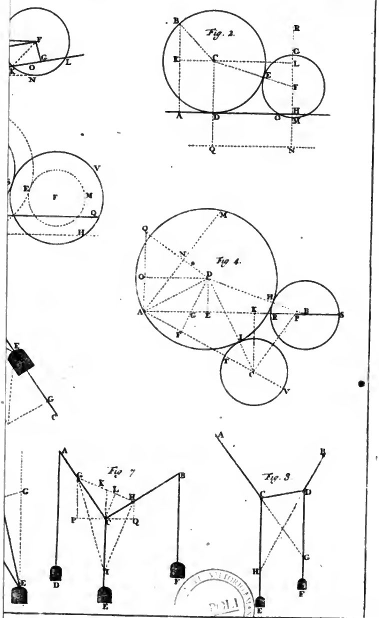
Digitized by Google

Digitized by Google



Digitized by Google

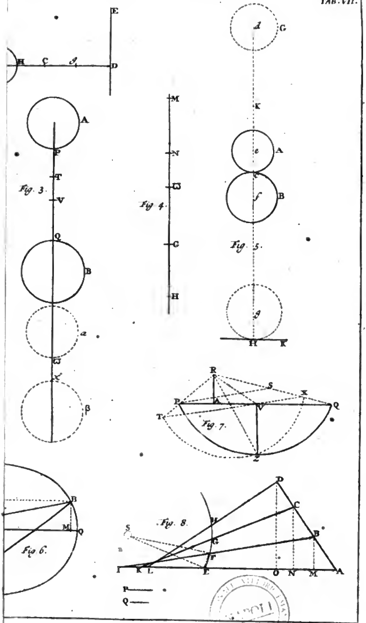
Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Google

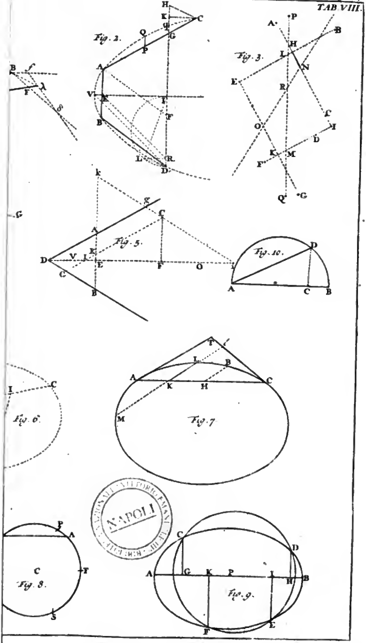
TAB. VII.



NAPOLI

Digitized by Google

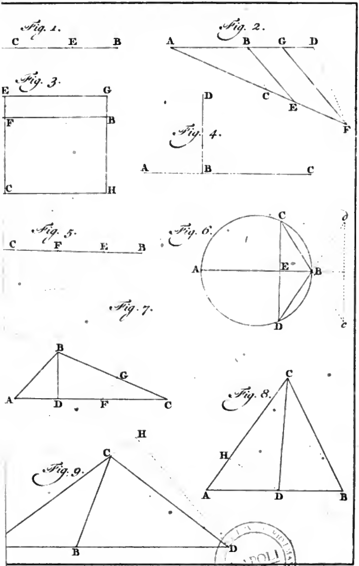
TAB VIII.



NAPOLI

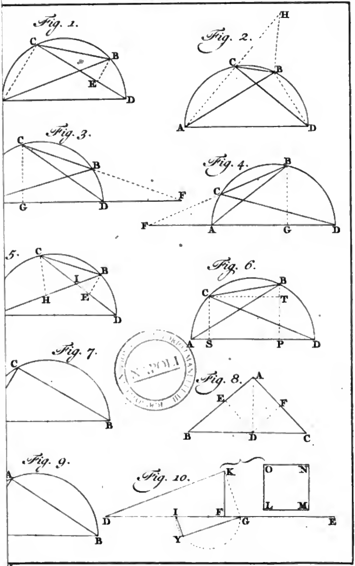
Digitized by Google

Tab. A.



Digitized by Google

Tab. B.

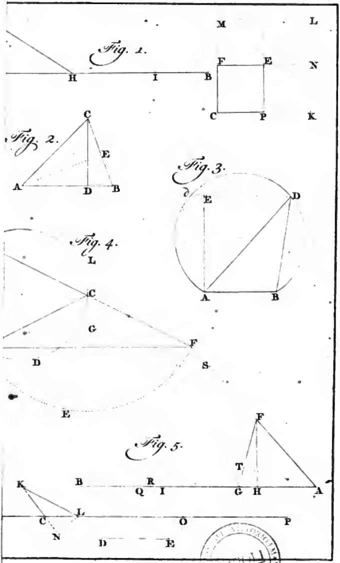


NAPOLI

Digitized by Google

Digitized by Google

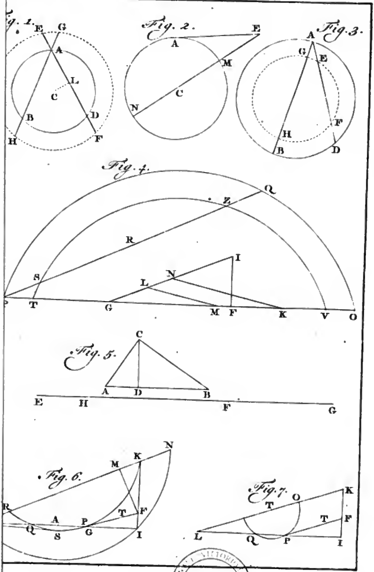
Tab. C.



Digitized by Google

Digitized by Google

Tab. D.

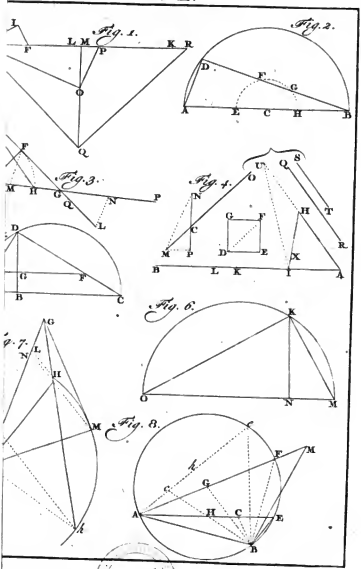


NAPOLI

Digitized by Google

Digitized by Google

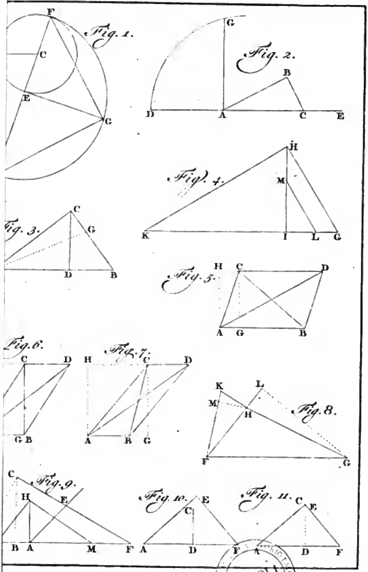
TAB. E.



Digitized by Google

Digitized by Google

TAB. F.

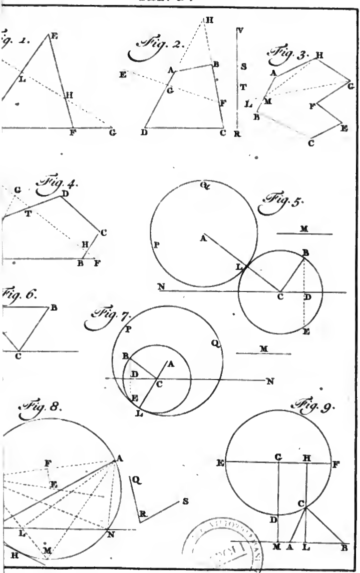


NAPOLI

Digitized by Google

Digitized by Google

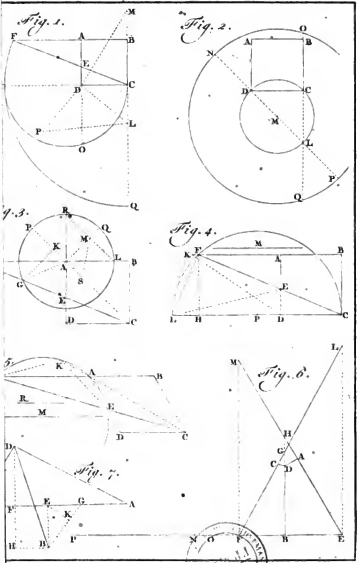
Tab. G.



Digitized by Google

Digitized by Google

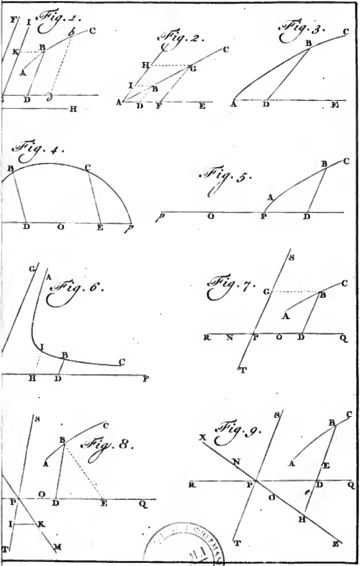
TAB. I.



Digitized by Google

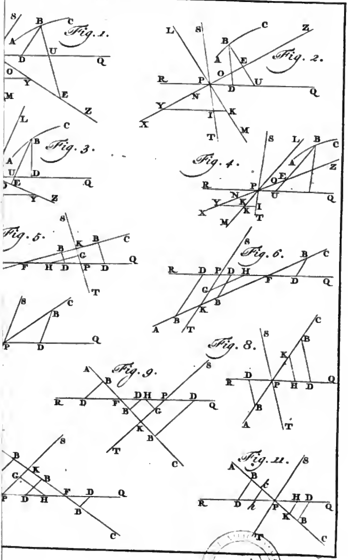
Digitized by Google

Tab. K.



Digitized by Google

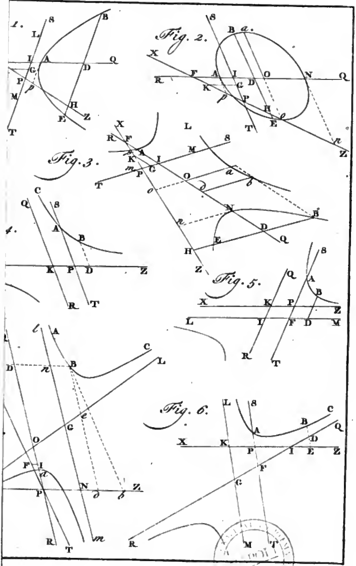
Tab. I.



Digitized by Google

Digitized by Google

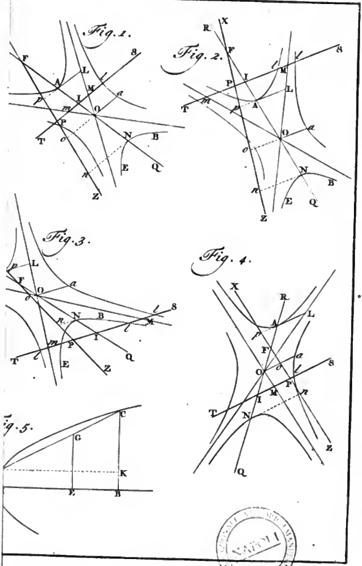
TAB. M.



Digitized by Google

Digitized by Google

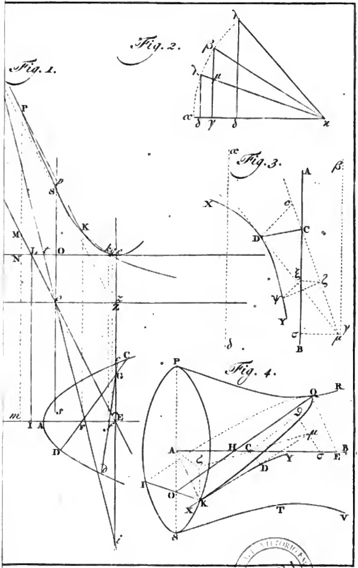
TAB. N.



Digitized by Google

Digitized by Google

TAB. O.



NAPOLI
Digitized by Google

TAB. P.

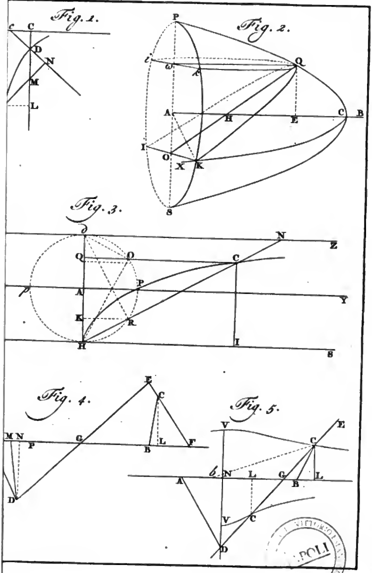
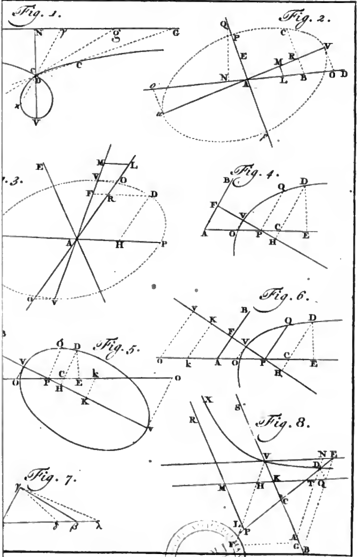


Fig. 1.
c C D N M L
Fig. 2.
P Q i ω A H E C B I O X K S
Fig. 3.
∂ N Z Q O C P A Y K R H I S
Fig. 4.
E C M N P G B L F D
Fig. 5.
V E C b. N L G B L A V C D

Digitized by Google

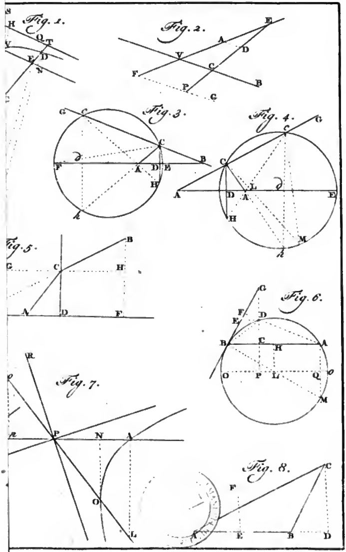
TAB. Q.



Digitized by Google

Digitized by Google

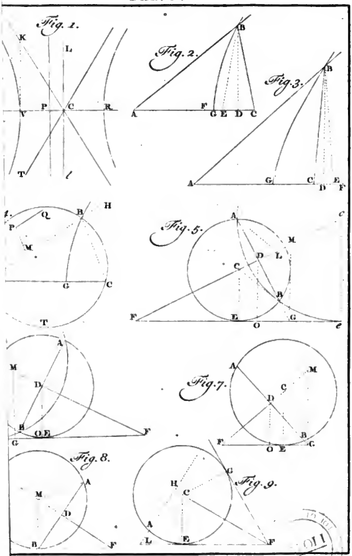
TAB. R.



Digitized by Google

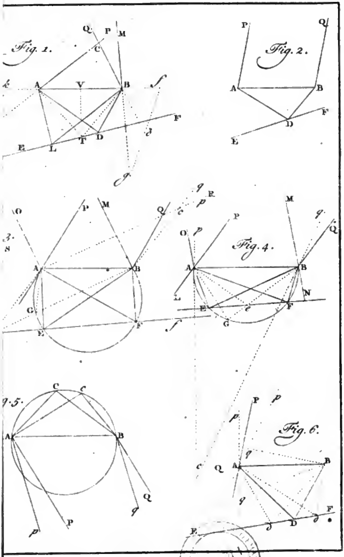
Digitized by Google

TAB. 8.



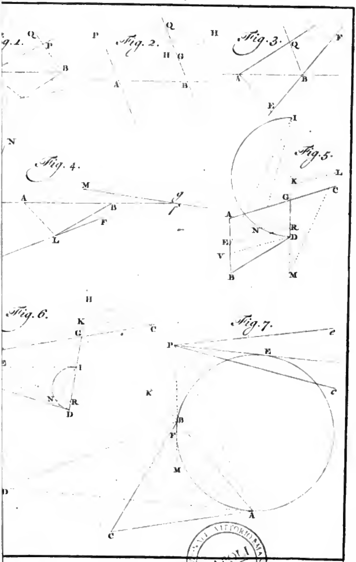
Digitized by Google

Tab. T.



Digitized by Google

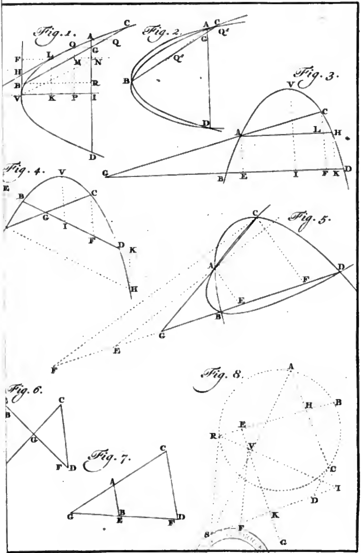
TAB. U.



NAPOLI

Digitized by Google

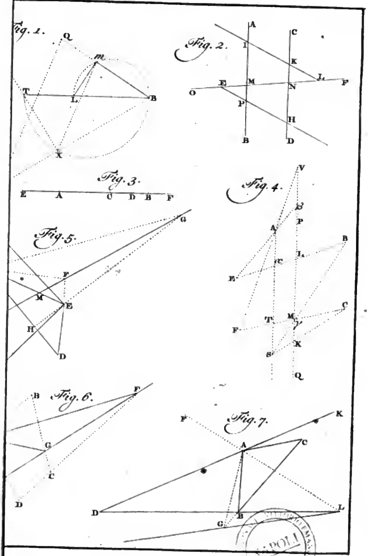
TAB. X.



Digitized by Google

Digitized by Google

Tab. V.



NAPOLI

Digitized by Google

Digitized by Google

ERRATA.	TOMI I.	CORRIGE
Pag. 4. not. 11. lin. poſitivæ & affirmativæ		poſitivæ & negativæ
pag. 14. not. 55. lig. 3. col. 2. $11 - 4 = 8$		$12 - 4 = 8$
pag. 38. Ex. (*f*) (275		(2,75
pag. 52. lin. 7. a fine 2536		15360
pag. 55. $(aa + 3ab - 2bb$		$(aa + 3ab - 2bb$
pag. 62. not. lin. pen. $(m+1)\,(n+1)\,(m+1)$		$(m+1)\,n+1\,(m+1)$
pag. 110. not. 29. $x \,.\, y :: y \,.\, x$		$x \,.\, y :: y \,.\, z$.
pag. 112. not. 43. *cum cognita*		*cum incognita.*
pag. 125. $pA + qB = rC$		$pA + qB + rC$
pag. 160. not. lig. 13. a fin. col. 2. CB		DB
pag. 163. not. lig. 13. col. 2. $AG = H - a$		$AG = AH - a$.

Digitized by Google

Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Google